

应用时间序列分析

王炜忻 杜金观 伍尤桂 李元 编著

子出版社

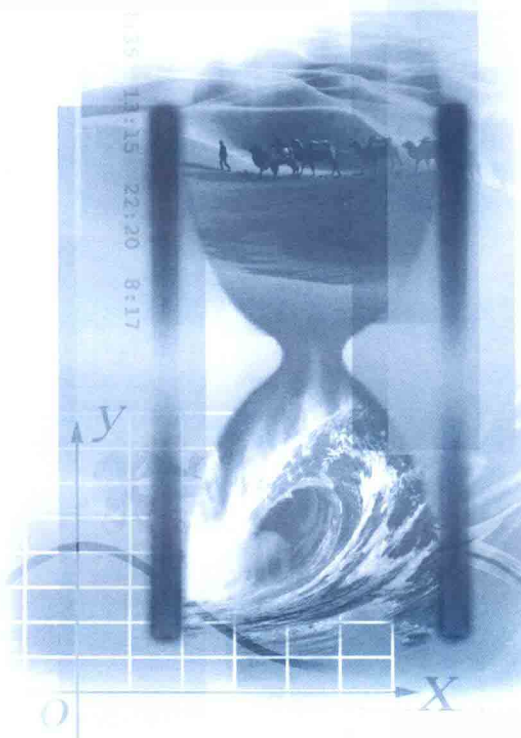
应用统计与信息丛书

YINGYONG SHIJIAN XULIE FENXI

应用时间序列分析



王炜忻 杜金观
伍尤桂 李元
编著



广西师范大学出版社
·桂林·

图书在版编目 (CIP) 数据

应用时间序列分析 / 王炜忻等编著. — 桂林: 广西师范大学出版社, 1999. 9

(应用统计与信息丛书)

ISBN 7-5633-2910-2

I. 应… II. 王… III. 时间序列分析 IV. O211.61

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (1999) 第 42028 号

广西师范大学出版社出版发行

(桂林市中华路 36 号 邮政编码: 541001)
(电子信箱: pressz@public.gdptt.gx.cn)

出版人: 萧启明

全国新华书店经销

广西区计委印刷厂印刷

(广西南宁市民族大道 91 号计划经协大厦 邮政编码: 530022)

开本: 850 mm × 1168 mm 1/32 印张: 9.5 字数: 238 千字

1999 年 9 月第 1 版 1999 年 9 月第 1 次印刷

印数: 0 001 ~ 1 000 定价: 15.00 元

如发现印装质量问题, 影响阅读, 请与印刷厂联系调换。

出 版 说 明

即将到来的 21 世纪是一个信息的时代,掌握信息、了解信息、处理信息是企业、政府、个人必须面对的问题,信息处理中统计方法是十分重要的,因此我们出版这一套《应用统计与信息丛书》,来推动这一方面的发展.

我们聘请了国内统计与信息方面的著名专家,撰写一系列的著作,结合国内实际,介绍国外的动向,发挥自己的专长,就一个个主题作深入浅出的讨论,既能使广大的读者受益,又有相当的学术水平,把我国的应用统计与信息处理推向一个新的高峰.

希望这套丛书的出版能受到读者的欢迎.

广西师范大学出版社

1998 年 8 月

前 言

时间序列分析是数理统计这一数学学科的一个重要分支.但是,作为现代数据处理方法之一的时间序列分析,还是在 20 世纪 20 年代后期才开始出现的.在 60 年代后期,时间序列分析在 Box Jenkins 提出一套比较完善的建模理论及方法之后便迅速发展起来.近 20 年来,计算技术和计算机的发展又赋予时间序列分析以新的活力,使之成为自然科学、社会科学领域中不可缺少的数据分析工具.目前,时间序列分析这个分支已趋于成熟,其理论和方法已被广泛应用到工程技术、气象、水文、地震、生物医学、经济管理以及军事科学等诸多领域.作为未来的数据分析、处理工作者,了解和掌握时间序列分析这一方法是大有好处的,也是很有必要的.

时间序列分析着重研究具有随机性的动态数据,其早期工作是借助了富里埃分析从频率的角度揭示数据的规律性,即所谓的频域方法.近些年来,借助于依时间推移变量之间的相关结构来研究数据变化规律,即时域方法得到了快速发展,其理论和方法日趋成熟,内容极为丰富.因此,本书着重介绍时域分析的基本理论和方法,以实用的典型方法为主,而又不回避必要的理论证明,并且列举大量实例作为方法说明之用是本书恪守的宗旨.这样做的目的,是让初学者在读完本书的大部分章节之后,既能知其所以然,又能采用所介绍的方法独立进行数据处理和分析.

本书共分八章:第一章介绍平稳序列和线性模型的基础理论,作为学习以下各章的理论基础;第二章是确定型时间序列模型,主要介绍各种实用预测模型;第三、四、五章是本书的主干部分,其中包括单变量时间序列的线性模型及其模型识别、参数估计、模型检验和建模方法;第六章为时间序列预报;第七章是基于多值状态的

时间序列分析,主要介绍基于两种状态分析处理动态数据的简便有趣的手段和方法;第八章介绍非线性模型和多维时间序列模型,着重介绍应用最广的非线性模型——门限自回归模型和多维 AR 模型的识别、参数估计和预报。

本书在编写过程中参考和使用了国内学者同行的有关著作和论文,都在参考文献中一一列出,在此一并表示感谢。本书可供高等学校高年级学生、研究生、大学教师及科技工作者参考使用。由于我们水平有限,书中一定存在不少错误和不妥之处,敬请各方面读者予以批评指正。

编 者

1998 年 9 月

目 录

第一章 预备知识	1
§ 1 随机过程	1
§ 1.1 基本概念	1
§ 1.2 随机过程(序列)的概率分布	4
§ 1.3 二阶矩随机序列和参数特征	6
§ 1.4 正态随机序列	7
§ 2 平稳序列	8
§ 2.1 概念及自协方差函数	8
§ 2.2 平稳序列与自协方差函数的谱表示	12
§ 2.3 平稳序列的遍历性	18
§ 2.4 平稳过程的采样	21
§ 3. 线性差分方程	24
§ 4 最小方差估计	28
§ 4.1 最小方差估计准则	28
§ 4.2 条件期望与条件方差	29
§ 4.3 最小方差估计	31
§ 4.4 线性最小方差估计	32
第二章 确定型时间序列模型	37
§ 1 时间序列分析概述	37
§ 2 确定型时间序列分析	38
§ 2.1 趋势变动预测模型	38
§ 2.2 季节变动预测模型	48
第三章 平稳线性模型——ARMA 模型	54
§ 1 噪声序列	54
§ 2 线性过程	56

§ 2.1	线性过程的定义与性质	56
§ 2.2	线性过程的传递形式和逆转形式	58
§ 3	ARMA 模型	60
§ 3.1	ARMA 模型的定义	61
§ 3.2	有理谱密度	65
§ 4	ARMA 模型的等价形式及其特性	67
§ 4.1	模型的传递形式和格林(Green)函数	67
§ 4.2	模型的逆转形式和逆函数	71
§ 5	模型参数的平稳域与可逆域	74
§ 5.1	ARMA 模型平稳域与可逆域	74
§ 5.2	高阶 ARMA 模型平稳可逆域检验	76
§ 6	ARMA 序列的自协方差函数与逆自协方差函数及其特征	79
§ 6.1	线性过程的逆自协方差函数及其性质	79
§ 6.2	ARMA 序列的自协方差函数及其特征	81
§ 6.3	ARMA 序列的逆自协方差函数及其特征	87
§ 7	ARMA 序列的偏相关函数与逆偏相关函数及其特征	89
§ 7.1	偏相关函数的定义与概率意义	90
§ 7.2	偏相关函数的递推算法	91
§ 7.3	AR(p)序列偏相关函数截尾性, MA(q)和 ARMA(p, q) 序列偏相关函数拖尾性	95
§ 7.4	ARMA(p, q)序列的逆偏相关函数及其特征	98
第四章	ARMA 模型的参数估计	102
§ 1	平稳序列参数表征的矩估计	103
§ 1.1	均值估计	103
§ 1.2	自协方差函数 $\{\gamma_k\}$ 和自相关函数 $\{\rho_k\}$ 的估计	104
§ 1.3	偏相关函数估计	107
§ 2	ARMA 模型参数估计	108
§ 2.1	ARMA 模型参数矩估计直接法	109

§ 2.2	ARMA 模型参数矩估计的逆函数法	117
§ 2.3	ARMA 模型参数矩估计的逆自协方差函数法	121
§ 3	ARMA 模型参数的精估计	123
§ 3.1	模型参数的最小二乘估计	123
§ 3.2	模型参数的近似极大似然估计(最小平方和估计)	131
第五章	ARMA 模型定阶、非平稳序列模型及建模实例	138
§ 1	ARMA 模型定阶	138
§ 1.1	相关分析法用于 ARMA 模型定阶	138
§ 1.2	用 F -检验准则确定 ARMA 模型的阶	143
§ 1.3	FPE、AIC、BIC 定阶准则	145
§ 2	非平稳序列的时序模型	153
§ 2.1	ARIMA 模型	155
§ 2.2	乘积模型	159
§ 2.3	趋势分量和季节分量的估计	163
§ 3	动态数据的系统定阶	164
§ 3.1	采用 $ARMA(n, n-1)$ 拟合动态数据的合理性	165
§ 3.2	建模步骤	167
§ 4	建模实例	172
第六章	时间序列的预报	184
§ 1	平稳线性最小均方误差预报	184
§ 1.1	l 步预报和预报误差方差	188
§ 1.2	$ARMA(p, q)$ 序列的平稳线性最小均方误差预报	190
§ 2	一类非平稳序列的线性最小均方误差预报	201
§ 2.1	$ARIMA(p, d, q)$ 序列的预报	202
§ 2.2	季节性乘积模型的预报	203
§ 2.3	非平稳序列的叠合模型的预报	205
§ 3	ARMA 序列的新息(Innovation)预报	207
§ 3.1	新息定理	207
§ 3.2	新息预报与线性最小均方误差预报的比较	213

第七章 基于多值状态序列的时序分析	219
§ 1 基于均值为水平的 0—1 序列	220
§ 1.1 自相关函数之间关系	220
§ 1.2 0—1 序列的自相关函数 $\{\rho_k^X\}$ 的估计	222
§ 1.3 原序列 $\{X_t\}$ 的 AR 建模	226
§ 2 基于任意水平的 0—1 序列	229
§ 2.1 自相关函数之间的关系	230
§ 2.2 自相关函数的估计	233
§ 3 有限个状态序列分析	235
§ 3.1 自相关函数之间的关系	235
§ 3.2 自相关函数与 p_j, μ, σ^2 的估计	238
§ 3.3 状态序列的预报	242
第八章 非线性模型与多维 AR 模型	245
§ 1 引言	245
§ 2 非线性模型	247
§ 2.1 非线性模型的类型	247
§ 2.2 模型线性性与非线性性的判别	251
§ 2.3 门限自回归模型的定义与特性	255
§ 2.4 门限自回归模型的建模与预报	263
§ 2.5 门限自回归模型的实例	268
§ 3 多维 AR 模型	273
§ 3.1 多维平稳序列	274
§ 3.2 多维 AR 模型	278
参考文献	294

第一章 预备知识

时间序列分析是数理统计的一个分支,它的理论除涉及到概率统计知识外,还大量涉及随机过程与随机序列、平稳遍历性、线性差分方程知识,这三部分内容是本章的预备知识.

§ 1 随机过程

§ 1.1 基本概念

数理统计研究单个随机变量或向量的分布、数字特征等,并运用这些理论和方法解决许多实际问题.但是有大量实际问题,特别是时间序列分析所涉及到的不是一个或有限多个随机变量,解决问题的出发点也不是 n 个随机变量的 N 个独立样本,而是无穷多个随机变量的一次实际观测.例如经济研究中,观测某种物价指数波动,银行储蓄量的波动,气象研究中某地气温的波动,海洋某位置的海浪波的波动,飞机机翼的振动等都涉及到无穷多个随机变量的一段观测样本.

在实际中所获得的观测样本大致可分为两种类型:(1)连续时间进行观测或记录;(2)依一定等间隔离散时间进行观测或记录.由于计算机数据处理的需要,对连续时间进行观测或记录往往要进行离散采样来得到观测或记录,因此,我们需引入随机过程与随机序列的概念.

定义 1.1 设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为概率空间, T 为某一标集,对任

意 $t \in T$, X_t 是该概率空间上的一个随机变量, 当 t 在 T 中跑遍时, 得到一族随机变量 $\{X_t, t \in T\}$, 记为 X_T 或 $\{X_t\}$, 称 X_T 为 T 上随机函数. 通常 T 取为

$$(i) \quad T = (-\infty, \infty), T = [0, \infty);$$

$$(ii) \quad T = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}, T = \{1, 2, \dots\}.$$

随机函数 X_T 中的 T 取 (i) 的情形, 称 X_T 为随机过程; T 取 (ii) 的情形, 称 X_T 为随机序列. 后者有时简记为 $\{X_k\}$, 通常随机序列是从随机过程按某采样间隔 Δ 得到, 所以 (ii) 中的 T 实际上是 $T = \{0, \pm \Delta, \pm 2\Delta, \dots\}$. 采样间隔 Δ 的取法通常有两种: 一是按实际问题需要而定, 比如, 研究旬降雨量, 可以每 10 天取一个累积量, 研究电力负荷由于按天周期变化, 可以按小时取一个累积量; 二是按随机过程采样定理的原则来确定 Δ , 如果 Δ 取得太大, 自然会有一部分信息在采样过程中丢失, 若 Δ 取得太小, 会造成加大了计算机存储和运算工作量. 随机过程采样定理在后面给出.

从概率统计知, 如果 X 表示某试验结果的随机变量, 那么每做一次试验, 就能获得 X 的一个取值 x , 即固定 $\omega \in \Omega, X(\omega) = x$, 称 x 为 X 的一个样本值. 对于随机函数 X_T 而言, 它的一个样本函数 x_T 是 T 上的函数. 在 (i) 的情形下, 它就是一条曲线或称轨道, 在很多实际情形中, 可由自动记录仪记录下来, 有时称这种函数为随机过程 X_T 的一个实现. 例如, 信息传输中接收机的噪声电压或电流就是随时间变化的随机变量, 即随机过程 X_T . 当我们对接收机的输出电压或电流作一次观测时, 得到图 1-1 的起伏波形, $\{x_i^{(1)}\} (x_i^{(1)} = x_i(\omega_1))$. 实际上, 在观测中出现的噪声电压或电流的具体波形也可能是另外的样子, 如 $\{x_i^{(2)}\} (x_i^{(2)} = x_i(\omega_2)), \{x_i^{(3)}\} (x_i^{(3)} = x_i(\omega_3))$ 等等. 所有这些波形以一定概率出现的 $\{x_i^{(1)}\}, \{x_i^{(2)}\}, \{x_i^{(3)}\}, \dots$ 的集合就构成了随机过程 X_T , 而 $\{x_i^{(1)}\}, \{x_i^{(2)}\}, \dots$ 都是该随机过程的样本函数或实现. 它们都是确定的时间函数.

由图 1.1 可以看出, 当 $t \in T$ 固定在某一时刻 t_1 时, 各个实现

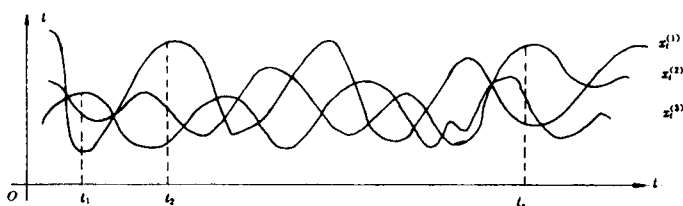


图 1.1 随机过程 X_T 的实现

的取值 $x_{t_1}^{(1)}, x_{t_1}^{(2)}, x_{t_1}^{(3)}, \dots$ 的大小是各不相同的值, 当然取值并不能一一列出. 这时随机过程 X_T 在 $t=t_1$ 时的随机变量为 X_{t_1} . 当 t 取遍 T , 就得一族随机变量 $\{X_t, t \in T\}$, 即为随机过程 X_T . X_T 大多指实随机过程. 为了方便, 以后也要讨论复随机过程, 即 X_T 中, $t \in T, X_t = \xi_t + i\eta_t$, 而 ξ_t, η_t 是实随机变量, 即 $X_T = \xi_T + i\eta_T$, ξ_T 和 η_T 为实值随机过程. 没有特别声明, 今后讨论的随机过程一般为实的.

对于随机序列 $\{X_k\}$ 而言, 其一次观测结果是一普通实数列 $\{x_k\}$, 称 $\{x_k\}$ 为随机序列的一个实现或样本. 在实际问题中, 因为随时间 t 的流逝不能重复, 所以我们往往仅能获得随机序列 (或过程) 的一个实现. 而长度为 N 的动态数据 $x_1, x_2, \dots, x_N$ 是指随机序列 $\{X_k\}$ 的 N 个观测值, 今后称 $x_1, x_2, \dots, x_N$ 为随机序列 $\{X_k\}$ 的长度为 N 的样本值. 而 $X_1, X_2, \dots, X_N$ 是泛指随机序列 $\{X_k\}$ 的 N 个观测. 称 $X_1, X_2, \dots, X_N$ 为随机序列 $\{X_k\}$ 的长度为 N 的样本. 今后大写 X_k 与小写 x_k 不加区别, 读者根据上下文会自明.

另外, 随机序列 $\{X_k\}$ 的正整数变量 k 通常表示时间, 比如, k 表示第 k 小时, 第 k 天, 第 k 年等等. 但也可表示其他含义, 比如, 在生物学上 k 表示第 k 代, 地质学上 k 表示第 k 层等. 但大量问题与时间有关, 故 k 通常表示时间, 常称 $\{X_k\}$ 为时间序列.

§ 1.2 随机过程(序列)的概率分布

一元随机变量 X 的统计特性完全由它的分布函数 $F(x)$ $=P(X\leq x)$ 或分布密度 $p(x)$ 所确定. 同样 n 元随机向量 $X=(X_1,\cdots,X_n)^T$ 的统计特性完全由它的联合分布函数 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P(X_1\leq x_1,X_2\leq x_2,\cdots,X_n\leq x_n)$ 或联合分布密度 $p(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 所确定, 其中 τ 表示转置. 对于随机过程 $\{X_t,t\in T\}$ (序列)而言, 由于它是不可列(可列)个随机变量族构成的, 因此, 对于任意 $t_1\in T$, X_{t_1} 由分布函数 $F_{t_1}(x)$ 来描述. 对于任意 $t_1,t_2\in T$, $(X_{t_1},X_{t_2})^T$ 由联合分布函数 $F_{t_1,t_2}(x_1,x_2)$ 来描述, 对于任意正整数 n 和任意 $t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$, $(X_{t_1},X_{t_2},\cdots,X_{t_n})^T$ 由联合分布函数 $F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 来描述. 这样得到的任意正整数 n 相应的 n 元联合分布函数族

$$\{F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n), \forall \text{ 正整数 } n, \forall t_1,\cdots,t_n\in T\} \quad (1.1.1)$$

称为随机过程(序列) X_T 的有限维分布函数族.

由概率论知识不难验证, 有限维分布函数具有如下两条重要性质:

(1) 对 $\forall t_1,\cdots,t_n\in T$, $(t_1,\cdots,t_n)$ 的任一排列 $(t_{j_1},\cdots,t_{j_n})$ 有

$$F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n)=F_{t_{j_1},\cdots,t_{j_n}}(x_{j_1},\cdots,x_{j_n})$$

(2) 若 $m<n$, 则

$$F_{t_1,\cdots,t_m}(x_1,\cdots,x_m)=F_{t_1,\cdots,t_m,t_{m+1},\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_m,\infty,\cdots,\infty)$$

以上两个条件称为柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov)的相容性条件.

定义 1.2 称 n 元实函数 $F(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$, $\lambda_j\in R=(-\infty,+\infty)$, $j=1,2,\cdots,n$ 为广义 n 维分布函数, 若它具有下列性质:

(i) 关于每个 λ_j , $F(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ 是非降左连续函数;

(ii) $\lim_{\lambda_j\rightarrow-\infty} F(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=0, j=1,2,\cdots,n,$

$$\lim_{\substack{\lambda_j \rightarrow \infty \\ 1 \leq j \leq n}} F(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 1;$$

(iii) 若 $\lambda_j \leq \mu_j, j=1, 2, \dots, n$, 则

$$\begin{aligned} F(\mu_1, \dots, \mu_n) &= \sum_{j=1}^n F(\mu_1, \dots, \mu_{j-1}, \lambda_j, \mu_{j+1}, \dots, \mu_n) + \\ &\sum_{\substack{j,k=1 \\ j < k}}^n F(\mu_1, \dots, \mu_{j-1}, \lambda_j, \mu_{j+1}, \dots, \mu_{k-1}, \lambda_k, \mu_{k+1}, \dots, \mu_n) - \\ &\dots + (-1)^n F(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \geq 0 \end{aligned}$$

若对 $\forall n, t_1, \dots, t_n \in T, F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)$ 为广义分布函数, 则称 $\{F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n), \forall \text{ 正整数 } n, \forall t_1, \dots, t_n \in T\}$ 为广义有限维分布函数族.

注 有限维分布函数族是指存在一个随机过程的基础上生成有限分布函数族, 而广义有限维分布函数族是该族的成员都是相应维数的广义分布函数.

定理 1.1 设给定足标集 T 以及满足柯氏相容性条件的有限维广义分布函数族

$$F = \{F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n), \forall \text{ 正整数 } n, \forall t_1, \dots, t_n \in T\},$$

则必存在一个概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的随机过程 X_T , 使得它的有限维分布函数族与已给广义有限维分布函数族相同.

此定理称为随机过程存在性定理. 该定理在理论上具有重要意义, 它肯定了对给定的有限维广义分布函数族 F , 必存在随机过程以 F 为有限维分布函数族. 但应注意其概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 和 X_T 的构造并不唯一. 定理的证明可参看参考文献[3].

定义 1.3 如果随机过程(序列) X_T 对任意有限维分布满足: $\forall \text{ 正整数 } n, \forall t_1, \dots, t_n$, 有

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^n F_{t_j}(x_j) \quad (1.1.2)$$

那么称 X_T 为独立随机过程(序列).

实际应用中,常见的电路中热噪声往往近似于独立随机过程(序列)。

虽然有限维分布函数族完全刻画了随机过程(序列)的统计特性,但在实际问题中,要确定有限维分布函数族往往是十分困难的。因此,我们引入随机过程的某些基本参数特征,如均值函数、自协方差函数和自相关函数等。今后主要讨论随机序列的有关结果,随机过程的相应并行结果不再叙述。

§ 1.3 二阶矩随机序列和参数特征

定义 1.4 设 $\{X_t\}$ 为随机序列,若 $\forall t \in T$, 二阶原点矩 $E|X_t|^2 < \infty$, 则称 $\{X_t\}$ 为二阶矩随机序列。

对二阶矩随机序列可定义它的均值函数、自协方差函数和自相关函数等。

一、均值函数

设 $\{X_t\}$ 为二阶矩随机序列, $\mu_t = EX_t$, 称 $\{\mu_t, t \in \mathbf{Z}\}$ 为 $\{X_t\}$ 的均值函数,其中 $\mathbf{Z}$ 为整数集合。

为了分析 $\{X_t\}$ 在不同时刻随机变量之间的统计关系,需要对任意不同的 $t, s \in \mathbf{Z}$, 考察 X_t 与 X_s 之间的相关关系,故引入自协方差函数。

二、自协方差函数

设 $\{x_t\}$ 为二阶矩随机序列, $\forall t, s \in \mathbf{Z}$,

$$\gamma_{t,s} \triangleq E(X_t - \mu_t)(X_s - \mu_s) \quad (1.1.3)$$

称 $\gamma_{t,s}$ 为 $\{X_t\}$ 的自协方差函数,它是二元对称函数,常记为 $\gamma_{t,s} = \text{cov}(X_t, X_s)$ 。当 $t = s$ 时, $\gamma_{t,t} = E(X_t - \mu_t)^2$, 称 $\gamma_{t,t}$ 为 $\{X_t\}$ 的方差函数,记为 $\gamma_{t,t} = \text{var } X_t$ 。

三、自相关函数

设 $\gamma_{t,s}$ 是二阶矩随机序列 $\{X_t\}$ 的自协方差函数,令

$$\rho_{t,s} = \frac{\gamma_{t,s}}{\sqrt{\gamma_{t,t}\gamma_{s,s}}} = \frac{\text{cov}(X_t, X_s)}{\sqrt{\text{var } X_t \text{ var } X_s}} \quad (1.1.4)$$

称 $\rho_{t,s}$ 为 $\{X_t\}$ 的自相关函数. $\rho_{t,s}$ 无量纲, 它也是二元对称函数, 它与 $\gamma_{t,s}$ 一样也刻画了 $\{X_t\}$ 在不同时刻的相关程度.

若二阶矩随机序列 $\{X_t\}$ 满足对任意 $t, s \in \mathbf{Z}, t \neq s$, 有 $\gamma_{t,s} = 0$, 则称 $\{X_t\}$ 为不相关. 若进一步有 $\mu_t = 0$, 则称 $\{X_t\}$ 为正交随机序列.

对于任意 $t, s \in \mathbf{Z}$, 由希瓦兹不等式, 显然有: $|\rho_{t,s}| \leq 1$ 且 $|\rho_{t,s}| = 1$ 的充要条件是 X_t 与 X_s 以概率为 1 线性相关, 即 $P(X_t = aX_s + b) = 1$, 其中 a, b 为常数且 $a \neq 0$.

显然, $\mu_t, \gamma_{t,s}, \rho_{t,s}$ 可以由 $\{X_t\}$ 的一维和二维分布函数族唯一确定. 但是由于它们不能确定 $\{X_t\}$ 的有限维分布函数族, 因此仅仅研究均值函数和自协方差函数或自相关函数不能代替对整个随机序列的研究. 然而, 值得一提的是, 对于正态随机序列而言, 有限维分布函数族可以完全由 μ_t 和 $\rho_{t,s}$ 所确定.

§ 1.4 正态随机序列

定义 1.5 设 $\{X_t\}$ 为二阶矩随机序列, 若对任意正整数 n , $t_1, \dots, t_n \in \mathbf{Z}, (X_{t_1}, \dots, X_{t_n})^T$ 的特征函数 $f(\mu)$ 具有如下形式:

$$f(\mu) = e^{i\mu^T \mu - \frac{1}{2} \mu^T \Gamma \mu} \quad (1.1.5)$$

其中 $\mu = (\mu_{t_1}, \mu_{t_2}, \dots, \mu_{t_n})^T$, Γ 为对称非负定阵, 则称 $\{X_t\}$ 为正态随机序列.

注 若 $\Gamma > 0$ (正定阵), 则 (1.1.5) 显然可直接写出所对应的 n 维正态分布密度函数

$$p(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n |\Gamma|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2} (x - \mu)^T \Gamma^{-1} (x - \mu)} \quad (1.1.6)$$

其中 $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, $\mu = (\mu_{t_1}, \dots, \mu_{t_n})^T$, $\mu_{t_j} = EX_{t_j}$, $j = 1, \dots, n$, $\Gamma = (\gamma_{t_k, t_j})_{1 \leq k, j \leq n}$, $\gamma_{t_k, t_j} = E(X_{t_k} - \mu_{t_k})(X_{t_j} - \mu_{t_j})$, $k, j = 1, \dots, n$. 如果 $\Gamma \geq 0$ (非负定阵), 即矩阵 Γ 可能退化, 此时虽然写不出 $(X_{t_1}, \dots,$