

高等数学

学习指导书

涂汉生 周海东 胡 成 编



西南交通大学出版社

SOUTHWEST JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

高等数学学习指导书

上 册

涂汉生 周海东 胡 成 编

西南交通大学出版社

图书在版编目 (C I P) 数据

高等数学学习指导书 / 涂汉生等编. —成都: 西南交通大学出版社, 2000.9

ISBN 7-81057-503-1

I. 高... II. 涂... III. 高等数学—高等学校—教学参考资料 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2000) 第 35454 号

高等数学学习指导书

上 册

涂汉生 周海东 胡 成 编

*

出 版 人 宋绍南

责任编辑 戴本文

封面设计 毕雪屏

西南交通大学出版社出版发行

(成都交大路 148 号 邮政编码: 610031 发行科电话: 7600564)

http: //press.swjtu.edu.cn

E-mail: cbs@center2.swjtu.edu.cn

四川森林印务有限责任公司印刷

*

开本: 850mm × 1168mm 1/32 印张: 7.5

字数: 189 千字 印数: 1 ~ 4000 册

2000 年 9 月第 1 版 2000 年 9 月第 1 次印刷

ISBN 7-81057-503-1/O · 028

定价: 9.80 元

前 言

“高等数学”是高等工科院校的一门重要基础课. 学生对它掌握的好坏, 不仅关系到后继课程的学习, 而且对今后的提高和发展有着深远的影响. 然而由于学时的减少, 教师在课堂上不可能讲解很多的例题, 作业也不可能全部批改, 因而学生在学习中, 普遍感到虽然内容听懂了, 但做起题来却有不少困难.

为帮助学生学好“高等数学”这门课程, 我们编写了这本《高等数学学习指导书》, 分为上、下册出版. 该书对于学生理解所学内容, 掌握重点、难点和演算习题等方面均会有所帮助, 是一本较为理想的参考书.

本书每章由四部分组成: 一是基本要求; 二是基本计算; 三是习题选解; 四是思考问题. 参加本书上册编写的人员有: 涂汉生(各章的基本要求、基本计算、思考问题及第六章的习题选解)、周海东(第一、二、三章的习题选解)、胡成(第四、五章的习题选解), 何崇炎为本书提供了部分素材. 此外, 在本书的编写过程中, 得到西南交通大学应用数学系(特别是高等数学教研室)和出版社的大力支持与帮助, 在此一并致谢.

限于编者水平, 加之时间仓促, 不足之处在所难免, 敬请广大读者给予批评和指正.

编 者

2000. 4. 15

目 录

第一章 函数的极限与连续	1
一、基本要求	1
二、基本计算	1
三、习题选解	4
四、思考问题	32
第二章 导数与微分	35
一、基本要求	35
二、基本计算	37
三、习题选解	39
四、思考问题	75
第三章 中值定理与导数的应用	77
一、基本要求	77
二、基本计算	78
三、习题选解	80
四、思考问题	116
第四章 不定积分	119
一、基本要求	119
二、基本计算	121
三、习题选解	125
四、思考问题	164

第五章 定积分	166
一、基本要求.....	166
二、基本计算.....	168
三、习题选解.....	170
四、思考问题.....	199
第六章 定积分的应用	201
一、基本要求.....	201
二、基本计算.....	201
三、习题选解.....	203
四、思考问题.....	224

第一章 函数的极限与连续

一、基本要求

1. 理解函数的概念,了解反函数和复合函数的概念;
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性;
3. 熟悉基本初等函数、双曲函数的定义与图形;
4. 能列出简单实际问题中的函数关系;
5. 理解数列极限与函数极限(含左极限、右极限)的概念;
6. 掌握极限的四则运算法则,了解两个极限存在准则(夹逼准则和单调有界准则),会用两个重要极限求极限;
7. 了解无穷小、无穷大的概念,掌握无穷小的比较;
8. 理解函数连续的概念,会判断间断点的类型;
9. 了解初等函数的连续性,知道闭区间上连续函数的性质(介值定理和最大值、最小值定理).

本章计算的重点是求函数(含数列)的极限及判断函数的连续性.

二、基本计算

(一) 求函数的定义域

若函数是由分析式子给出的,则其定义域就是使该算式有意义的自变量 x 的全体;若所给函数是由几个初等函数经四则运算组成的,则其定义域就是这几个函数定义域之交;对于实际问题,应根据问题本身的意义来确定其定义域.

(二) 求极限

求极限的方法很多,这里只总结本章所涉及到的计算极限的一些方法.在以后的章节里还将介绍其它求极限的方法.

1. 单调有界数列法: 根据单调有界数列必有极限的准则来求一些数列的极限.

注意: 使用此法时,必须首先证明数列是单调有界的,否则会导致错误.

2. 利用夹逼准则: 设 $a_n \leq c_n \leq b_n (n \geq N)$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$.

3. 利用两个重要极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad (\text{或} \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e).$$

特别在求未定式 1^∞ 极限 $\lim f(x)^{g(x)}$ 时,若

$$\lim [f(x) - 1]g(x) = \mu \quad (\text{可为} \infty),$$

则 $\lim f(x)^{g(x)} = e^\mu$.

4. 有理化法: 将分子或分母有理化,以消去不确定因子.

5. 等价无穷小替代法: 应记住当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x \sim x$, $\tan x \sim x$, $\arcsin x \sim x$, $\arctan x \sim x$, $\ln(1+x) \sim x$, $e^x - 1 \sim x$, $(1+x)^\mu - 1 \sim \mu x$, $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$.

注意: 使用此法时,应该用整个分子或整个分母(及其因子)的等价无穷小去作替代,否则会发生错误.

例如,如下的替代是错误的:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^3} = 0.$$

这是因为,当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x - \sin x$ 与 $x - x = 0$ 是不等价的.

6. 连续化法: 将求数列极限的问题转化成求函数极限的问题.

$$\text{例如, } \lim_{n \rightarrow \infty} n(2^{\frac{1}{n}} - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(2^{\frac{1}{x}} - 1) \stackrel{y = \frac{1}{x}}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2^y - 1}{y} =$$

$\ln 2$.

7. 以下结果在求极限时可直接引用:

$$\textcircled{1} \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0 \quad (|a| < 1), \text{例如}, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} \right)^n = 0.$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \begin{cases} 0, & \text{当 } m < n, \\ \text{最高次幂系数之比}, & \text{当 } m = n, \\ \infty, & \text{当 } m > n. \end{cases}$$

其中 $P_m(x)$ 与 $P_n(x)$ 分别为 x 的 m 次与 n 次多项.

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^\mu} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\mu}{a^x} = 0, \quad a > 1, \mu > 0.$$

$$\textcircled{4} \frac{1}{\text{无穷大}} = \text{无穷小}, \quad \frac{1}{\text{无穷小}} = \text{无穷大}.$$

$$\textcircled{5} \text{有界函数} \times \text{无穷小} = \text{无穷小}.$$

(三) 判断函数的连续性 & 求间断点

1. 利用连续的定义: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 连续.

2. 初等函数在其定义区间上连续: 若 $f(x)$ 是初等函数, 且 x_0 为其定义区间内的一点, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 连续.

3. 确定常数, 使分段函数在分段点处连续是判断连续性问题中的一类重要题型, 值得同学们注意.

4. 不连续点称为间断点, 间断点可分为两种类型:

$$\text{间断点} \begin{cases} \text{第一类: 左、右极限均存在} \begin{cases} \text{可去: 左极限} = \text{右极限 (即极限存在)} \\ \text{不可去: 左极限} \neq \text{右极限} \end{cases} \\ \text{第二类: 左、右极限中至少有一个不存在.} \end{cases}$$

(四) 判断方程根的存在

由闭区间上连续函数的介值定理可知:

若 $f(x) \in C_{[a,b]}$, 且 $f(a)f(b) < 0$, 则 $\exists \xi \in (a,b)$, 使 $f(\xi) = 0$, 即方程 $f(x) = 0$ 在 (a,b) 内有实根存在. 如果 $f(x)$ 还在 $[a,b]$ 上单调, 则方程 $f(x) = 0$ 在 (a,b) 内有唯一实根.

三、习题选解

习题 1-1

(一) 解不等式

1. 用区间表示下列不等式的解:

$$(1) |x-1| < 3; \quad (2) |x+1| > 2;$$

$$(3) (x^4 - x^2) > 0; \quad (4) \frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x}} > 0.$$

解 (1) 由 $|x-1| < 3$, 得 $-3 < x-1 < 3$, $-2 < x < 4$, 区间表示为 $(-2, 4)$.

(2) 由 $|x+1| > 2$, 得 $x+1 > 2$ 或 $x+1 < -2$, 即 $x > 1$ 或 $x < -3$, 区间表示为 $(1, +\infty)$ 或 $(-\infty, -3)$.

(3) $x^2(x^2-1) > 0$, $x^2-1 > 0$, $x > 1$ 或 $x < -1$, 区间表示为 $(1, +\infty)$ 或 $(-\infty, -1)$.

$$(4) \text{ 由 } \frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x}} > 0, \text{ 得 } \begin{cases} x+1 > 0, \\ x > 0, \end{cases} \quad \text{即 } x \in (0, +\infty).$$

$$\text{再由 } \begin{cases} x+1 < 0, \\ x < 0, \end{cases} \quad \text{得 } x \in (-\infty, -1).$$

(二) 函数关系的建立

1. 设 $A(0, a), B(b, c)$ 是直角坐标 xOy 平面上两个固定点, $a > 0, b > 0, c > 0$, 又设 $P(x, 0)$ 是 x 轴上的动点, 试将 AP 与 PB 长度的和 z 表示为 x 的函数.

解 依题意有: $z = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(b-x)^2 + c^2}$, $x \in \mathbf{R}$.

2. 从半径为 R 的圆中剪下一圆心角为 x (弧度) 的扇形, 然后卷成一圆锥形漏斗, 试将漏斗体积 V 表示为 x 的函数.

解 设圆锥的顶圆半径为 r , 则 $2\pi r = xR$, $r = \frac{R}{2\pi}x$, 高 $h =$

$$\sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4\pi^2}x^2}, \text{ 于是}$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi \left(\frac{R}{2\pi}x \right)^2 \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4\pi^2}x^2} \\ &= \frac{1}{24} \frac{R^3}{\pi^2} x^2 \sqrt{4\pi^2 - x^2}, \quad 0 < x < 2\pi. \end{aligned}$$

3. 点 $P(x, y)$ 在抛物线 $y = \sqrt{x}$ 上, 试将点 $A(1, 0)$ 与点 P 之间的距离 d 表示为 x 的函数, 并给出此函数的定义域与值域.

$$\text{解 } d = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - x + 1},$$

$$\text{故 } x \in [0, +\infty), \quad Z(f) = \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty \right).$$

4. 已知水渠横断面为等腰梯形, 斜角 $\varphi = 40^\circ$, 当过水断面 $ABCD$ 的面积为定值 S_0 时, 求渠周 $L = AB + BC + CD$ 与水深 h 之间的函数关系式, 并说明定义域 (如图 1-1).

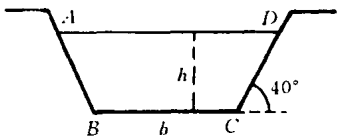


图 1-1

$$\text{解 } AD = b + 2h\cot 40^\circ,$$

$$CD = \frac{h}{\sin 40^\circ},$$

$$\text{故 } \frac{1}{2}(AD + BC)h = \frac{1}{2}(2b + 2h\cot 40^\circ)h = S_0, \quad (1)$$

$$L = AB + BC + CD = \frac{2h}{\sin 40^\circ} + b, \quad (2)$$

$$\text{由(1) 解出 } b = \frac{S_0}{h} - h\cot 40^\circ, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{代入(2) 得 } L &= \frac{2h}{\sin 40^\circ} + \frac{S_0}{h} - \frac{h\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ} \\ &= \frac{S_0}{h} + \frac{2 - \cos 40^\circ}{\sin 40^\circ}h, \end{aligned}$$

由(3) 式 $b > 0$, 可得 $0 < h < \sqrt{S_0 \tan 40^\circ}$

(三) 函数的两个要素——对应法则 f 与定义域

1. 确定下列函数的定义域:

(1) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2}$; (2) $\varphi(x) = \sqrt{x^2(x^2 - 2)}$;

(3) $y = \arcsin(x - 3)$.

解 (1) 由 $x^2 - 2 \geq 0$, 有 $|x| \geq \sqrt{2}$, 故

$$D(f) = (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty).$$

(2) $f(x) = |x| \sqrt{x^2 - 2}$, 并由(1)题知

$$D(f) = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup [\sqrt{2}, +\infty) \cup \{0\}.$$

(3) 由 $y = \arcsin(x - 3)$ 知, $|x - 3| \leq 1$, 于是

$$-1 \leq x - 3 \leq 1, \quad 2 \leq x \leq 4.$$

2. 下列各对函数 f 和 g 是否相同?为什么?

(1) $f(x) = \sqrt{x^2(x+1)}$, $g(x) = x\sqrt{x+1}$;

(2) $f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}$, $g(x) = x\sqrt[3]{x-1}$;

(3) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, $g(x) = x + 2$;

(4) $f(x) = \cos^2 x$, $g(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$.

解 由函数的两个要素, 要求: i) $D(f) = D(g)$; ii) $\forall x \in D(f) = D(g), f(x) = g(x)$. 由此知: (1) f, g 不相同, 因条件 ii) 不满足; (2) 题之 f, g 相同; (3) 题之 f, g 不同, 因 $D(f) \neq D(g)$; (4) 题中的 f 与 g 相同.

(四) 函数值的计算、函数的零点

1. 设 $f(x) = \arccos(\lg x)$, 求 $f(10), f(0)$ 及 $f(0.1)$.

解 $f(10) = \arccos(\lg 10) = \arccos 1 = 0$,

$f(0)$ 无定义, $f(0.1) = \arccos(\lg 0.1) = \arccos(-1) = \pi$.

2. 设 $f(x)$ 是二次有理整函数(即 $f(x) = ax^2 + bx + c$), 已知 $f(0) = 1, f(1) = 0, f(3) = 5$, 试确定 $f(x)$.

解 把条件代入, 解关于 a, b, c 的三元一次线性方程组, 立即

可得 $a = \frac{7}{6}, b = -\frac{13}{6}, c = 1$.

3. 设 $f(x) = \begin{cases} x, & \text{当 } x \leq 0 \text{ 时,} \\ x^2, & \text{当 } x > 0 \text{ 时,} \end{cases}$

(1) 求 $f(-3)$ 及 $f(2)$.

(2) $\forall y \in (-\infty, +\infty)$, 求解方程 $f(x) = y$.

解 (1) $f(-3) = -3, f(2) = 2^2 = 4$;

(2) 讨论: 当 $y \in (-\infty, 0]$ 时, $x = y$; 当 $y \in (0, +\infty)$ 时, $x = \sqrt{y}$.

4. 方程 $f(x) = 0$ 的根(实根)叫做函数 f 的零点. 试确定下列函数的零点, 并确定取正值和负值的 x 的集合.

(1) $f(x) = 2 + x - x^2$; (2) $G(x) = \lg \frac{2x}{1+x}$.

解 (1) $f(x) = 2 + x - x^2 = 0$, 得 f 的零点 $x_1 = -1, x_2 = 2$. 且当 $x \in (-1, 2)$ 时, $f(x) > 0$; 当 $x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$, $f(x) < 0$.

(2) 令 $\frac{2x}{1+x} = 1$, 解得 G 的零点为 $x = 1, D(G) = (0, +\infty) \cup (-\infty, -1)$. 由 $\frac{2x}{1+x} > 1$, 解得 $x > 1$ 或 $x < -1$. 故当 $x \in (-\infty, -1)$ 或 $x \in (1, +\infty)$ 时, $G(x) > 0$; 而当 $x \in (0, 1)$ 时, $G(x) < 0$.

(五) 函数的几个特性

1. 证明: $f(x) = x^4 - 4x$ 在 $(1, +\infty)$ 严格单调增加, 在 $(-\infty, 1)$ 严格单调减少.

证 $\forall x_1, x_2 \in (1, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$, 代入求

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= x_2^4 - 4x_2 - x_1^4 + 4x_1 \\ &= (x_2^4 - x_1^4) - 4(x_2 - x_1) \\ &= (x_2 - x_1)[(x_2 + x_1)(x_2^2 + x_1^2) - 4] > 0 \end{aligned}$$

故 $f(x_2) > f(x_1)$, f 在 $(1, +\infty)$ 上严格单调增加.

当 $x_1, x_2 \in (-\infty, 1)$ 时, $x_1 < x_2$. 由上式知 f 在 $(-\infty, 1)$ 上

严格单调减少.

2. 设 $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$, (1) 证明 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 与 $(1, +\infty)$ 上严格单调增加; (2) 根据(1) 能否说 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ 严格单调增加.

证 (1) $\forall x_1 < x_2$ ($x_1, x_2 \neq 1$), 计算

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= \frac{1+x_2}{1-x_2} - \frac{1+x_1}{1-x_1} = \frac{-2x_1 + 2x_2}{(1-x_2)(1-x_1)} \\ &= \frac{2(x_2 - x_1)}{(1-x_2)(1-x_1)}, \end{aligned}$$

由上式, 易得本题结论.

(2) 不能说 f 在 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ 严格单调增加, 因为 $x_1=0, x_2=2 \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty), f(0)=1, f(2)=-\frac{3}{2}$ 矛盾, 实际上它的图形呈图 1-2 所示的双曲线.

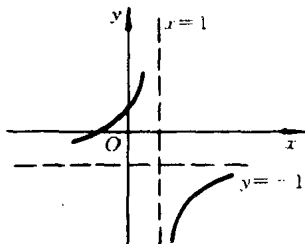


图 1-2

3. 指明下列函数中哪个是奇函数? 哪个是偶函数?

(1) $f(x) = \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2};$

(2) $g(x) = \sqrt[3]{(x+1)^3} - \sqrt[3]{(x-1)^3};$

(3) $\varphi(x) = \lg \frac{1+x}{1-x};$

(4) $\varphi(x) = \lg(x + \sqrt{1+x^2}).$

解 如果定义域 D 关于原点对称, 且满足 $\forall x \in D, f(-x) = f(x)$, 则 f 为偶函数; 如果 $f(-x) = -f(x)$, 则 f 为奇函数. 用它判断(1) 为奇函数. (2) 中 $g(x)$ 为偶函数: 因 $D(g) = \mathbf{R}$, $g(-x) = \sqrt[3]{(-x+1)^3} - \sqrt[3]{(-x-1)^3} = \sqrt[3]{(x+1)^3} - \sqrt[3]{(x-1)^3}$. (3) 和(4) 中的函数为奇函数, 例如

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \varphi(-x) = \lg(-x + \sqrt{1+x^2}) = \lg\left(\frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$= -\lg(x + \sqrt{1+x^2}) = -\varphi(x).$$

4. 设 $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ ($x \neq \pm 1$), 求 $g(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$ 及 $\varphi(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$.

解 直接计算即可. 如

$$g(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{1+x}{1-x} + \frac{1-x}{1+x} \right] = \frac{1+x^2}{1-x^2}.$$

同理有 $\varphi(x) = \frac{2x}{1-x^2}$ (值得注意 $g(x), \varphi(x)$ 分别是 $(-1, 1)$ 上的偶函数, 奇函数).

5. 证明: 如果 $D(f) = (-\infty, +\infty)$, 那么 $f(x)$ 可以表示为一个偶函数与一个奇函数之和.

证 由 4 题知

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] \\ &= g(x) + \varphi(x), \end{aligned}$$

易验证 $g(x), \varphi(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的偶函数、奇函数.

6. 设下面所考虑的函数都是定义在对称区间 $(-l, l)$ 上的, 证明:

(1) 两个偶函数的和是偶函数, 两个奇函数的和是奇函数;

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数, 两个奇函数的积也是偶函数, 偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

证 (1)、(2) 题各问的证法类似, 仅举其中之一. 设 $g(x)$ 是偶函数, $\varphi(x)$ 是奇函数, 证明:

$$f(x) = g(x)\varphi(x) \quad (x \in (-l, l)) \text{ 是奇函数.}$$

$$\forall x \in (-l, l), \quad -x \in (-l, l), \text{ 且}$$

$$f(-x) = g(-x)\varphi(-x) = -g(x)\varphi(x) = -f(x).$$

7. 下列各函数中哪些是周期函数? 对于周期函数, 指出它的周期.

$$(1) f(x) = \arccos(\cos x); \quad (2) f(x) = \cos(\arccos x)$$

$$(3) f(x) = \sqrt{\sin x}; \quad (4) \tan\left(4x + \frac{\pi}{10}\right).$$

解 严格按周期函数定义判断. (1) 是, 周期为 2π ; (2) 不是周期函数; (3) 是, 周期为 2π ; (4) 是, 周期为 $\frac{\pi}{4}$.

8. 作下列函数的图形:

$$(1) y = \sin(\arcsin x); \quad (2) y = \arccos(\cos x).$$

解

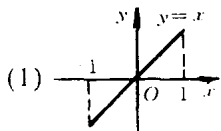


图 1-3

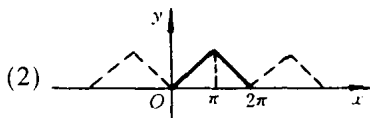


图 1-4

9. 设 $f(x)$ 是以 $2l$ 为周期的周期函数, 试证: $F(x) = f\left(\frac{l}{\pi}x\right)$ 是以 2π 为周期的周期函数.

$$\begin{aligned} \text{证} \quad F(x + 2\pi) &= f\left(\frac{l}{\pi}(x + 2\pi)\right) = f\left(\frac{l}{\pi}x + 2l\right) \\ &= f\left(\frac{l}{\pi}x\right) = F(x). \end{aligned}$$

10. 证明: $f(x) = \sin x^2$ 不是周期函数.

证 因 $D(f) = (-\infty, +\infty)$, 若 f 是周期函数, 那么 f 的零点分布应呈周期分布.

$f(x) = \sin x^2$, 当 $x \geq 0$ 时, f 的零点为:

$$x_n = \sqrt{n\pi}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{考察} \quad x_{n+1} - x_n = \sqrt{(n+1)\pi} - \sqrt{n\pi} = \frac{\pi}{\sqrt{(n+1)\pi} + \sqrt{n\pi}},$$

显然, 当 n 增加时, 两相邻零点的间隔减小, 故 $f(x) = \sin x^2$ 不是周期函数.

11. 设函数 $f(x)$ 在 D 上有定义, 试证: 函数 $f(x)$ 在 D 上有界的充要条件是它在 D 上既有上界又有下界.

证 必要性: $f(x)$ 在 D 上有界, $\exists M > 0, \forall x \in D$,
 有 $|f(x)| \leq M$,
 即 $-M \leq f(x) \leq M$.

可见 $f(x)$ 在 D 上有下界 $-M$, 上界 M .

充分性: 设 $f(x)$ 在 D 上有上界 M , 下界 m ,
 即 $\forall x \in D$ 有 $m \leq f(x) \leq M$,
 从而 $|f(x)| \leq \max\{|m|, |M|\}$,
 即 $f(x)$ 在 D 上有界.

(六) 反函数与函数的复合

1. 求 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($ad-bc \neq 0$) 的反函数, 并问 a, b, c, d 满足什么条件时, 这个反函数与直接函数相同?

解 由条件 $ad-bc \neq 0$, 表明 c, d 不同时为零. 由 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$,
 得到 $(cy-a)x = b-dy$. 现在的问题是 $cy-a$ 可否为零. 如果为
 0, 反函数就不存在. 由条件可证 $cy-a \neq 0$. 下面是证明:

由 $ad-bc \neq 0$ 知, c, d 不同时为零. 设 $c \neq 0$, 于是

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{acx+bc}{c^2x+dc} \neq \frac{acx+ad}{c^2x+dc} \quad (bc \neq ad),$$

从而 $y \neq \frac{a}{c}$,

即 $cy-a \neq 0$.

在条件 $ad-bc \neq 0$ 下有反函数

$$x = \frac{b-dy}{cy-a} \quad \text{或} \quad y = \frac{b-dx}{cx-a},$$

若反函数与直接函数相同, 则

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{b-dx}{cx-a}.$$

整理成二次恒等式, 比较系数, 得

$$c(a+d) = 0,$$

$$(a-d)(a+d) = 0,$$