·工程力学丛书·

现代水力学

(二)分析流动的理论

Modern Hydraulics

(Ⅱ)Theories Analyzing The Flow

夏震寰

高等教育出版社

·工程力学丛书·

现代水力学

(二)分析流动的理论

Modern Hydraulics

(Ⅱ)Theories Analyzing The Flow

夏震寰

高等教育出版社

内容介绍

《现代水力学》是工程力学丛书之一。本书分四册出版：

第一册为控制流动的原理；

第二册为分析流动的理论；

第三册为紊动力学；

第四册为波浪力学。

第二册内容包括：小雷诺数流动——层流运动，涡旋运动，受粘性影响的大雷诺数流动，无粘性流体的势流理论等四章。本册附有有关各章所引用过的文献表，书末附有附录。

本册以雷诺数从小到大为系统，将势流理论放在最后，更好地体现了流动特性变化的物理原因及处理各种流动的方法的所以不同，有助于对流动本质的理解。本书把温度分布问题引入水力学，既可以扩大水力学覆盖面，又能更好地适应生产发展对水力学的要求。在写作方面尽可能地着重说明物理因素的影响及对概念的解释，不强调数学推导的严格性及完整性。

本书内容丰富，系统性强，说理清楚，是作者几十年来教学、科研工作成果的总结，是一本独具风格的水力学著作。本书可供工科大学高年级学生和研究生阅读，也可供广大教师和工程技术科研人员参考。

工程力学丛书

现代水力学

(二)分析流动的理论

夏震寰

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 15.875 字数 400 000

1990年12月第1版 1990年12月第1次印刷

印数 0001—1 025

ISBN 7-04-001627-3/TV·7

定价 6.85 元

(精装本)

高等教育出版社出版的“工程力学丛书”是一套深入、全面、系统地阐述工程力学各分支学科基本理论和反映学科前沿水平的书籍；各书主要作者是当前工程力学界的著名学者。本丛书既是专著，又可作高等学校研究生教学之用，也可供力学教师、研究人员和工程技术人员学习参考。本丛书的出版将有助于促进我国科学技术的发展和工程力学教育水平的提高。

目　录

第二篇　分析流动的理论

第二篇　分析流动的理论

第一篇的内容以阐述控制流体运动的基本原理为主，从流体的物理特性、运动学、动力学及量纲相似等各方面描述了流体在静止或运动中的普遍规律，提出了控制流体运动或静止的基本方程。这些原理适用于各种条件，各种场合的流动。从这篇起，我们的任务是直接或间接地运用这些原理来分析各种特定条件下的流动。

由于流动的种类繁多，情况各异，流动的分析，应先从基本流动入手，便于掌握。在这一篇里，我们将先分析粘性起主要控制作用，即雷诺数很小的流动。然后转到大雷诺数的流动，再进而分析惯性起控制作用，粘性完全可以忽略的无粘性流体的流动。这些内容是现代水力学的基础理论。

6

小雷诺数流动——层流运动

§ 6.1 基本方程及其特性

6.1.1 粘性流动的基本方程

这章所要讨论的流动限于不可压缩流体在小雷诺数时的流动。所谓不可压缩流体并不只限于液体，只要流速低于音速的气流也包括在内。所以这是在自然界中大量出现，各种工业部门所经常遇到的流动。如地下水的流动；润滑剂的流动；油类及高粘性流体的流动；细颗粒在空气中或水中的沉降；悬浮体的粘性以及化工加工过程中的许多细颗粒的流动问题等。在这个问题里，密度可以认为是一个不变的常量，由(3.15)式

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}=0$$

连续方程简化成(3.17)式，即

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

运动方程，即 N-S 方程可简化成(4.20)式，即

$$\rho\frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t}=\rho F_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\nabla^2 u$$

$$\rho\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}t}=\rho F_y-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\nabla^2 v$$

$$\rho\frac{\mathrm{D}w}{\mathrm{D}t}=\rho F_z-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\nabla^2 w$$

上式中的体积力F_x，F_y，F_z一般就是重力，因此可用g_x，g_y，g_z代替，(4.20)式可改写为

$$\rho\frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t}=\rho g_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\nabla^2 u$$

$$\rho\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}t}=\rho g_y-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\nabla^2 v$$

$$\rho\frac{\mathrm{D}w}{\mathrm{D}t}=\rho g_z-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\nabla^2 w$$

如 5.5 节中所分析，如果压强不是边界条件，则可把体积力合并在压强项中，即令修正压强 P 为

$$P=p+\rho g z$$

其中 z 为垂直向上的坐标。但为简单起见，仍用 p 代表修正压强。这时，运动方程进一步简化为

$$\rho\frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\nabla^2 u$$

$$\rho\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}t}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\nabla^2 v \tag{6.1}$$

$$\rho\frac{\mathrm{D}w}{\mathrm{D}t}=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\nabla^2 w$$

因为我们考虑的是不可压缩流体的流动，而且不考虑由于温度在流场各处的不同所引起粘性系数 μ 的变化，即认为 μ 是一个常量。在这种情况下，流场可独立于温度场求解。即可从连续方程和运动方程解出三个速度分量和一个压强。然后再从能量方程求温度场。这样，流动和传热是两个独立问题，可以分开讨论。求解流动的基本方程就是上述的(3.17)式及(6.1)式。如果要考虑温度场对 μ 值的影响，那就需要把流动和传热问题合在一起求解。那末，基本方程里需要包括能量方程。下面的讨论限于前一种情况。

普通的边界条件和起始条件有：

固定边界：边界上的流速分量都应等于零，即

$$u=0,\quad v=0,\quad w=0$$

自由表面：运动方程需用(4.20)式。自由表面的边界条件是

$$p=p_0;\quad \tau=0$$

对非恒定流动，在起始时刻 $t=0$ 时，各处的流速应等于给定值，即

当 $t=0, u=u_0(x,y,z), v=v_0(x,y,z), w=w_0(x,y,z)$

上述的基本方程组是一个二阶非线性偏微分方程。压力项及粘性项都是线性的，而惯性项却是非线性的。这一非线性项的存在使得我们在解方程时遇到很大的困难。在理想流体的 Euler 方程中也存在有非线性的惯性项，但相当一部分理想流体运动是无旋的(理由详见下一小节)，因而有流速势的存在，可以把问题归结为解线性的 Laplace 方程。在有粘性的流体中，其运动都是有旋的，因而不能象理想流体那样来处理。但在特殊情况下，流速势的概念仍可用于粘性流动。顺便说明如下。

当流动的雷诺数很小，全部惯性作用允许忽略，则运动方程(6.1)式简化为：

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial x}&=\mu\nabla^2 u\\ \frac{\partial p}{\partial y}&=\mu\nabla^2 v\\ \frac{\partial p}{\partial z}&=\mu\nabla^2 w\end{aligned}\qquad(6.2)$$

为了说得具体一点，考虑两块平行板之间的流动。设 b 为两板间距，设坐标轴 Ox 和 Oy 位于一块平板上面，而 Oz 与平板垂直。由于间距 b 很小，流速很慢，雷诺数 $\frac{vb}{\nu}$ 很小。在这种情况下，可以得出 $w=0$。因 b 很小，$\frac{\partial u}{\partial z}\gg\frac{\partial u}{\partial x}$ 或 $\frac{\partial u}{\partial y}$；同样，$\frac{\partial v}{\partial z}\gg\frac{\partial v}{\partial x}$ 或 $\frac{\partial v}{\partial y}$。相对于 $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 及 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 可以忽略，$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ 及 $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ 相对于 $\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$ 而言也可以忽略。这样一来，(6.2)式进一步简化为

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\
\frac{\partial p}{\partial y} &= \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\
\frac{\partial p}{\partial z} &= 0
\end{aligned}
\tag{6.3}
$$

将前两式积分，并应用边界条件：当 $z=0$ 及 $z=b$ 时，$u=v=0$，可得

$$
u=-\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}z(b-z)
$$

$$
v=-\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial y}z(b-z)
$$

将这个关系代入这种流动的连续方程

$$
\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0
$$

得

$$
\nabla^2 p=\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}=0 \tag{6.4}
$$

如将 u 及 v 在 0 到 b 取平均，即

$$
\bar{u}=\frac{1}{b}\int_0^b u\,\mathrm{d}z, \qquad \bar{v}=\frac{1}{b}\int_0^b v\,\mathrm{d}z
$$

则可得

$$
\bar{u}(x,y)=-\frac{b^2}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \bar{v}(x,y)=-\frac{b^2}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial y}
$$

如令
$$
\varphi(x,y)=-\frac{pb^2}{12\mu}
$$

则
$$
\bar{u}(x,y)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \bar{v}(x,y)=\frac{\partial\varphi}{\partial y}
$$

所以 φ 就是流速势。显然，φ 是调和函数 p 乘以一个常量，它本身也是调和函数，即

$$\nabla^2\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$$

上面的分析表明，在特定条件下，粘性流动也可有流速势 $\varphi(x,y)$，如理想流动的有势流动一样。但这只是一个特例，不是求解粘性流动的一个通用途径。同时还必须强调指出，在上述情况下，尽管理想流体的有势流动的解可以满足简化的 N-S 方程，但并不能满足粘性流动所要求的边界条件。有势流动在固定边界上只能满足法向流速为零这个条件，不能同时满足切向流速也等于零的无滑动条件。这是因为理想流体的方程组是一阶的，一阶方程组的解只满足边界上的一个条件，不能同时满足两个边界条件。

现在还没有求解非线性偏微分方程的普遍方法，现有的求解途径可分为以下三类：

(1) 准确解 由于问题的性质，非线性惯性项等于零或采取非常简单的形式，此时方程组可以简化，从而可以找出准确解。

(2) 近似解 根据问题的特点，方程式中某些次要项可以忽略，从而可以得近似方程，并可以求出近似方程的解。这种近似方法还可分为两种情况：

(a) 小雷诺数情况，惯性力可以忽略，简化为线性方程。

(b) 大雷诺数情况。此时惯性力较粘性力大得多，粘性作用只限于边界附近的边界层内。边界层以外按有势流动求解，边界附近流动按边界层求解。

(3) 数值求解法 从有了计算机以来，用数值求解粘性流动方程的方法迅速发展，成为最有发展前途的一个求解途径。

本书的内容将限于前两种途径，数值解法的内容已超出本书的范围，将不涉及。

6.1.2 基本方程的特性

从 N-S 方程可以看出粘性流动的具有普遍意义的四个特性：(1) 运动的有旋性，(2) 机械能量的耗损性，(3) 涡量的扩散性，(4) 流动的不稳定性。分别说明如下：

(1) 运动的有旋性

先把粘性流动的运动方程作一些改写。以(6.1)式第一式右边最后一项为例，改写如下：

$$\mu\nabla^2 u=\mu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right]$$

$$=\mu\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]$$

$$=\mu\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]$$

$$=\mu\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]$$

$$=\mu\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial\omega_z}{\partial y}-\frac{\partial\omega_y}{\partial z}\right)\right]$$

其中 ω 为涡量，其定义见(3.57)式。因不可压缩流体中，$\nabla\cdot\boldsymbol{V}=0$，所以

$$\mu\nabla^2 u=-\mu\left(\frac{\partial\omega_z}{\partial y}-\frac{\partial\omega_y}{\partial z}\right)$$

同样，其它二式的相应项可写成：

$$\mu\nabla^2 v=-\mu\left(\frac{\partial\omega_x}{\partial z}-\frac{\partial\omega_z}{\partial x}\right)$$

$$\mu\nabla^2 w=-\mu\left(\frac{\partial\omega_y}{\partial x}-\frac{\partial\omega_x}{\partial y}\right)$$