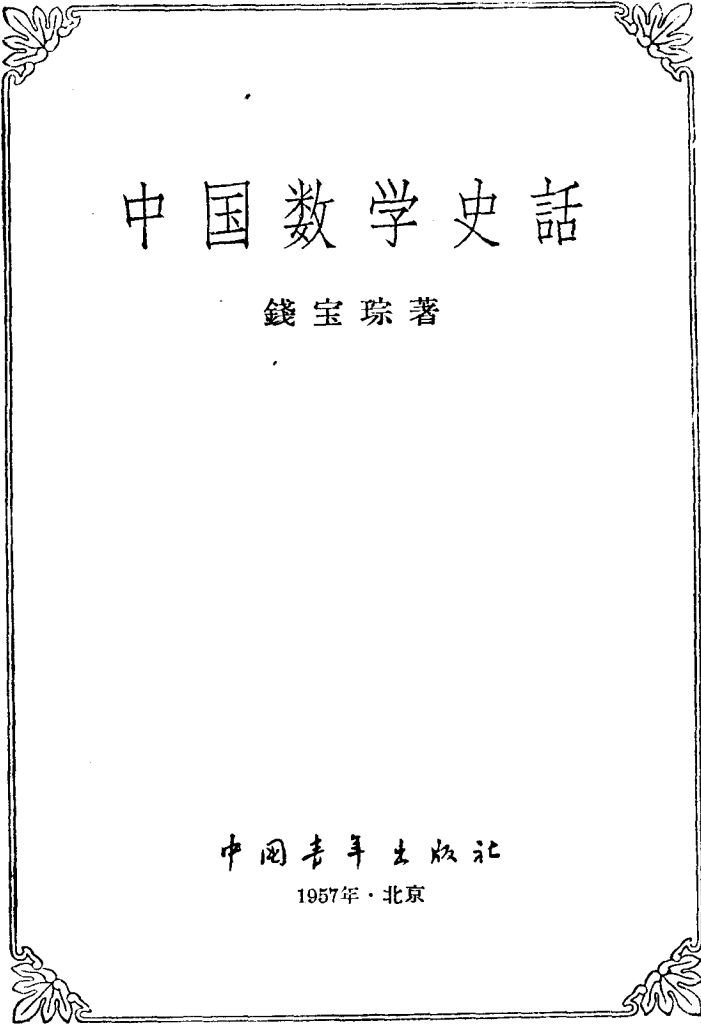


# 中国数学史話

錢宝琮 著

中国青年出版社



# 中国数学史話

錢宝琮著

中国青年出版社

1957年·北京

## 內 容 提 要

我国的数学有悠久的历史 and 光輝的成就,它的内容非常丰富,在世界数学史上也占有重要的地位。这本书就是为了帮助有中等程度的青年了解我国古代的数学遗产而写的。作者在这本书里,开始先把我国的数学史实作了簡要的叙述,接着又将它的主要部分分为专题来論述和介绍,最后分析和总结了我国数学的特征。讀者看了以后,可对祖国数学史和数学上的成就有个概括的印象。

## 中 国 数 学 史 話

錢 宝 琮 著

中 国 青 年 出 版 社 出 版

(北京东四12条老君堂11号)

北京市書刊出版業營業許可証出字第036号

中国青年出版社印刷厂印刷

新华書店总經售

787×1092 1/32 4 3/4 印張 80,000字  
1957年12月北京第1版 1957年12月北京第1次印刷  
印數1—11,500 定价(7)0.42元

## 序 言

为了向科学进军,全国青年同志急迫地希望了解祖国历史上的科学成就,研究各門科学的发展历史。祖国古代的数学是自己发展起来的。古代数学家的偉大成就还傳播到国外,做了有世界意义的数学发展的先驅。本書的第一节概括地叙述中国初等数学发展的史实,最后一节总结中国数学的特征,其他各节写出中国数学各个主要部分的历史发展。目的是使讀者对祖国优越的数学傳統有初步的認識。关于十七世紀初年以后,西洋数学流傳中国,清代数学家在高等数学方面的光輝成就,本書不加討論。

在中国数学史研究中,有些問題是細致而复杂的,只有深入的討論才能取得正确的結論;也有些問題虽然經過考証有了一定的結論,現在还不能作为定論。为了适应青年讀者的要求,本書只介紹一些我自己認為滿意的結論,瑣碎的考据文字概从省略。

編写本書的时候,李儼先生和严敦杰先生提供了很多宝贵的意見,我向他們致誠懇的謝意。

錢宝琮

1956年11月



## 目 次

|    |             |    |
|----|-------------|----|
| 一  | 中国古代数学簡史    | 7  |
| 二  | 算筹記数·四則运算   | 14 |
| 三  | 分数          | 19 |
| 四  | 各种比例問題的解法   | 24 |
| 五  | 盈不足术        | 29 |
| 六  | 方程          | 36 |
| 七  | 正負数加減法則     | 41 |
| 八  | 平面积和立体积     | 44 |
| 九  | 开平方和开立方     | 52 |
| 一〇 | 开帶从平方和开帶从立方 | 59 |
| 一一 | 句股測量        | 63 |
| 一二 | 重差术         | 66 |
| 一三 | 句股弦定理和它的应用  | 69 |
| 一四 | 句股形的各种容圓    | 75 |
| 一五 | 圓周率         | 79 |
| 一六 | 球的体积        | 84 |
| 一七 | 度量衡單位的十进制   | 88 |
| 一八 | 十进小数        | 91 |

|    |              |     |
|----|--------------|-----|
| 一九 | 四舍五入法        | 95  |
| 二〇 | 筹算乘除捷法       | 97  |
| 二一 | 珠算术          | 103 |
| 二二 | 数碼           | 106 |
| 二三 | 开方作法本源图      | 110 |
| 二四 | 增乘开方法        | 113 |
| 二五 | 天元术          | 120 |
| 二六 | 四元术          | 126 |
| 二七 | 等差級数·垛积术和招差术 | 132 |
| 二八 | 剰余定理和大衍求一术   | 138 |
| 二九 | 百鷄問題         | 144 |
| 三〇 | 中国古代数学的特征    | 147 |

## 一 中国古代数学簡史

数学是一連串的抽象理論和計算方法。我們从实践中获得数量和形象的概念，因而产生了数学，由感性認識提升到理性認識，再把它应用到实践中去。从中国古代数学史的研究中可以得到深切的体驗。

我国古代在黃河流域一帶开化极早。在农业生产方面有測量田地面积、推算倉庫容量的經驗，商业方面有物資交易的經驗。为了日常生活上的实际需要，劳动人民对于数学必定有很多的認識。后来到封建社会初期，統治階級为了要收納賦稅，必須建立一个會計制度；要防止河流泛濫，必須修建堤防，知道土方的計算；要修訂一个适应农业生产的历法，必須知道日、月、星辰循环周期的統計；要制造各种器具，必須知道圓規、方矩的应用。各方面都需要些数学理論和計算方法，当时的数学家必定很早就有了偉大的成就。

春秋战国时期，学术文化各方面都有蓬勃的发展，数学也不能例外。但“汉書”“艺文志”里沒有著录秦以前的数学書籍，只說有杜忠“算术”十六卷，許商“算术”二十六卷。杜忠时代无考。許商是汉成帝时人，时代已相当迟了。現在有傳本的古代数学書是“九章算术”九卷。这本书包含二百四十六个应



用問題和各題的解法，分別隸屬於下列九章，所以称为“九章算术”。

| 章名    | 主要内容                         |
|-------|------------------------------|
| 一、方田  | 面积的量法和分数算法。                  |
| 二、粟米  | 粮食交易——簡單比例問題。                |
| 三、衰分  | 配分比例問題。                      |
| 四、少广  | 开平方和开立方。                     |
| 五、商功  | 体积的量法。                       |
| 六、均輸  | 政府征收实粮——“均輸”法的計算，其他算术难题。     |
| 七、盈不足 | 盈亏类問題的解法。其他类型的难题也用盈亏类問題解法处理。 |
| 八、方程  | 联立一次方程組解法，正負数。               |
| 九、句股  | 句股定理的应用問題，句股測量。              |

“方田”到“商功”五章起源很古，但也有汉朝人加入的問題。“均輸”章无疑是汉武帝太初元年(公元前104年)实行“均輸”法后写成的。又，“周礼”“地官”說到“九数”，第一世紀中郑众注解說，“九数：方田，粟米，差分，少广，商功，均輸，方程，贏不足，旁要，今有重差，鈎股。”可見句股算法原来不屬於东汉初年的“九数”，用“句股”代替“旁要”作为“九章算术”的第九章，大概是第一世紀末年的編制。杜忠“算术”和許商“算术”沒有傳本，它們的成就大概包含在后出的“九章算术”之內。

在“九章算术”成書之前，还有一部討論天文測量的書，叫“周髀”，里边引用繁复的分数乘除、句股定理和开平方法，有

不少数学史料。“周髀”有三国初年赵爽的注，他总结了东汉时期的句股算法，用面积图形证明各个定理。

“九章算术”有魏末晋初刘徽的“注”（约公元263年）。他把“九章”中的各项算法一一说明，并且批判了旧术不正确的地方，补充了新的计算方法，创立了准确的圆周率。他又编写“重差”一章补在“九章算术”的后面。后来这一章单行，称为“海岛算经”。

从三国到唐初四百年中，数学研究有显著的进步。“隋书”“经籍志”著录的数学书有三十余种之多。除了赵爽注的“周髀”、刘徽注的“九章算术”和“海岛算经”外，还有“五曹算经”五卷、“孙子算经”三卷、“张丘建算经”三卷、“五经算术”一卷、“数术记遗”一卷五种，现在有传本。其中“孙子算经”大约是第四世纪中的书，卷下的“物不知数”问题是一个一次同余式问题。“张丘建算经”是第五世纪末元魏朝的书，有等差级数问题和“百鸡”问题。

失传数学书中，有一种是祖冲之（429—500年）的“缀术”五卷。根据“隋书”“律历志”和其他参考资料，我们知道“缀术”的内容是非常丰富的，有比刘徽的更精密的圆周率近似值，有正确的球体体积公式，有三次方程解法等辉煌成就。

第七世纪初，王孝通撰“缉古算术”一卷，现在有传本。他选取的立体积问题和句股问题，都需要列出三次方程，求它的正根来解答。

隋朝和唐朝在国立大学内设置“算学馆”，有“算学博士”和“助教”指导大学生学习数学。唐显庆元年（656年）明文规

定“周髀”、“九章”、“海島”、“五曹”、“孙子”、“夏侯阳”、“張丘建”、“五經算”、“綴术”、“緝古算術”十部算書为“算學”課本，因而这十部書有“算經十書”的名称。

唐朝大学中虽然重視数学，但为“算經十書”所局限，沒有在祖冲之、王孝通的数学基础上作更进一步的发展。在另一方面，唐朝工商业比較发达，劳动人民要求簡化数字計算工作，因而出現了不少的实用算术書。其中有第九世紀初年韓延所編写的一部实用算术。因为他在这部書的开始征引了“夏侯阳算經”的几节，宋朝欧阳修等編訂“新唐書”“艺文志”时（1060年），誤認这本是晉朝流傳下来的“夏侯阳算經”。元丰七年（1084年），秘書省刻“算經十書”时就用这个伪本充数。唐、宋兩朝的实用算术書大都失傳，只有韓延的書借“夏侯阳算經”的名义流傳到現在，可以說是不幸中的大幸了。

約在公元1050年前后，賈宪撰“黃帝九章算法細草”，在“少广”章中介紹“开方作法本源”和“增乘开方法”。此后刘益撰“議古根源”，又推广增乘开方法的应用。这二部書現在都已失傳，靠南宋楊輝“詳解九章算法”（1261年）和“田亩比类乘除捷法”（1275年）所引，我們可以了解这些偉大成就。楊輝的“乘除通变本末”三卷（1274年）中还保存了不少其他宋朝失傳数学書中的各种乘、除捷法。

南宋秦九韶撰“数書九章”十八卷（1247年）。他把唐、宋天文学家的“上元积年”算法发展为“大衍求一术”。在高次方程解法和联立一次方程組解法上也有相当重要的貢獻。

在十三世紀中，中国北方的数学家发明一种新的代数学，

叫“天元術”。从已知的条件列出方程,利用天元术要便利得多。許多不容易对付的数学問題,有了天元术就有办法解决了。因此,十三世紀中国数学的发展获得飞跃的进步。那时的代表著作現在有傳本的有李冶的“測圓海鏡”十二卷(1248年)、“益古衍段”三卷(1259年),朱世杰的“算学启蒙”三卷(1299年)、“四元玉鑑”三卷(1303年)。

十四世紀以后,天元术进入停滯不前的阶段。珠算术渐渐流行起来,到十六世紀中有很多种珠算实用算术書出版,如程大位的“算法統宗”(1592年)里就有关于算盤和它的用法的詳細叙述。而古代算术和元初的天元术,利用算筹演算的方法,很少有人研究。

十六世紀末,意大利天主教耶穌会教士利瑪竇(1552-1610年)到中国傳教,宣揚西洋数学和天文学的优越性,当代知識分子从他学习的很多。徐光启翻譯欧几里得的“几何原本”前六卷(1607年)和李之藻編写的“同文算指”十卷(1613年)是初次介紹西洋数学的兩種重要文献。崇禎二年(1629年)設立西洋新法历局,在局供职的西洋教士邓玉函、罗雅谷、湯若望等編譯关于球面三角法和天文測量的書。波蘭教士穆尼閣在南京介紹对数計算法給薛凤祚,譯成“历学会通”書(1652年)。清康熙帝提倡西洋学术,聘請法国教士多人翻譯西洋数学,編成“御制数理精蘊”四十五卷(1723年)等書。

清初的数学家如梅文鼎(1633-1721年)等大都研究西洋数学有心得,編写了数学各科的人門書。

乾隆、嘉庆兩朝(1736-1820年)学术潮流偏向古典考証学

一路发展, 数学研究轉到古代数学方面去。湮沒四百余年的“算經十書”和宋、元数学名著又陸續从“永乐大典”中和旧家藏書中发掘出来。通过戴震、李潢、焦循、汪莱、李銳、沈欽裴、罗士琳等校勘补注, 中国古代数学又发揚光大起来。

鸦片战争以后, 五口通商, 西洋学术傳入中国的机会更多。李善蘭和英国基督教士偉烈亞力合譯“几何原本”后九卷(1856年)、“代数学”十三卷(1859年)、“代微积拾級”十八卷(1859年)、“曲綫說”三卷(1866年)等書。此后华蘅芳又譯出“代数术”(1873年)、“微积溯源”(1878年)、“三角数理”(1877年)、“决疑数学”(1888年)等書。从1840年到1911年这个时期內, 中国数学家們, 包括李善蘭、华蘅芳在內, 都能会通中西数学, 获得很多的輝煌成就。这些成就主要是在高等数学范圍內, 不預备在这本小書內介紹了。

第七世紀中印度数学曾經傳入中国, 第十三、四世紀中伊斯蘭数学曾經傳入中国, 是中国数学史上的兩件大事。但中国数学的发展很少受到它們的影响。我們可以明确指出来的, 只有朱世杰“算学启蒙”所录的“大数法”有恆河沙、阿僧祇、那由他等單位, “小数法”有沙、塵、埃、渺、……彈指、刹那等單位, 显然是借用佛教經典中印度大小数單位名目; 吳敬“九章比类算法大全”(1450年)有“鋪地錦”乘法, 显然是阿拉伯人士盤算法的一种乘法。十七世紀以后西洋数学的傳入, 情况就大不相同了, 利瑪竇等傳进来的是西洋最新鮮的数学成就, 徐光启等的翻譯工作又十分認真, 所以对于清朝数学的发展影响极大。

中国数学在它的萌芽时期,是适应生产而产生的。后来,数学內在的需要又产生新的概念和新的方法,重复服务于各种生产活动。元朝的“授时历法”(1280年)和“河防通議”(1321年)都引用了发明不久的天元术,是一个典型的例子。

中国古代数学家創造出来的許多偉大成就是有世界意义的。为了要理解这些偉大的成就,我們在以下各节里,提出二十多个專題,分別討論它們的发展历史。

## 二 算籌記數·四則運算

我国古代用竹籌記數，并且运用竹籌来做加、減、乘、除等等的計算工作。“說文解字”竹部中“算”字下說：“算：从竹从具，長六寸，計历數者。”这是說明“算”是一切數字計算所用的竹制的工具。“算”有时叫做“籌”，后来的人叫它“算子”。“漢書”“律历志”說：“其算法用竹，徑三分<sup>⊖</sup>，長六寸。”汉王莽时一尺大約長0.2304公尺或0.6912市尺。算籌長六寸，合4.15市寸，徑三分，合2.07市分。北周甄鸞“數术記遺”說：“積算，今之常算是也。以竹为之。長四寸以效四时，方三分以象三才。”“隋書”“律历志”說：“其算用竹，广二分，長三寸。”北周和隋朝的官尺，一尺長王莽时尺的一尺二寸八分，隋朝的算籌長三寸，約等于現在的2.65市寸，广二分，約等于現在的1.77市分。由此可見从汉到隋計算用的算籌漸漸改得短小，运用起来比較便利了。算籌質料用竹之外，有木制的，也有象牙制的。計算时把籌馬放在几上，后来的数学家用一个特别的和圍棋盤相仿的算盤。算籌不用时有盛貯的算子筒，出外携帶时用算袋。

---

⊖ 現在流傳本的“漢書”都写作“一分”，是錯誤的。

古代算筹記数的制度，在“周髀算經”和“九章算术”里都沒有記錄，我們只能在晋朝或南北朝时期的数学書里知道算筹記数的一般法則。古代的算筹的功用大致和后来的算盤珠相仿。五以下的数目，用几根筹表示几，六、七、八、九四个数目，用一根筹放在上边表示五，余下来每一根筹表示一，表示数目的时候有縱橫两种方式：

|    |   |    |   |    |     |   |    |     |      |
|----|---|----|---|----|-----|---|----|-----|------|
| 縱式 |   |    |   |    |     | ⌒ | ⌒⌒ | ⌒⌒⌒ | ⌒⌒⌒⌒ |
| 橫式 | — | == | ≡ | ≡≡ | ≡≡≡ | ⌒ | ⌒⌒ | ⌒⌒⌒ | ⌒⌒⌒⌒ |
|    | 1 | 2  | 3 | 4  | 5   | 6 | 7  | 8   | 9    |

表示一个多位数，它的各位数目的筹式須要縱橫相間，个位数目用縱式表示，十位数目用橫式表示。百位、万位用縱式，千位、十万位用橫式。例如 6728，用算筹摆下来是  $\lrcorner \lrcorner = |||$ 。数字有空位的时候，如 6708，算筹布置作  $\lrcorner \lrcorner \quad |||$ ，在十位上就空着不放算筹。又如 6020，算筹布置作  $\lrcorner =$ ，百位、个位都空着，不放算筹。因为布置算筹須要縱橫相間，两个数目中間有沒有空位是很容易辨別的。“孙子算經”說：“凡数之法，先識其位。一縱十橫，百立千僵。千、十相望，万、百相当。”“夏侯阳算經”說得更詳尽，“一縱十橫，百立千僵。千、十相望，万、百相当。滿六以上，五在上方。六不积算，五不單張。”都是用歌訣来教导小学生的。

算筹記数是古人在生产过程中自然形成的制度。用极簡單的竹筹，縱橫排列，就可以表示出任何数字。虽然沒有表示空位的符号 0，而能够实行地位制 (principle of local value) 的記数法，为加、減、乘、除的运算建立起良好的条件。我国古



代数学在数字计算方面有优越的成就,应当归功于算筹记数的合理方法。

古代的筹算术经过长时间的发展过程而演变为现在流行的珠算术。这两种算术所用的工具虽然不同,但是都用地位制记数,加、减、乘、除的运算法则是基本上相同的。筹算的加、减法,在古代算书里没有记录。但是在二数相乘时,把部分乘积合并起来就是用加法,在做除法时,把部分乘积逐步减去也就是用减法。由此可知,筹算的加、减法都是从左边到右边逐位相加或减去。同一位的二数相加满十以上,即进入左边一位(左边一位增加一筹)。减法,被减数的某位数目小于减数数目时,向左边一位取用一筹。这些都和珠算术的做法一样。

筹算的乘、除法都要用九九口诀。唐朝以前的乘、除口诀四十五句,从“九九八十一”开始,到“一一如一”终止,次序和后世的口诀恰恰相反。因为口诀开始的两个字是“九九”,所以乘法表就叫做“九九”。又因为一般算术离不了乘、除,乘、除都要熟练“九九”,所以在古代,“九九”又是算术的代用名词。“管子”“轻重戊”篇说:“宓戏作九九之数。”“周髀算经”中赵爽注:“九九者,乘、除之原也。”“夏侯阳算经”说:“乘、除算法,先明九九。”

乘、除法则在“孙子算经”和“夏侯阳算经”(唐人韩延所引)里说得很详备。二数相乘时先用算筹布置一数于上格,一数于下格,没有被乘数和乘数的名义。把下格的数向左边移动,使下数的末位和上数的首位对齐。以上数首位数目乘下数各位,从左边到右边,用算筹布置逐步乘得的数于上下两格