现代图论丛书
Modern
Graph Theory

Self-Complementary Graph Theory whih Applications

自补图理论及其应用

■ 许进 著

西安电子科技大学出版社
http:// www.xduph. com

□现代图论丛书

自补图理论及其应用

许　进　著

西安电子科技大学出版社

1999

内 容 简 介

本书是国际上第一部关于自补图理论及其应用的学术专著。全书共分 9 章，系统地研究了自补图的基本性质与基本理论：涉及自补图的基本性质；自补图与有向自补图的计数；自补图的分解与构造技术；自补图中的路与圈；正则与强正则自补图理论；2 重自补图理论；偶自补图理论；自补度序列图理论。在应用方面，探讨了强正则自补图在对角线型的 Ramsey 数问题研究上的应用，还讨论了自补图在图与其补图色多项式研究中的应用。

本书从 ABC 出发，采用循序渐进的写作方法，把读者逐步引入自补图研究的最前沿。在本书的第 1 章给出了图论中一些必要的内容，使得不具有图论知识的读者也可以顺利阅读全书。本书的每一章后均附有尚待解决的公开问题或猜想，供那些有兴趣进一步研究的读者参考。

本书可供数学、计算机科学、电路与系统、智能科学以及有关工程技术人员使用，也可作为大学本科生和研究生学习的教材和参考书。

图书在版编目(CIP)数据

自补图理论及其应用/许进著. —西安：西安电子科技大学出版社，1999.12
(现代图论丛书)
ISBN 7-5606-0801-9

Ⅰ. 自… Ⅱ. 许… Ⅲ. 图论 Ⅳ. O157.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 65769 号

责任编辑 陈宇光 夏大平
出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路 2 号)
电　话 (029)8227828　　邮编 710071
http：//www.xduph.com　　E-mail：xdupfxb@pub.xaonline.com
经　销 新华书店
印　刷 空军工程学院印刷厂
版　次 1999 年 12 月第 1 版　1999 年 12 月第 1 次印刷
开　本 787 毫米×1092 毫米 1/16 印张 16.625
字　数 386 千字
印　数 1～2 000 册
定　价 25.00 元
ISBN 7-5606-0801-9/O·0039

* * * 如有印制问题可调换 * * *
本书封面贴有西安电子科技大学出版社的激光防伪标志，无标志者不得销售。

谨以此书
献给
养育我的
父亲和母亲

作 者 简 介

许进：男，1959年生于陕西乾县。我国第一位理学、工学双博士。现任西安电子科技大学教授、博士生导师；西安电子科技大学校务会委员，中国电子学会图论与系统优化专业学会理事、委员、核心组成员；中国数学学会图论专业委员会理事等职。并任宁夏大学客座教授，清华大学计算机系兼职教授，西安交通大学兼职教授，华中理工大学特聘教授。在“Inter. J. Graph Theory”、“Discrete Mathematics”、“Graphs and Combinatorics”以及《中国科学》等刊物发表学术论文百余篇，出版学术专著3部。研究领域涉及图论、神经网络、进化计算、智能信息处理、管理系统工程等。

序

当我在1984年攻读硕士学位期间，学习由李慰萱教授所译Harary的《图论》一书时，发现其中第二章的习题2.17(“画出有8个顶点的所有4个自补图”)有问题，因为我构造出了具有8个顶点的6个自补图。于是，我通过查阅Read在1963年的文章得知：8个顶点共有10个自补图！并通过一种自补图的分解方法很快把这8个顶点的自补图全部构造出来。由此，我对自补图产生了浓厚的兴趣。1984年至今已经有15年多了，在这15年当中，我几乎每年都完成关于自补图方面的几篇学术论文。正因为对自补图的浓厚兴趣，使得我在自己的硕士学位论文(《论自补度序列图及自补图的构造》)以及我的理学博士学位论文(《图的自补性与色性》)中均对自补图进行了较为深入的研究。本书就是在我的上述两篇学位论文的基础上产生的。

一个图若与它的补图同构，则称这个图为自补图。自补图是有趣而重要的一类图。业已发现，自补图在对角线型的Ramsey数方面的研究、关于图的Shannon容量的研究、图与它的补图的色多项式相互之间关系方面的研究、强完美图(strong perfect graph)猜想以及图的同构测试问题等的研究方面有其重要的应用，因而，越来越多地受到图论学者的关注。

自补图的研究始于本世纪60年代初，它几乎同时由三位著名的图论专家Ringel、Sacha和Read各自独立地进行了研究。随后有许多著名的图论专家展开对自补图的研究，如Rao、Clapham、Mathon等。到目前为止，关于自补图理论及其应用的研究已经取得了丰富的结果，并且有许多优美的结果与独特的方法。基于此因，我们撰写了这本关于自补图理论及其应用的学术专著。在这本书中，我们几乎对关于自补图理论方面的所有重要的结果都给予了较为详细的论述。

本书是国际上第一部关于自补图理论及其应用的学术专著。全书共分9章，系统地研究了自补图的基本性质与基本理论：诸如自补图的度序列特征与实现算法；自补图的直径特征；自补图与有向自补图的计数；自补图的分解与构造技术；自补图中的路与圈，特别是关于自补图的Hamilton性的刻划；正则与强正则自补图的计数与构造；引入2重自补图类，较系统地研究了2重自补图的基本性质与基本理论，并将其应用于有向自补图的研究之中；通过发现自补图的一种分解方法，引入了偶自补图的概念，指出了偶自补图是自补图中一类关键的、核心的生成子图，进而对偶自补图的基本特征与基本性质进行了较为详细的研究；引入一类自补图类更广泛的图——自补度序列图并对其基本特征与基本性质进行了研究。在应用方面，主要有两个方面的内容：一是强正则自补图在对角线型Ramsey数问题研究上的探讨，特别是提出了Ramsey数$R(5,5)=46$的猜想；另一个是自补图在图与其补图色多项式研究中的应用，成功地应用自补图方法解决了Akiyama和Harary在这一领域所提出的猜想。

由于 Laszlolovasz 在 1979 年的突破性的工作(Laszlolovasz. On the Shannon capacity of a graph. IEEE Trans. On IT，1979，25(1)：1－7)，使得关于图的 Shannon 容量的研究陡然“热”了起来。然而，关于图的 Shannon 的研究还是非常困难的。目前仅有极少数的图类可求出 Shannon 容量，对一般图的 Shannon 容量的计算是困难的，甚至对一些极其简单的图也是如此。应用自补图对图的 Shannon 容量的研究是 Laszlolovasz 在 1979 年所给出的。但这仅仅是一个开始，还没有实质性的工作。我们试图应用自补图对图的 Shannon 容量作进一步的研究。目前已经有一些好的进展，但还不够成熟，故在本书中尚未讨论。另外，关于自补图在强完美图猜想以及图的同构测试问题的应用也未列入。这也是我感到很遗憾的不足之处。

本书在完成过程中得到了国内外许多同行的关心与帮助。首先要感谢的是我的硕士导师、西北工业大学的王自果教授，我的博士导师、北京理工大学的王朝瑞教授和新加坡国立大学(National University of Singapore)数学系教授 Koh K. M. 博士。是王自果教授教给我图论，引导我研究自补图理论，是王朝瑞教授使得我的自补图理论的研究更加深入。

1994 年 Koh K. M. 教授邀请我去新加坡国立大学访问讲学，并作了关于《Self-Complementary Graphs：Theory and Application》的学术报告。在访问期间，Koh K. M. 教授就这本书的编写大纲及内容进行了多次磋商(其中包括我 1997～1998 年在新加坡国立大学作计算机系的 Research Fellow 期间)，并给我提供了许多关于自补图方面的资料以及他本人的学术论文，在此表示衷心的感谢。

在本书的写作过程中，还得到了中科院应用数学研究所的王建方研究员、厦门大学数学系的张福基教授、山东大学数学院的刘贵真教授、陕西师范大学数学系的魏暹荪教授、西安石油学院基础部的欧阳克智教授、华东交通大学的周尚超教授的帮助，在此一并表示感谢。

我特别要感谢我的恩师，中科院院士保铮教授给我这几年的关怀和帮助，给我创造的非常良好的学习和工作环境，使得我能潜心写作，使得本书得以问世。

在本书的完成过程中，西安电子科技大学出版社李荣才总编、夏大平先生、陈宇光先生以及刘晓雪小姐、闫卫莉小姐，电子所的段旭红小姐给予了极大的帮助，在此一并表示衷心的感谢。

由于本人学识水平有限，书中不妥之处在所难免，恳请读者给予批评指正。

许　进

1999 年 10 月 12 日

于西安电子科技大学

目　　录

图的基本知识

第 1 章

本章采用循序渐进，逐步引深的方法介绍了图论中的一些基本概念与基本理论。在保证读者能顺利阅读全书最基本内容的基础上，对图论中的某些内容进行了较为深入的讨论。本章末配有大量的习题，供那些不太熟悉图论基础知识的读者进一步巩固图的基本概念与基本理论时使用，有些习题是对本章有关内容的补充。为了激发读者对图论的兴趣，我们在本书每章后都给出了几个尚未解决的问题，其中有些是猜想，有些是尚待解决的图论难题。我们比较详细地给出了有些问题的出处、研究进展以及参考文献，供有兴趣进一步研究的读者参考。本章的安排如下：1.1 节中引入图的定义并给出图的各种不同的类型；1.2 节中引入图的同构的概念；图的度序列是刻画图的一个很重要的不变量，我们在 1.3 节中给予了较为详细的讨论；子图及其各种运算安排在 1.4 节；1.5 节中引入路、圈、连通图以及刻画图的连通性的三个不变量：连通度、坚韧度与核度，还引入了补图与自补图的概念；匹配、独立集、覆盖与 Ramsey 数等概念的介绍安排在 1.6 节；1.7 节中介绍了图的三种矩阵：相邻矩阵、S 相邻矩阵与关联矩阵；1.8 节介绍了群与自同构群的有关知识。

1.1 图的定义与分类

有序对 $G=(V(G),E(G))$ 称为一个**图**，其中 $V(G)$ 是一个非空有限集。$V(G)$ 中的元素称为 G 的**顶点**，$E(G)$ 是 $V(G)$ 中**全体不同元素构成的不同无序对集合**的一个子集，$E(G)$ 中的元素称作 G 的**边**。我们称 $V(G)$ 是图 G 的**顶点集**，$E(G)$ 为 G 的**边集**；在不致混淆的情况下，有时分别用 V 和 E 表示 G 的顶点集和边集。G 的顶点数 $|V(G)|$ 有时也称作 G 的 **阶**，通常用 p 来表示；G 的边的数目 $|E(G)|$ 一般用 q 表示。为方便，我们通常用 uv 来表示边 $\{u,v\}$（其中 u，v 是 $V(G)$ 的元素）。如果 $e=uv\in E(G)$，则说 e **关联** u 和 v，称 u，v 分别是 e 的**端点**，并且称这两个顶点是**相邻的**。在这种情况下，我们亦称 v 是 u（或者 u 是 v）的一个**相邻者**。设 $u\in V(G)$，u 的**邻域**，记作 $N_G(u)$（在不致混淆的情况下记作 $N(u)$），它是 G 中全体相邻于顶点 u 的顶点构成的 $V(G)$ 的一个子集合，即

$$N(u)=\{v;\ uv\in E(G);\ u,v\in V(G)\} \tag{1.1}$$

与 G 的同一个顶点相关联的两条边称为**相邻边**或者简称为**邻边**。

采用**图**这一名称，是因为 G 可以用图形来表示，而这种图形表示方法有助于我们理解图的许多性质。图的每个顶点用平面上的一个点来表示，每条边用线来表示，此线连接着代表该边端点的点。注意，画线时要求每一根线自身不相交，也不通过这样的点：它所代表的顶点不是相应边的端点(显然，这样总是可以做到的)。我们把这种**图形**称为该图的一个**图解**。在本书中，图解与图是同义语。

在图的定义中，如果我们删去“边必须是不同的”的限制，则导致的结果称为**多重图**(如图 1.1 (b) 所示)；连接同一对顶点的两条或者更多条边(但必须有限)被称为**多重边**。如果 M 是一个多重图，则它的**基础图**是用一条边来代替多重边集而顶点集不变的图。

如果我们再在多重图中删去“边必须连接不同顶点”的限制，即允许有**自环**的存在，则由此导出的结果称为**一般图**(或**伪图**)(见图 1.1 (c))。当集中注意于图，而不考虑多重图或一般图时，我们通常使用术语“**简单图**”，以强调我们排斥自环和多重边。

下面的例子有助于对图、多重图以及一般图的深化理解。

例 1.1 设 $V=\{1, 2, 3, 4, \}$，$E=\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}\}$，则 $G=(V, E)$ 是一个简单图。图 1.1 (a) 给出了图 G 的图解。

设 $E'=\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}\}$，则 $G'=(V, E')$ 是一个多重图。G' 的图解如图 1.1 (b) 所示。

设 $E''=\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 3\}, \{2, 2\}, \{2, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 4\}\}$，则 $G''=(V, E'')$ 是一个伪图。G'' 的图解如图 1.1 (c) 所示。

图 1.1(a)所示的图 G 是图 1.1(b)所示多重图 G' 的基础图。

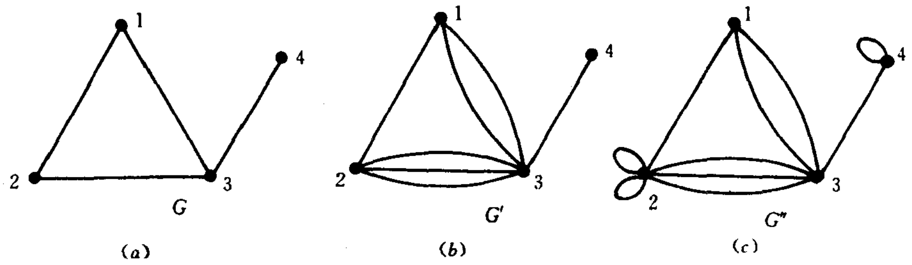

图 1.1 图，多重图和一般图(伪图)

将一个顶点从其余顶点中区分出来的图称作**根图**。我们把这个被区分出来的顶点叫做这个根图的**根点**，或简称为**根**。在图解中经常用一个小正方形标出根(如图 1.2(a)示)。一个阶为 p 的**标定图是一个图**，它的顶点已被分配数字 1，2，…，p，并且没有两个顶点分配相同的数字(**注**：有时也用字母来标定，但要求“没有两相顶点分配相同的字母”(如图 1.2(b)所示)。

在图(或简单图)的定义中，如果我们把“无序”二字改成“有序”二字，便得到所谓**有向图**的概念。更确切地讲，所谓**有向图** D 是一个有序对 $(V(D), A(D))$，其中 $V(D)$ 是一个非空有限集，$V(D)$ 中的元素称为**顶点**，$A(D)$ 是由 $V(D)$ 中的元素组成的一些有序对构成，并且要求：①构成有序对的两个元素不同；②任何两个有序对不同。显然 $A(D)$ 是一个有限集。$A(D)$ 中的元素称为**弧**(见图 1.2(c)示)。

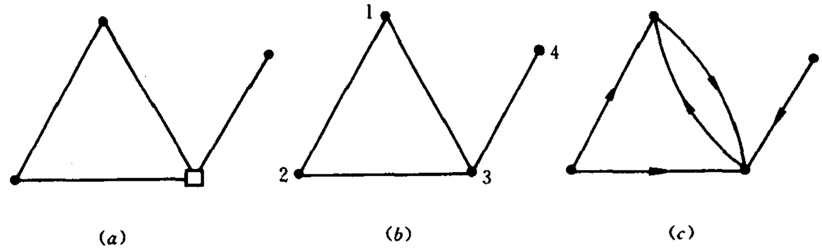

图 1.2 根图，标定图和有向图

在不致混淆的情况下，我们通常将弧 (u, v)（其中 u 和 v 是 D 的顶点）用 uv 表示。如果 $e = uv$ 是 D 的一条弧，则称 u 和 v 是**相邻的**且称 e 是**从 u 关联到 v**；我们也称顶点 u **控制**顶点 v。形如 uv 和 vu 的一对弧称为**对称弧**.

设 D 是一个有向图，它的**逆**仍是一个有向图，记作 D'，D'的顶点集为 $V(D') = V(D)$，弧集为 $A(D') = \{vu;\ uv \in A(D)\}$；有向图 D 的**基础图**是指用无向边来代替 D 中每一条弧而得的图或多重图。

一个**完全对称图**是每两个顶点之间恰用一对对称弧相连接的有向图。**竞赛图**是一个有向图，它的每两相邻顶点之间恰有一条弧连接。图 1.3 分别给出了一个 5 阶的完全对称图和一个 5 阶的竞赛图。竞赛图是一类具有实用价值的很重要的有向图，有兴趣的读者可参见文献[1]、[2]。

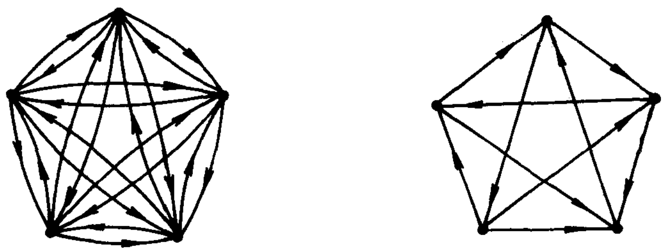

图 1.3 5 阶完全对称图和一个 5 阶竞赛图

1.2 图的同构

按照上节所述图的定义，我们已经知道，一个图的顶点与位置是无关的，图中两个顶点之间的连线与它的长度，曲直或者形状也是无关的，这要考虑的是两个顶点之间是否有线相连，这正是所谓两个顶点之间的拓扑性质。正因为如此，有些表面上似乎完全不同的图，其实却是相同的（如图 1.4 所示的是一对表面上不同但实际上完全相同的图）。于是，我们称这两个图是**同构**的。下面，我们用数学语言对图的同构给出严格的定义。

设 G_1，G_2 是两个简单图，图 G_1 与 G_2 被称为是**同构的**，记作 $G_1 \cong G_2$，如果存在一个从 $V(G_1)$ 到 $V(G_2)$ 之间保持相邻性的 $1-1$ 映射 σ。换言之，在 $V(G_1)$ 到 $V(G_2)$ 之间存在一

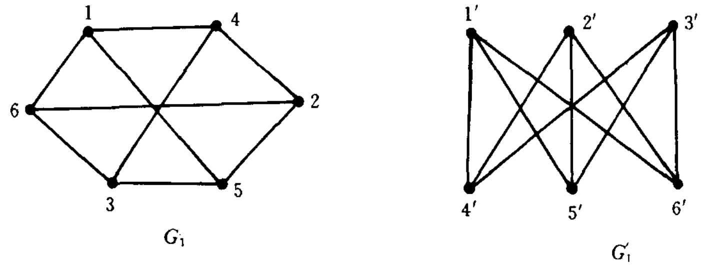

图 1.4　一对典型的同构图

个 $1-1$ 映射 σ，使得对于 $\forall\, u, v \in V(G_1)$，$uv \in E(G_1)$，当且仅当 $\sigma(u)\sigma(v) \in E(G_2)$。

我们把从 $V(G_1)$ 到 $V(G_2)$ 之间保持相邻性的这个 $1-1$ 映射 σ 叫做图 G_1 到图 G_2 之间的一个**同构映射**。

例如，对于图 1.4 所示的 G_1 与 G_1'，$V(G_1)=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，$V(G_1')=\{1', 2', 3', 4', 5', 6'\}$，作映射

$$\sigma(i) = i' \qquad (i = 1, 2, \cdots, 6) \tag{1.2}$$

容易验证，σ 是从 G_1 到 G'_1 的一个同构映射。因此，G_1 与 G'_1 同构。

对于多重图、一般图、有向图，我们也不难给出两个图同构的定义。

判别两个图是否同构具有良好的实际应用背景。最直接的应用就是应用于系统工程中判别两个系统结构是否同构，这在系统建模中具有非常实用的价值。另一个直接的应用是在用计算机构造某种类型的图时，排除同构图。判别两个图是否同构是一个很困难的问题，人们已经证明这个问题属 NP 完全问题[3]。

关于图的同构的各种算法及其应用可在文献[3]中找到。作为本节的结束，下面给出一个很显然的事实。初学者不妨自行证一下。

命题 1.1　若 $G_1 \cong G_2$，则 $|V(G_1)| = |V(G_2)|$，$|E(G_1)| = |E(G_2)|$，但其逆不真。

1.3　图的度与度序列

所谓图 G 的一个**不变量**是指与图 G 有关的一个数或者一个数列(或向量)，它对于任何一个与 G 同构的图有相同的值。图的顶点数 $|V(G)|$ 和边数 $|E(G)|$ 都是图 G 的不变量。所谓**不变量的完全集**是指可以完全决定一个图直到同构的一个不变量组。例如，顶点数 p 和边数 q 对于顶点数 $\leqslant 3$ 的所有图构成了一个不变量完全集。但对顶点数 $\geqslant 4$ 的情况则不然。例如 $p=4$，$q=3$ 时对应的图有如图 1.5 所示的 3 个，故 $\{4, 3\}$ 不是它们的不变量完全集。

本节我们所讨论的图的度序列是刻画图的一个重要的不变量。因而得到许多学者的关注。关于这方面的研究可参见第 4 章文献[5]。在这一节里，我们不可能就这方面的内容给予系统的研究，只就我们所关心的一些最基本的问题给予介绍。

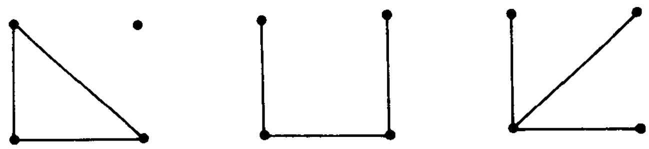

图 1.5 不变量完全集的反例图

设 v 是图 G 的一个顶点，我们把关联顶点 v 的边的数目称为 v 的**度数**，简称为**度**，记作 $d_G(v)$ 。在不致混淆的情况下用 $d(v)$ 表示。即 $d(v)=|N(u)|$ ，图 G 的**最大度**和**最小度**是指图 G 中度数构成的集合中的最大值和最小值，分别用 $\Delta(G)$ 和 $\delta(G)$ 表示(或简单地用 Δ 或 δ 表示)。度数是 0 的顶点称为**孤立点**，度数是 1 的顶点称为**悬挂点**。

一个图 G 的度序列是 G 的顶点度数的集合，一般采用单调递减或单调递增次序，确切地说，设 $V(G)=\{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$, $d_i=d(v_i)$, $i=1, 2, \cdots, p$ ，如果

$$d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_p \tag{1.3}$$

则称 $(d_1, d_2, \cdots, d_p)$ 是图 G 的**度序列**，并记作 $\pi(G)$。有时为方便，采用满足

$$d_1 \leqslant d_2 \leqslant \cdots \leqslant d_p \tag{1.4}$$

的序列 $(d_1, d_2, \cdots, d_p)$ (递增序列)作为图 G 的**度序列**。

如图 1.1(a)所给出的图 G 的度序列为 $\pi(G)=(1, 2, 2, 4)$ 。图 1.1(b)所示图 G' 的度序列为 $\pi(G')=(1, 3, 4, 6)$ 。

对于任一类型(简单，多重或者一般)的无向图 G , $V(G)=\{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$, $p \geqslant 2$，并且它的度序列为 $\pi(G)=(d_1, d_2, \cdots, d_p)$ 。由于图 G 的每一条边对所有度序列之和 $\sum_{i=1}^{p} d_i$ 的贡献值恰好是 2，因此，我们有：

定理 1.2 设图 G 是一个一般图，$V(G)=\{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$, $\pi(G)=(d_1, d_2, \cdots, d_p)$, $|E(G)|=q$ ，则 $\sum_{i=1}^{p} d_i$ 是偶数且

$$\sum_{i=1}^{p} d_i = 2q \tag{1.5}$$

□

前面已经讲过，图的度序列是刻画图的一个重要的不变量。基于后面有关章节的需要，我们计划较系统地讨论这一不变量，为此，我们将按图的类型分别给予讨论。

1.3.1 简单图的度序列

对于简单图 G 而言，下列结论是基本的。

定理 1.3 设 G 为简单图，则：① $0 \leqslant d_i \leqslant p-1$, $i=1, 2, \cdots, p$; ② 在 $d_1, d_2, \cdots, d_p$ 中至少存在两个值相等。

关于①的证明由图的定义易知，关于②的证明由①易证，故略。 □

设 $\pi=(d_1, d_2, \cdots, d_p)$ 是一个非负整数的单调递减(或单调递增)序列，如果存在一个 p 阶简单图 G ，满足 $\pi(G)=\pi$ ，则称 π 是**可图序列的**，或简称 π 是一个**图序列**，并称 G 是 π 的一个**实现**。

在图的度序列研究领域中，下列问题应属主要的研究问题：

第一，图序列的基本特征是什么？即一个非负单调递减整数的序列 $\pi=(d_1, d_2, \cdots, d_p)$ 是图序列的充要条件是什么？

第二，设 $\pi=(d_1, d_2, \cdots, d_p)$ 是一个图序列，试问 π 对应的实现有多少个？这个问题即所谓的计数问题。为方便，我们用 $G(\pi)$ 表示 π 的全体实现构成的集合。

第三，如何把图序列 $\pi=(d_1, d_2, \cdots, d_p)$ 对应的实现全部构造出来。或者把我们感兴趣的某些图构造出来。这个问题即所谓的构造问题。

上述第一个问题，已经得到了很好的解决；第二个问题虽然得到了解决，但还不够理想，有待于进一步研究；第三个问题至今尚未彻底解决，特别是用计算机构造时会出现同构现象。

首先讨论图序列的基本特征。

定理 1.4 设 $\pi=(d_1, d_2, \cdots, d_p)$ 是一个满足 $p-1\geqslant d_1\geqslant d_2\geqslant\cdots\geqslant d_p$ 且 $\sum_{i=1}^{p}d_i$ 为偶数的非负整数序列，则 π 是图序列的充要条件是

$$\pi_1=(d_2-1, d_3-1, \cdots, d_{d_1+1}-1, d_{d_1+2}, \cdots, d_p) \tag{1.6}$$

也是图序列。

证明 先证充分性。若 π_1 是图序列，令 G_1 是它的一个实现。$V(G_1)=\{v_2, v_3, \cdots, v_p\}$ 且 $d_{G_1}(v_2)=d_2-1$，$d_{G_1}(v_3)=d_3-1$，$\cdots$，$d_{G_1}(v_{d_1+1})=d_{d_1+1}-1$，$d_{G_1}(v_{d_1+2})=d_{d_1+2}$，$\cdots$，$d_{G_1}(v_p)=d_p$。于是在 G_1 上增加一个新的顶点，记作 v_1，并令 v_1 与 G_1 中的顶点 v_2，v_3，$\cdots$，v_{d_1+1} 相连边，所得的图记作 G，显然 $\pi(G)=\pi$，故 π 是图序列。

再证必要性。设 $\pi=(d_1, d_2, \cdots, d_p)$ 是一个图序列。令 G 是它的一个实现，并令 $V(G)=\{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$ 且 $d_i=d_G(v_i)$，$i=1, 2, \cdots, p$，$p-1\geqslant d_1\geqslant d_2\geqslant\cdots\geqslant d_p$。如果图 G 的顶点 v_1 与顶点 $v_2, v_3, \cdots, v_{d_1+1}$ 相邻，则 $G-v_1$ 的度序列恰好是 π_1，故 π_1 是图序列。

如果顶点 v_1 在 G 中不是与 $\{v_2, v_3, \cdots, v_{d_1+1}\}$ 中所有的顶点相邻。不失一般性，假设与 v_1 相邻的各个顶点的度数的和最大且假设 v_1 与 v_2 不相邻，但 v_1 与 $v_j\in\{v_{d_1+2}, v_{d_1+3}, \cdots, v_p\}$ 相邻，则有两种情况：

情况 1：$d_2=d_j$，则将 v_j 与 v_2 互换，可认为 v_1 与 v_2 相邻。

情况 2：$d_2>d_j$，则必存在某个顶点 v_k，使得 $v_kv_2\in E(G)$，但 $v_kv_j\notin E(G)$，如图 1.6 所示。现在，我们在图 G 中删去边 v_1v_j 和 v_2v_k，加上边 v_1v_2 和边 v_kv_j，所得的图仍记作 G。

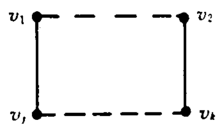

图 1.6 证明定理 1.4 的示意图

在新的图 G 中 v_1 与 v_2 相邻，即与 v_1 相邻的顶点的度数之和比在原图中更大。重复上述步骤，显然经过有限步后，使得所得的图（仍记作 G）满足 v_1 与 v_2，v_3，$\cdots$，v_{d_1+1} 均相邻。从而知 $G-v_1$ 的度序列是 π_1，故 π_1 是图序列。 □

上述定理证明过程实际上给出了构造一个图序列实现的有效算法。下面，我们通过实例说明这种构造性算法的方法和步骤。

例 1.2 非负整数序列 $\pi=(6, 5, 4, 3, 2, 2, 2)$ 是否为图序列？若是，给出一个实现。我们可以通过定理 1.4 方法，给出实现的构造性算法如下：