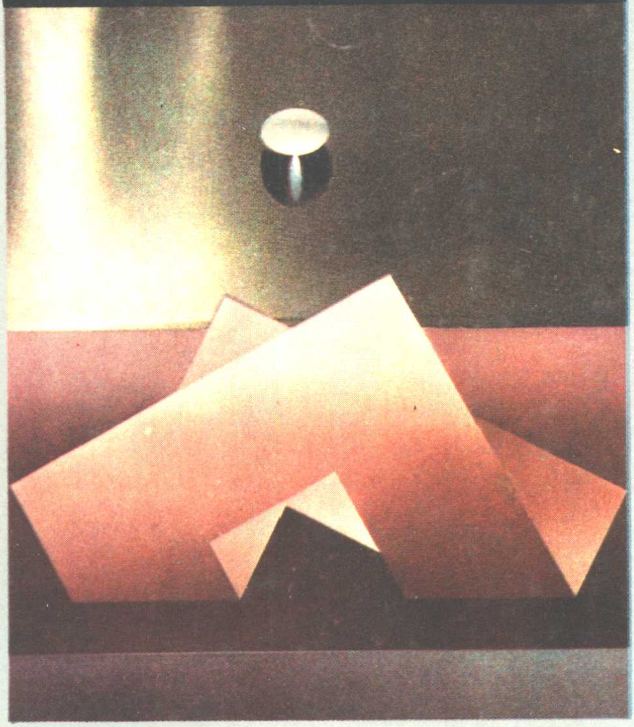
江苏教育出版社



SHUXUEZHEXUE
XINLUN

JIANGSU JIAOYU CHUBANSHE

数学哲学新论

郑毓信 著

数学哲学新论

郑毓信 著

江苏教育出版社

ISBN 7-5343-1161-6

数学哲学新论

郑毓信 著

责任编辑 王建军

出版发行：江苏教育出版社

（南京中央路165号，邮政编码：210009）

经 销：江苏省新华书店

印 刷：江苏新华印刷厂

（南京中央路145号，邮政编码：210009）

开本 850×1168 毫米 1/32 印张 8.25 插页 2 字数 201,500

1990年10月第1版 1990年10月第1次印刷

印数 1—1,000册

ISBN 7—5343—1161—6

G·1021 定价：3.20 元

谨以本书献给伊姆雷·拉卡托斯(I. Lakatos)，并向约翰·沃特金斯教授(J. Watkins)、吉琳·佩奇女士(G. Page)、琳达·张女士(L. Cheung)及其他朋友表示诚挚的谢意，正是由于他们的大力帮助，使我在伦敦经济政治学院度过了愉快的一年。

This book is dedicated to Imre Lakatos. I would also like to express my thanks to Professor John Watkins, Gillian Page, Linda Cheung and others for their kind help which made my life in London during 1987 ~ 1988 more beneficial and happier.

目 录

引言　数学哲学的历史发展

什么是数学哲学？通常的回答是：这是对数学的哲学分析。这一回答并没有什么错误。但是，只须稍作推敲，就可发现这又是一种近似于“同义反覆”的回答，即并没有为人们提供多少有用的信息。例如，按照同样的方式，我们也可以说，科学哲学是对科学的哲学分析，物理哲学是对物理学的哲学分析，逻辑哲学是对逻辑学的哲学分析……但是，除去分析对象的不同以外（这是不言自明的），这些解答又能说明什么问题呢！在大多数的情况下，这种机械的、千篇一律的回答事实上只能引起误解及错误的认识。

当然，要想用简单的一句话对一门学科进行概括是十分困难的。事实上，这里所涉及的是这样一个问题：怎样才能较好地刻画出一门学科的基本面貌？不知道是谁最先提出了应当从问题（及问题境况）着手来理解科学理论的思想，但波普尔（K. Popper）在这一问题上的精辟论述确实给我留下了深刻印象：每门学科都有自己的特殊问题，而又正是通过问题的解决或转换，这一学科才获得了自己的历史发展。下面就按照这样的思路来对什么是数学哲学的

问题作出进一步的分析。

一、自古希腊时代至19世纪初，数学哲学主要作为一般哲学的一个组成部分得到了自己的早期发展。具体地说，由于数学的特殊性(数学对象，如1、2、3等，都是所谓的“共相”)，数学对象的实在性问题早在古希腊时代就已引起了哲学家们的关注。对于这一问题的分析，事实上构成了有关哲学思想的重要组成部分。例如，一些学者指出，柏拉图就是通过几何对象(例如，圆)的分析引出了理念论的思想；而这一理论反过来又为数学对象的本体论问题提供了具体的解答：数学对象是所谓的“理念世界”中的存在，也即是一种不依赖于人类思维的独立存在。另外，在亚里士多德那里，数学对象的实在性问题则构成了所谓的“分离问题”的一个部分，亚里士多德并明确提出了这样的思想：数学对象只是一种抽象的可能性，即只是由于数学家的抽象思维才实现了由“潜在”向“实在”的转化。

中世纪以后，随着宗教神学与经院哲学的崩溃，人们对先前遗留下来的一切文化和思想采取了普遍怀疑的态度。然而，数学的真理性却似乎是唯一的例外，以致数学就被认为是“沼泽地里的一块稳妥的立足点”。但是，数学为什么可能具有这种无可怀疑的真理性呢？从而，数学的真理性问题也就自然成了近代哲学研究的一个重要课题。例如，休谟为此提出了两类知识的区分；康德则认为数学命题是所谓的“先天综合判断”。

综上可见，早期的数学哲学研究就是围绕数学对象的实在性及数学的真理性这样两个问题展开的。

二、从19世纪中期开始，数学哲学逐渐进入了一个以数学基础研究为中心的新的历史时期。数学基础研究是围绕这样一个问题展开的：如何为数学奠定一个可靠的基础，并借助可靠的方法去开展出全部(或大部分)数学，从而彻底解决数学的可靠性问题。数学基础研究的开展是有其历史必然性的。对此可以从正反两个

方面进行说明。首先,“理论的数量上的增长必然引起更好的论证理论,使理论系统化,批判地审查理论的基础等这样一些任务。”(A.Д.亚历山大洛夫等:《数学——它的内容、方法和意义》,科学出版社,1984年,第51页.)具体地说,作为微积分理论深入发展的必然一步,19世纪的数学家们积极从事了为这一理论奠定严格逻辑基础的工作(这就是数学史上所谓的“批判运动”)。这一运动的直接结果是“分析的算术化”,即建立了严格的实数理论和极限理论,而后者则又为进一步的研究提供了直接的动力。例如,作为已有工作的评价,人们自然会想到这样的问题:分析是否真正算术化了(即其中是否还用到了其它的概念和方法)?我们又应当怎样来看待这种工作的意义?特别是,算术理论(更准确地说,是自然数理论)能否看成是微积分理论乃至整个数学的可靠基础?这样,一般意义上的数学基础研究就作为理论增长的一个必然结果得到了发展。其次,从历史的角度看,数学基础研究又是与所谓的数学基础危机直接相联系的。这里所说的数学基础危机首先是指关于无穷小量的悖论在数学家中引起的困惑和不安;其后,集合论悖论(特别是著名的罗素悖论)的发现则又造成了更大的混乱:由于数学的现代研究已经清楚地表明了集合的概念和方法在数学中所占据的重要地位——集合的概念和方法不仅渗透于几乎所有的数学分支之中,而且,在由自然数理论出发去开展其它数学理论时,我们事实上也用到了集合的概念和方法——因此,集合论悖论的发现就对整个数学的可靠性构成了极大的威胁。显然,这也就从反面更为清楚地表明了深入开展基础研究的必要性和紧迫性。

由于哲学观点的分歧,数学家们在基础研究中采取了不同的基本立场,其中主要有以弗雷格(G.Frege)、罗素(B.Russell)为代表的逻辑主义,以布劳维尔(L.E.J.Brouwer)为代表的直觉主义以及以希尔伯特(D.Hilbert)为代表的形式主义。由于这些学派对数学基础乃至一般的数学哲学问题都持有不同的观点,并在相

互之间进行了激烈的批评和争论，从而，随着基础研究的深入，数学哲学的研究在本世纪交替之际及以后的一段时期内，就出现了一个“百花齐放、百家争鸣”的欣欣向荣的局面。这就如同鲁滨逊(A.Robinson)所说：“就数学哲学的研究而言，1890到1940年之间的这50年是一个黄金时代。”(«Formalism 64», 载 «Logic, Methodology and Philosophy of Science», ed. by Bar-Hillel, North-Holland Pub. Co., 1964年，第228页.)这一黄金时代也就是数学哲学以基础研究为中心的历史时期。

三、作为其数学哲学思想的具体体现，逻辑主义等学派提出了各自的基础研究规划，并为具体地实现这些规划进行了深入的研究。但是，尽管他们都作出了巨大的努力，所有这些学派的研究规划都没有能够得到实现。这样，在经历了上述的黄金时代以后，数学哲学的研究就出现了一个停滞的阶段。例如，卡尔马(L.Kalmar)就曾这样写道：“在经历了本世纪上半叶的繁荣以后……数学基础现在看来进入了一个悲观的、停滞的阶段。”(«Foundations of Mathematics—Whither now?», 载 «Problems in the Philosophy of Mathematics», ed. by Imre Lakatos, Horth-Holland Pub. Co., 1967年，第192页.)

然而，只要数学本身仍然处于茁壮的发展之中，关于数学的哲学分析就不可能完全停顿下来；另外，某个研究方向上的连续失败则又必然会引起新的思考，从而也就包含了导致新的重要发展的巨大可能性。笔者认为，数学哲学现在正经历着由数学基础为中心的时期向新的时期的重要转变。

尽管尚未见到太阳，但曙光已经预告了它的到来；尽管由孩提到成年还会有一些重要的变化，但新的发展毕竟又是以其雏型为现实基础的。通过对这一领域内的有关发展作综合的分析以使读者对数学哲学的现代演变在整体上有一个清楚的认识，这就是本书的主要目的。

笔者在先前曾与夏基松教授与林曾同志合作先后完成了《西方数学哲学》(人民出版社，1986年)与《数学、逻辑与哲学》(湖北人民出版社，1987年)等两部著作，其中主要对数学基础研究进行了介绍和分析。自1987年8月至1988年8月，笔者对英国进行了为期一年的学术访问，拉卡托斯(Imre Lakatos)生前工作过的伦敦经济政治学院哲学、逻辑和科学方法系为我提供了良好的工作环境，广泛的学术交流则更使我获得了新的学习机会，一些多年来一直缠绕心间的基本问题似乎终于获得了较为满意的解答。十分幸运的是，在建立一种新的数学哲学理论方面，我一直得到了我的导师徐利治教授的直接指导和帮助。事实上，其中的一些基本思想就是属于徐利治教授的。我们认为，在数学哲学的现代发展中，中国学者是应当作出自己的贡献的。本书中所提出的模式观的数学哲学理论(第4章——这是由徐利治教授与笔者合作完成的)即是这一方向上的一个努力。

最后，笔者愿意再次引用波普尔的又一重要思想来结束引言部分的论述。波普尔向年青的科学工作者提出了如下的建议：应当了解现时的问题境况。这也就是说，应当“设法去了解人们现在在科学上讨论些什么。找出困难所在，把兴趣放在不一致的地方。”(《猜想与反驳》，上海译文出版社，1986年，第182页。)笔者诚挚地希望读者也能通过阅读本书了解到在数学哲学领域中人们现在在讨论哪些问题，出现了什么样的新思想，又存在着怎样的困难……如果年青的朋友们能因此而引起兴趣并获得一定的启示，笔者更将感到极大的欣慰，因为，数学哲学的发展是需要更多的年青力量的。

郑毓信

1989年7月于南京大学

第1章 一个时代的终结

1.1 数学需要基础吗?

数学哲学的现代发展是相对于以数学基础研究为中心的时代而言的。自1890年到1940年的这50年的确可以说是数学哲学研究的一个黄金时代。弗雷格、罗素、布劳维尔及希尔伯特等人围绕数学基础问题进行了系统和深入的研究，并发展起了逻辑主义、直觉主义和形式主义等具有广泛和深远影响的数学哲学观，从而为数学哲学的研究开辟了一个崭新的时代。正因为这是一个以基础研究为中心的时代，在数学哲学领域中就曾出现过以下的特殊现象(相对于其它的哲学研究而言)：有不少数学哲学的著作即是以数学基础为名的。如弗雷格的《算术基础》，维特根斯坦(L.Wittgenstein)的《关于数学基础的评论》，怀尔德(R.Wilder)的《数学基础导论》，尼本(G.Kneebone)的《数理逻辑与数学基础》等。另外，如果随意地打开一本数学哲学的著作，只要它是在这一时代或是在稍后的年代中完成的，我们也一定可以发现基

础问题或关于逻辑主义等学派的讨论在该书中占有主要的地位。然而，“这一黄金时代现在已经过去了”。而作为这一时代已经终结的首要标志就是关于基础研究在总体上的反思。例如，这种反思即是以下的一系列论文的主要论题：拉卡托斯的《无穷回归与数学基础》，卡尔马的《数学的基础——今在何方？》，普特南(H.Putnam)的《没有基础的数学》，斯莱尼斯(E·Sleinis)的《数学需要基础吗？》，沙克尔(S·Shanker)的《数学基础的基础》等。

对于数学基础研究的反思首先是对于“基础研究”这一基本概念的澄清。在此人们普遍表达了这样的思想，即认为应当注意区分有关的技术性研究和哲学性分析。例如，斯莱尼斯在论文《数学需要基础吗？》中就曾明确指出：“我极力主张有必要区分数学基础的两种不同含义：（1）数学的内在基础，（2）数学的认识论基础。”具体地说，“一方面，存在着可以称为数学的内在基础的东西。它们是由数学上无可怀疑的较小的初始命题集合所组成的，可以认为至少数学的主要和核心部分是建立在这些无可怀疑的命题之上的；另一方面，似乎存在这样的问题，即什么东西保证数学上无可怀疑的初始命题集的可接受性，或者什么是接受这种原始集的理性基础，这个问题我们可以叫做数学的认识论基础的问题。”（《自然科学哲学问题丛刊》，1984年，第一期，第16、14页）另外，维特根斯坦也曾对“数学基础”的两种不同意义作过如下的说明：“当一个人在谈及数学基础时，他可能是指两件不同的事情。他所指的可能即是像说代数是微积分的基础那样的意义，为了学习微积分我们应当首先学习代数。在这样的意义上，数学就像是一幢建筑物，而所说意义上的微积分……则是它的一部分，它的最底层就是我们所藉以开始的地方。借助于基础人们也可以指那种对某些成问题的东西加以支撑的方法。如果通常的数学有问题的话，它的基础就应是没有问题的……” (Wittgenstein, L: «Wittgenstein's Lectures, Cambridge 1932-1935», ed. by A. Ambrose, Oxford, Basil Blackwell, 1979年，第121-222页.）显然，基于目标的不同，我们在此也可谈及两种不同性质的基础研究：一种是纯数学性的研究，即如何以一种数学理论为基础去开展出另一种理论；另一则是哲学性的思考、即是希望能对数学的认识论基础问题作出明确的解答。

这是一个历史的事实：在以往的数学基础研究中，数学性的研究与哲学性的分析往往是互相依赖、密切相关的。例如，沙克尔在《数学基础的基础》一文中就曾对那种认为可以把“分析的严格化”说成纯数学研究的观点进行了批评。另外，就基础研究的时代而言，关于数学基础的数学性研究与哲学性分析的紧密结合则更是这一时代的最主要特点之一。这也就如同作者在《西方数学哲学》一书中所指出的：“关于数学基础的数学性研究和哲学性分析是互相依赖、互相渗透的。例如，主要就是由于数学性的基础研究工作的深入，特别是19世纪的‘分析严格化’运动，才促进了现代关于数学基础的哲学性分析，以致形成了逻辑主义、直觉主义和希尔伯特的形式主义等学派；反之，这些学派在基础问题上的具体研究规划则是他们在基础问题上的哲学思想的具体表现。”（第39页）具体地说，由于认为数学实质上只是逻辑的一个部分，因此，在逻辑主义看来，我们就可以逻辑为基础去开展出全部数学，从而也就有如下的具体研究规划：第一，由逻辑概念出发，通过明确的定义去引出全部（或大部分）数学概念；第二，由逻辑的法则（及有关的定义）出发，经由纯粹的逻辑演绎去推出全部（或主要的）数学命题。另外，直觉主义者通过“可信性”问题的思考提出了数学的“构造性”观点，即认为只有直觉上可构造的数学命题才是可靠的。直觉主义者并以此为准则积极从事了发展新的可靠的数学（即所谓的直觉主义数学）以取代已有的、不那么可靠的数学（即古典数学）的工作。这就是直觉主义的基础研究规划。最后，由于认为真正的可靠性只限于有限的范围，而无限则只具有方法论的

意义，因此，希尔伯特在数学基础研究中就采取了“方法论的实无限论者”的立场。希尔伯特并因此而提出了著名的希尔伯特规划，即认为应当把包含有非有限成分的数学理论组织成形式系统，并用有限的方法证明这种系统的相容性。显然，这一规划也就是其哲学思想的具体体现。

尽管就已有的工作而言，关于数学基础的数学性研究与哲学性分析是密切相联系的，但是，在这两者之间毕竟又存在着重要的区别。也正因为此，一些学者明确提出了数学不需要认识论基础的观点（与此相反，他们对关于数学基础的数学性研究则往往采取肯定的态度）。例如，斯莱尼斯就曾强调指出："我所要提倡的主要论点是：对数学的认识论基础的关注是完全没有根据的。是什么东西保证数学作为一个整体的可接受性，或者数学作为一个整体，其合理基础是什么，这些问题都建立在误解之上。换句话说，我认为数学不需要认识论基础。"（同上，第16页。）另外，普特南在《没有基础的数学》中也曾明确提出："我并不认为数学是含糊不清的；我也不认为数学在其基础中有任何危机；事实上，我根本不相信数学具有或需要什么'基础'。"又"我认为哲学在古典数学中发现的困难并不是真正的困难，我并认为：所已提出的关于数学的哲学解释都是错误的。这种哲学解释正是数学所不需要的东西。"（«Mathematics without Foundations»，载«Mathematics, Matter and Method», Cambridge Univer. Press, 1979年，第43-45页.）

一般地说，关于数学不需要认识论基础的论题主要建立在以下的论据之上：数学中并不存在所谓的基础危机，又由于基础研究常常被认为就是为了解决所说的基础危机，因此，在持有上述观点的人看来，我们就根本不需要所说意义上的数学基础研究，也即根本不需要数学的认识论基础。

从历史上看，导致“数学基础危机”这一说法的原因是多方面的。普特南等人对此分别进行了分析。

第一，非欧几何的建立是否意味着“数学真理性的丧失”？例如，克莱因(M.Kline)就曾写道：“这样多的至少是部分地互相矛盾的几何学居然都能用来描述物理空间，我们真不知道，对于物理空间来说，究竟哪一种是真实的了。”“数学自命为真理的态度已经是必须抛弃的了。”(《数学的基础》，载《自然杂志》，1979年，第4、5期，第229、305页．)针对这种悲观主义的论调，普特南指出，非欧几何的建立事实上只是表明了“自明性”并不能被看成相应结论绝对真理性的保证。从而，我们所应抛弃的就只是关于数学具有绝对的先天真理性的观点，而不能因此而否定数学的真理性。

第二，集合论悖论的发现是否证明了已有数学理论的不可靠性？例如，希尔伯特就曾写道：“必须承认，在这些悖论面前，我们目前所处的情况是不能长期忍受下去的。人们试想：在数学这个号称可靠性和真理性的模范里，每一个人所学的、教的和应用的那些概念结构和推理方法竟会导致不合理的结果。如果甚至于数学思考也失灵的话，那么应该到哪里去寻找可靠性和真理性呢？”(«On the Infinite», 载《Philosophy of Mathematics, Selected Readings», ed. by P. Benacerraf and H. Putnam, Prentice- Hall, Inc., 1964年，第141页.) 应当承认，集合论悖论的发现在最初一段时间的确使数学家们感到极大的震惊。但是，进一步的研究却已表明，“数学活动的真正领域，无论是分析或几何，都没有直接受到悖论的影响，它们只是出现于那些特别一般的领域，而这远远超出了实际使用这些学科的概念的领域。” (A.A. Fraenkel & Y. Bar-Hillel: «Foundations of Set Theory», North-Holland, 1958年，第4页.) 从而，所谓的“基础危机”就只是一个历史的现象而实际上早已不复存在；与此相反，普遍为人们所接受的却是关于数学、至少是其初等部分的坚强信念。例如，斯坦纳(M.Steiner)、莱曼(H.Lehman)及克切尔(P.Kitcher)等人都曾强调指出，这是数学哲学研究的一个明显和无可辩驳的出发点：人们具有一定的数学知识，这些知识是