天津市科协自然科学学术
专著基金资助出版

实半单李代数

严志达 著

南开大学出版社

实半单李代数

严志达　著

南开大学出版社出版
（天津八里台南开大学校内）
邮编 300071　电话 23508542
新华书店天津发行所发行
河北省永清县第一胶印厂印刷

1998 年 10 月第 1 版　1998 年 10 月第 1 次印刷
开本：850×1168　1/32　印张：8.875
字数：220 千　印数：1—1000

ISBN 7-310-01092-2
O・106　定价：25.00 元

前　言

李群和李代数的理论起始于上世纪末，已有比较久远的历史. 在其建立的开始，就表现出在理论和应用上的重要价值. 尤其在本世纪 20 年代， E. Cartan 的 Riemann 对称空间理论出现后，指出了李群理论，特别是半单李群和微分几何学的一个极重要的内在关系. E. Cartan 的这个工作在近代数学中可以说有着很大的影响，引起各种推广和应用. Riemann 对称空间的研究在一定意义上，归结为半单李群的研究，而半单李群的研究又归结为实半单李代数的研究. 作者 1963 年应中国科学院数学研究所的邀请，系统地讲述了本人在实半单李代数方面的工作.

本书的材料最初是作者 1963 年在中国科学院数学所所作的报告. 1978 年江家福同志在执掌广西民族学院时，将他保存的讲义整理、重新油印，并附加了作者关于非紧局部对称空间的两篇文章 (附录 I, II)，其中附录 II 的内容是从未发表过的. 重印讲义才使这方面的一些工作在“文革”中未尽散失. 1979 年孟道骥同志又在南开大学数学系的李群李代数的讨论班报告了这本讲义，并作了许多补充. 此讲义的部分内容收入了作者与许以超所著《Lie 群及其 Lie 代数 》一书中，但由于篇幅所

限，未能将所有内容收入该书.

虽然几十年过去了，但是仍有不少同志认为作者在这方面的工作是很有价值的，对他们的工作是有助益的，希望作者出版一本这方面的书. 为满足同志们的希望，今天我们将广西民族学院的油印本整理、补充，修订出版. 我们相信它有一定的参考价值和纪念价值. 这次添加了附录 Ⅲ，多少反映这些理论及在几何应用上的某些进展. 附录 Ⅲ 的内容是侯自新同志建议，梁科同志执笔的.

我们感谢邓少强、白承铭、胡乃红、朱林生、靳全勤等同志为本书的整理付出了辛勤的劳动. 同样我们感谢本书的责任编辑裴志明同志及南开大学出版社的有关同志. 最后感谢国家自然科学基金委员会 (19671045 号项目)、国家教委博士点基金 (97005511 号项目)、天津市教委和天津市科协自然科学学术专著基金的慷慨资助.

严志达

1997 年 10 月于南开大学

目 录

第一章　基本概念

1.1　复李代数的实形式 实李代数的复化

1.1.1　实向量空间的容许复结构

定义 1　设 V 是实数域 $\mathbf{R}$ 上的向量空间. 如果存在一个线性变换 J 使得

$$J^2 = -I, \tag{1.1.1}$$

这里 I 是恒等对应, 则称 J 为 V 的一个 **容许复结构**.

命题 1　设 $\mathbf{C}$ 是复数域, 实向量空间 V 容许一个复结构 J. 对任何 $x \in V$, $\lambda + i\mu \in \mathbf{C}$ ($\lambda,\ \mu \in \mathbf{R}$, $i = \sqrt{-1}$) 可定义数乘:

$$(\lambda + i\mu)x = \lambda x + \mu Jx. \tag{1.1.2}$$

对此数乘与原来的加法构成 $\mathbf{C}$ 上的向量空间, 记为 $\overline{V}$.

证　事实上, 只要验证两个分配律与数乘的结合律:

$$\begin{aligned}(\lambda + i\mu)(x+y) &= \lambda(x+y) + \mu J(x+y)\\ &= (\lambda x + \mu Jx) + (\lambda y + \mu Jy)\\ &= (\lambda + i\mu)x + (\lambda + i\mu)y;\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
((\lambda_1+i\mu_1)+(\lambda_2+i\mu_2))x &= (\lambda_1+\lambda_2)x+(\mu_1+\mu_2)Jx \\
&= (\lambda_1+i\mu_1)x+(\lambda_2+i\mu_2)x;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&((\lambda_1+i\mu_1)(\lambda_2+i\mu_2))x \\
&= (\lambda_1\lambda_2-\mu_1\mu_2)x+(\lambda_1\mu_2+\lambda_2\mu_1)Jx \\
&= \lambda_1(\lambda_2x+\mu_2Jx)+\mu_1J(\lambda_2x+\mu_2Jx) \\
&= (\lambda_1+i\mu_1)((\lambda_2+i\mu_2)x),
\end{aligned}
$$

$\forall x,\ y\in\overline{V},\ \lambda,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \mu,\ \mu_1,\ \mu_2\in\mathbf{R}$. □

命题 2 J 是实空间 V 的一个容许复结构, $\overline{V}$ 是相应的复空间. 若 $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ 是 $\overline{V}$ 的一组基, 则 $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ Jx_1,\ Jx_2,\ \ldots,\ Jx_n$ 是 V 的一组基. 因而

$$\dim\overline{V}=\frac{1}{2}\dim V. \tag{1.1.3}$$

证 因 $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ 是 $\overline{V}$ 的基, 故对任何 $\alpha_k\in\mathbf{C}$, $k=1,2,\ldots,n$, $\alpha_k=\lambda_k+i\mu_k$, $\lambda_k,\ \mu_k\in\mathbf{R}$ 有

$$
\begin{aligned}
\sum_k\alpha_kx_k=0 &\iff \alpha_k=0 \\
&\iff \lambda_k=\mu_k=0,\quad 1\le k\le n.
\end{aligned}
$$

而 $\sum\limits_k\alpha_kx_k=\sum\limits_k(\lambda_k+i\mu_k)x_k=\sum\limits_k(\lambda_kx_k+\mu_kJx_k)$. 故有

$$\sum_k\lambda_kx_k+\mu_kJx_k=0\iff\lambda_k=\mu_k=0,\quad 1\le k\le n.$$

故 $x_1,x_2,\cdots,x_n,Jx_1,Jx_2,\cdots,Jx_n$ 线性无关.

又 $\forall y\in V$, 亦有 $y\in\overline{V}$, 故有

$$y=\sum\alpha_kx_k=\sum(\lambda_kx_k+\mu_kJx_k),$$

因而 x_1, x_2, …, x_n, Jx_1, Jx_2, …, Jx_n 生成 V, 即 x_1, x_2, …, x_n, Jx_1, Jx_2, …, Jx_n 是 V 的基. 于是 (1.1.3) 成立. □

定义 2 设 E 为复向量空间, 自然 E 亦可作为实向量空间, 记为 E^R. 显然 $Jx = ix$ 是 E^R 的容许复结构, 而且 $\overline{E^R} = E$. 此时称 J 为 **正则复结构**.

若 e_1, e_2, …, e_n 为 E 的基, 则 e_1, e_2, …, e_n, ie_1, ie_2, …, ie_n 为 E^R 的基.

命题 3 J 为实空间 V 的容许复结构, $\overline{V}$ 是相应的复空间. $\overline{V}$ 的一个线性变换 A 自然是 V 的线性变换. 而且若 A 关于 $\overline{V}$ 的基 x_1, x_2, …, x_n 的矩阵是 $A_1 + iA_2$ (A_1, A_2 是实矩阵), 则 A 作为 V 的线性变换关于基 x_1, x_2, …, x_n, Jx_1, Jx_2, …, Jx_n 的矩阵是

$$\begin{pmatrix} A_1 & -A_2 \\ A_2 & A_1 \end{pmatrix}.$$

证 事实上, 设 $A_1 = (a^1_{k\,l})$, $A_2 = (a^2_{k\,l})$, 则

$$\begin{aligned} Ax_k &= \sum_l (a^1_{l\,k} + ia^2_{l\,k})x_l \\ &= \sum_l a^1_{l\,k}x_l + \sum_l a^2_{l\,k}Jx_l, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AJx_k &= i(Ax_k) = \sum (ia^1_{l\,k} - a^2_{l\,k})x_l \\ &= \sum_l (-a^2_{l\,k})x_l + \sum a^1_{l\,k}Jx_l. \end{aligned}$$

□

反过来, V 的线性变换 ρ 不一定是 $\overline{V}$ 的线性变换. 但有下面结论.

命题 4 V 的线性变换 ρ 是 $\overline{V}$ 的线性变换当且仅当

$$\rho J = J\rho. \tag{1.1.4}$$

证 事实上，$\forall x,\ y \in \overline{V}$, 即 $x,\ y \in V$, 显然有 $\rho(x+y) = \rho(x) + \rho(y)$. 而

$$\rho((\lambda + i\mu)x) = \rho(\lambda x + \mu Jx) = \lambda\rho(x) + \mu\rho(Jx),$$

$$(\lambda + i\mu)\rho(x) = \lambda\rho(x) + \mu J\rho(x),$$

故 ρ 是 $\overline{V}$ 的线性变换当且仅当 $\rho((\lambda+i\mu)x) = (\lambda+i\mu)\rho(x)$, 当且仅当 (1.1.4) 成立. □

特别，变换 J 亦为 $\overline{V}$ 的线性变换，而且 $J = iI$. 若 $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ 是 $\overline{V}$ 的基，J 作为 V 的线性变换关于基 $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ Jx_1,\ Jx_2,\ \ldots,\ Jx_n$ 的矩阵是

$$\begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix},$$

其中 I_n 为 n 阶单位方阵.

设 V 的线性变换 ρ 关于基 $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ Jx_1,\ Jx_2,\ \ldots,\ Jx_n$ 的矩阵为

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

则 $\rho J = J\rho \iff A = D, B = -C$. 此时 ρ 作为 $\overline{V}$ 的线性变换关于基 $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ 的矩阵是 $A + iC$ $(i = \sqrt{-1})$.

1.1.2 实向量空间的复化

命题 5 设 W 是一个实向量空间，则实线性空间 $W \times W$ (同构于 $W \dot{+} W$) 上的变换

$$J:\ (x,\ y) \to (-y,\ x)$$

是一个复结构.

证 事实上，有

$$\begin{aligned} J((x_1,y_1)+(x_2,y_2)) &= (-y_1-y_2,\ x_1+x_2) \\ &= J(x_1,\ y_1)+J(x_2,\ y_2), \end{aligned}$$

及

$$J(\lambda(x,\ y))=(-\lambda y,\ \lambda x)=\lambda J(x,\ y).$$

故 J 是 $W\times W$ 上的线性变换. 又

$$J^2(x,\ y)=J(-y,\ x)=-(x,\ y).$$

故

$$J^2=-I,$$

因而 J 是 $W\times W$ 上的复结构. □

由此而得到的相应的复空间 $\overline{W\times W}$ 叫做 W 的**复化**，记为 W^C.

W^C 中子集 $\{(x,\ 0)|x\in W\}$ 显然构成一个实向量空间，而且与 W 同构. $(x,\ 0)\to x$ 为同构对应. 今后记 $(x,\ 0)=x$, $\{(x,\ 0)|x\in W\}=W$. 因而我们将 W 嵌入到 W^C 中了.

命题 6 符号如上所述，则有

(1) $\forall z\in W^C$, 都可唯一地表示为 $z=x+iy$, $x,\ y\in W$.

(2) $\forall\lambda+i\mu\in\mathbf{C}$, $x+iy\in W^C$, 有

$$(\lambda+i\mu)(x+iy)=(\lambda x-\mu y)+i(\lambda y+\mu x). \tag{1.1.5}$$

(3) 若 $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ 是 W 的基，则亦为 W^C 的基. 故

$$\dim W^C=\dim W. \tag{1.1.6}$$

证 (1) $z \in W^C$, 即 $z=(x,\ y)$, $x,\ y \in W$. 故有

$$z=(x,\ 0)+(0,\ y)=(x,\ 0)+J(y,\ 0)=x+iy.$$

而且由 $(x_1,\ y_1)=(x_2,\ y_2)$, 有 $x_1=x_2$, $y_1=y_2$, 知表达式唯一.

(2) $\forall \lambda+i\mu \in \mathbf{C}$, $x+iy \in W^C$, 有

$$\begin{aligned}(\lambda+i\mu)(x+iy) &= (\lambda+i\mu)(x,\ y)\\ &= (\lambda x,\ \lambda y)+(-\mu y,\ \mu x)\\ &= (\lambda x-\mu y)+i(\lambda y+\mu x).\end{aligned}$$

(3) $\forall x,\ y \in W$ 有 $x=\sum\limits_s \lambda^s x_s$, $y=\sum\limits_s \mu^s x_s$, 且表示式是唯一的. 故

$$\begin{aligned}x+iy &= \sum_s \lambda^s x_s + i\sum_s \mu^s x_s\\ &= \sum_s (\lambda^s+i\mu^s)x_s,\end{aligned}$$

且表示式亦唯一. 故 $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ 是 W^C 的基. 因而 (1.1.6) 成立. □

所谓将一个实向量空间 W 复化, 实际就是将 W 的基域由 $\mathbf{R}$ 扩充为 $\mathbf{C}$. 由上述命题知:

$$W^C=W+JW=W+\sqrt{-1}W.$$

反之, 任一复向量空间 E, 必为某子集所构成的实线性空间 W 的复化.

事实上, 设 $z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n$ 为 E 的一组基, 令

$$W=\left\{\sum_s \lambda^s z_s \mid \lambda^s \in \mathbf{R}\right\},$$

则 W 是 $\mathbf{R}$ 上的向量空间, 其复化 $W^C(=\overline{W\times W})$ 就是 E.

1.1.3 实李代数的容许复结构

定义 3 $\mathfrak{g}$ 是实李代数，$\mathfrak{g}$ 的线性变换 J 叫做 **容许复结构**，如果 J 满足

(1) J 是实向量空间 $\mathfrak{g}$ 的容许复结构；

(2) $J[x,\ y] = [Jx,\ y]$. $\quad$ (1.1.7)

显然，由 (2) 知 $J[x,\ y] = [x,\ Jy]$.

此时 $\bar{\mathfrak{g}}$ 是复数域 $\mathbf{C}$ 上的李代数.

事实上，只要验证 $[\alpha x,\ \beta y] = \alpha\beta[x,\ y]$, $\forall \alpha,\ \beta \in \mathbf{C}$. 设 $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, $\beta = \beta_1 + i\beta_2$. 于是

$$
\begin{aligned}
& [(\alpha_1 + i\alpha_2)x,\ (\beta_1 + i\beta_2)y] \\
= \ & [\alpha_1 x + \alpha_2 Jx,\ \beta_1 y + \beta_2 Jy] \\
= \ & \alpha_1\beta_1[x,y] + \alpha_2\beta_1[Jx,y] \\
& +\alpha_1\beta_2[x,Jy] + \alpha_2\beta_2[Jx,Jy] \\
= \ & (\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2)[x,y] + (\alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2)J[x,y] \\
= \ & [(\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2) + i(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)][x,y] \\
= \ & (\alpha_1 + i\alpha_2)(\beta_1 + i\beta_2)[x,y].
\end{aligned}
$$

复数域 $\mathbf{C}$ 上的李代数 E, 亦可看成实数域 $\mathbf{R}$ 上的李代数，记为 E^R. $J: x \to ix$ 是容许复结构，称为 **正则复结构**. 此时 $\overline{E^R} = E$.

1.1.4 实李代数的复化 复李代数的实形

设 $\mathfrak{g}_0$ 是实李代数. 在实向量空间 $\mathfrak{g}_0$ 的复化

$$\mathfrak{g}_0^C = \{x + iy | x,\ y \in \mathfrak{g}_0\}$$

中定义

$$[x_1+iy_1,\ x_2+iy_2]=[x_1,\ x_2]-[y_1,\ y_2]+i([y_1,\ x_2]+[x_1,\ y_2]). \tag{1.1.8}$$

易知 $\mathfrak{g}_0^C$ 是一个复李代数，而且它在 $\mathfrak{g}_0$ 上与原来的李代数结构一致，称为 $\mathfrak{g}_0$ 的 **复化**.

反之，若 $\mathfrak{g}$ 是复李代数，亦可看成实李代数，以 $\mathfrak{g}^R$ 表示之. 如果存在 $\mathfrak{g}^R$ 的子代数 $\mathfrak{g}_0$ 使得

$$\mathfrak{g}_0^C=\mathfrak{g}, \tag{1.1.9}$$

则称 $\mathfrak{g}_0$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个 **实形式**.

显然 $\mathfrak{g}^R$ 有正则复结构 $J(x)=ix$. 有时为区分 $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^R$ 起见，令 J 表示复结构. $\forall z\in\mathfrak{g}$, $z=x+iy$, $x,\ y\in\mathfrak{g}_0$, $z\in\mathfrak{g}^R$, $z=x+Jy$. 故

$$\mathfrak{g}^R=\mathfrak{g}_0\dot{+}J\mathfrak{g}_0. \tag{1.1.10}$$

1.1.5 实形式与共轭

定义 4 设 $\mathfrak{g}_0$ 是复李代数 $\mathfrak{g}$ 的实形式. 故 $\mathfrak{g}=\{x+iy|x,y\in\mathfrak{g}_0\}$, $\mathfrak{g}$ 中映射 $\sigma: x+iy\to x-iy$ 叫做由 $\mathfrak{g}_0$ 决定的 **共轭**.

引理 1 设 σ 是由复李代数 $\mathfrak{g}$ 的实形 $\mathfrak{g}_0$ 决定的共轭，则

(1) $\sigma^2(x)=x$; (1.1.11)

(2) $\sigma(x+y)=\sigma(x)+\sigma(y)$; (1.1.12)

(3) $\sigma(\alpha x)=\bar{\alpha}\sigma(x)$; (1.1.13)

(4) $\sigma([x,\ y])=[\sigma(x),\ \sigma(y)]$, (1.1.14)

$\forall x,\ y\in\mathfrak{g}$, $\alpha\in\mathbf{C}$. $\bar{\alpha}$ 是 α 的共轭复数.

证 设 $x=x_1+ix_2$, $y=y_1+iy_2$, $\alpha=\alpha_1+i\alpha_2$, 其中 $x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2\in\mathfrak{g}_0$, $\alpha_1,\ \alpha_2\in\mathbf{R}$.

(1) $\sigma^2(x)=\sigma(x_1-ix_2)=x_1+ix_2=x;$

(2) $\sigma(x+y)=x_1+y_1-i(x_2+y_2)=\sigma(x)+\sigma(y);$

(3) $\sigma(\alpha x)=(\alpha_1x_1-\alpha_2x_2)-i(\alpha_2x_1+\alpha_1x_2)=\bar{\alpha}\sigma(x);$

(4) $\sigma([x,\ y])=[x_1,\ y_1]-[x_2,\ y_2]-i[x_1,\ y_2]-i[x_2,\ y_1]$
$=[\sigma(x),\ \sigma(y)].$ □

系 $\mathfrak{g}_0=\{x\in\mathfrak{g}|\sigma(x)=x\}$, $J\mathfrak{g}_0=\{x\in\mathfrak{g}|\sigma(x)=-x\}$.

由此可知 σ 不是 $\mathfrak{g}$ 的自同构，而是 $\mathfrak{g}^R$ 的自同构.

复李代数 $\mathfrak{g}$ 中一个到自身的映射，若满足条件 (1)—(4), 则称为 $\mathfrak{g}$ 的一个 **半对合**.

引理 2 若复李代数 $\mathfrak{g}$ 有一个半对合 σ, 则

$$\mathfrak{g}_0=\{x|\sigma x=x\}$$

是 $\mathfrak{g}$ 的一个实形式，而且由 $\mathfrak{g}_0$ 决定的共轭就是 σ.

证 由于对任何 $x,\ y\in\mathfrak{g}_0$, $\lambda,\ \mu\in\mathbf{R}$, 有 $\sigma(\lambda x+\mu y)=\lambda x+\mu y\in\mathfrak{g}_0$ 及 $\sigma([x,\ y])=[\sigma(x),\ \sigma(y)]=[x,\ y]\in\mathfrak{g}_0$, 因此 $\mathfrak{g}_0$ 是一个实李代数.

其次，证明 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0+i\mathfrak{g}_0$, 且 $\mathfrak{g}_0\cap i\mathfrak{g}_0=\{0\}$. 事实上，$\forall z\in\mathfrak{g}$, 有 $\sigma(\sigma(z)+z)=\sigma(z)+z$, $\sigma(-i(z-\sigma(z)))=-i(z-\sigma(z))$. 故 $\frac{1}{2}(z+\sigma(z))$, $\frac{-i}{2}(z-\sigma(z))\in\mathfrak{g}_0$. 而 $z=\frac{1}{2}(z+\sigma(z))+i(\frac{-i}{2}(z-\sigma(z))$, 即 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0+i\mathfrak{g}_0$. 又 $x\in\mathfrak{g}_0\cap i\mathfrak{g}_0$, 则由 $x\in i\mathfrak{g}_0$, 有 $x_0\in\mathfrak{g}_0$ 使 $x=ix_0$. $x\in\mathfrak{g}_0$, 则 $\sigma(x)=x$. $x_0\in\mathfrak{g}_0$, 则 $\sigma(x)=\sigma(ix_0)=-ix_0=-x$. 故 $x=0$.

由此知 $\mathfrak{g}_0$ 是 $\mathfrak{g}$ 的实形式，显然 $\mathfrak{g}_0$ 决定的共轭恰为 σ. □

1.1.6 $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^R$ 与 $\mathfrak{g}_0$ 的 Killing 型

设 $\mathfrak{g}$ 是实李代数 $\mathfrak{g}_0$ 的复化， $\mathfrak{g}$ 可作为实李代数记为 $\mathfrak{g}^R$. 故 $\overline{\mathfrak{g}^R}=\mathfrak{g}$. $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^R$ 的 Killing 型分别记为 $(x,\ y)_0$, $(x,\ y)$, $(x,\ y)_R$.

引理 3　$\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{g}$ 及 $\mathfrak{g}^R$ 的 Killing 型有下列关系:

$$(x,\ y)_0 = (x,\ y),\quad \forall x,\ y \in \mathfrak{g}_0, \tag{1.1.15}$$

$$(x,\ y)_R = 2Re(x,\ y),\quad \forall x,\ y \in \mathfrak{g}^R. \tag{1.1.16}$$

证　设 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 为 $\mathfrak{g}_0$ 的一组基. 故亦为 $\mathfrak{g}$ 的基, 而 $x_1, x_2, \ldots, x_n, Jx_1, Jx_2, \ldots, Jx_n$ 为 $\mathfrak{g}^R$ 的一组基, 其中 J 为正则复结构.

若 $x, y \in \mathfrak{g}_0$, 则 $\mathrm{ad}\, x \mathrm{ad}\, y(x_k) \in \mathfrak{g}_0$. 因而 $\mathrm{ad}\, x\mathrm{ad}\, y$ 作为 $\mathfrak{g}_0$ 的变换与作为 $\mathfrak{g}$ 的变换, 对基 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 有相同的矩阵. 故有 (1.1.15) 成立.

又 $\forall x,\ y \in \mathfrak{g}^R$, 有

$$(J\mathrm{ad}\, x)y = J[x,\ y] = [x,\ Jy] = (\mathrm{ad}\, x \cdot J)y. \tag{1.1.17}$$

故 $\mathrm{ad}\, x$ 亦是 $\mathfrak{g}$ 的线性映射, 显然与 x 作为 $\mathfrak{g}$ 的元素的伴随表示的像一样. 设 $\mathrm{ad}\, x\mathrm{ad}\, y$ 作为 $\mathfrak{g}$ 的变换对基 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的矩阵为 $B+iC$, B, C 为实矩阵. 则 $\mathrm{ad}\, x\,\mathrm{ad}\, y$ 作为 $\mathfrak{g}^R$ 的变换对基的矩阵为

$$\begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix}.$$

由此立即得 (1.1.16). □

定理 4　$\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^R$ 同时半单或同时非半单.

证　只要说明 $(x,\ y)_0$, $(x,\ y)$, $(x,\ y)_R$ 中之一非退化, 则它们同时是非退化的.

(1)　若 $(x,\ y)_0$ 非退化, 而 $x+iy \in \mathfrak{g}$ 使得

$$(x+iy,\ \mathfrak{g}) = 0,$$

则有 $(x, \mathfrak{g}_0)+i(y, \mathfrak{g}_0)=0$. 又 $x, y\in\mathfrak{g}_0$, $(x, \mathfrak{g}_0)=(x, \mathfrak{g}_0)_0\in\mathbf{R}$, $(y, \mathfrak{g}_0)=(y, \mathfrak{g}_0)_0\in\mathbf{R}$. 故 $(x, \mathfrak{g}_0)_0=(y, \mathfrak{g}_0)_0=0$. 于是 $x+iy=0$. 即 (x, y) 非退化.

(2) 若 (x, y) 非退化，不难证明

$$\operatorname{ad}Jx\operatorname{ad}y=J\operatorname{ad}x\operatorname{ad}y,$$

又 J 对基 $x_1, x_2, \ldots, x_n, Jx_1, Jx_2, \ldots, Jx_n$ 的矩阵是

$$\begin{pmatrix}0 & -I_n\\ I_n & 0\end{pmatrix}.$$

故对 $x, y\in\mathfrak{g}^R$, $\operatorname{ad}Jx\operatorname{ad}y$ 对此基的矩阵是

$$\begin{pmatrix}0 & -I_n\\ I_n & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B & -C\\ C & B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-C & -B\\ B & -C\end{pmatrix}.$$

因而 $(Jx, y)_R=2\mathrm{Re}(ix, y)=-2\mathrm{Im}(x, y)$. 若 $(y, x)_R=0$, $\forall x\in\mathfrak{g}^R$, 则 $(y, x)_R=2\mathrm{Re}(x, y)=0$ 故 $\mathrm{Re}(x, y)=0$. 又 $\mathrm{Im}(x, y)=-\frac{1}{2}(y, Jx)_R=0$, 故 $(x, y)=\mathrm{Re}(x, y)+i\mathrm{Im}(x, y)=0$, $\forall x\in\mathfrak{g}^R$, 从而 $(y, \mathfrak{g}^R)=0$, 即 $(y, \mathfrak{g})=0$, 故 $y=0$. 因而 $(y, x)_R$ 非退化.

(3) 设 $(x, y)_R$ 非退化. 若 $(x, \mathfrak{g}_0)_0=0$, 则有

$$(x, \mathfrak{g}_0)=(x, \mathfrak{g}_0)_0=0.$$

因而 $(x, \mathfrak{g})=0$, 即 $(x, y)=0$, $\forall y\in\mathfrak{g}$. 故 $(x, y)_R=2\mathrm{Re}(x, y)=0$, $\forall y\in\mathfrak{g}^R$. 故 $x=0$. 所以 $(x, y)_0$ 非退化.

因而 $(x, y)_0$, (x, y), $(x, y)_R$ 之一非退化，则它们同时非退化. □

作为练习，读者不妨证明下述两个性质;