泛函数分析概要

Л. А. 刘斯铁尔尼克
В. И. 索伯列夫 著

科学出版社

泛函數分析概要

Л. А. 劉斯鐵爾尼克
В. И. 索伯列夫 著
楊從仁 譯

科学出版社
1964

Л. А. ЛЮСТЕРНИК и В. И. СОБОЛЕВ

ЭЛЕМЕНТЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Гостехиздат 1951

內容提要

本書是 В. И. 索伯列夫根據 Л. А. 劉斯鐵爾尼克在“數學科學的進展”上所發表的關於汎函數分析的綜合報告而改寫成的課本，並在伏龍涅什國立大學講授了多次。

根據 М. А. 奈瑪克在 1952 年“數學科學的進展”(VII)中所寫的書評，認為本書是一本很好的汎函數分析教程．它用了較小的篇幅而包含了較多的材料，在很多被討論的問題上包括了這科的近代成就．除去引用了很多例子外，還講述了汎函數分析對微分方程式論、積分方程式論、殆週期函數論、變分學以及近似計算法等的應用．因為這個關係，本書可以適用於廣大的讀者．對於數學系高年級學生及畢業生是一本有價值的教本．同時對從事汎函數分析專業的人也是有用的．

泛函数分析概要

翻譯者 楊从仁

出版者 科学出版社
北京朝阳門大街 117 号
北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号

印刷者 中國科学院印刷厂

总經售 新华书店

1955 年 8 月第一版 书号：0248 字数：261,000
1964 年 2 月第三次印刷 开本：850×1168 1/32
(京) 2,889—6,888 印张：12 7/8

定价：(7) 2.10 元

序　言

在近十年內，汎[1]函數分析的方法——特別是由於蘇聯數學家的工作——已廣泛的應用到理論數學和應用數學的各個不同部門。汎函數分析的基本知識已成爲大學的數學教育的一個必要元素。我國在汎函數分析方面的第一本參考著作是 Л. А. 劉斯鐵爾尼克發表在"數學科學的進展"這一雜誌第一期上的一篇概括性的論文。這篇論文對發表在"進展"的很多期裏的論文的廣大園地是一個介紹，因此它沒有要求論述的完全性，甚至於對包括在它範圍之內的汎函數分析的分枝也是如此。在這篇論文的基礎上，В. И. 索伯列夫寫成了這本汎函數分析教程，且多次在伏龍涅什國立大學講授它。

這個教程的講稿包含了許多在上述論文中沒有說明的問題。例如：壓縮映像原理，線性汎函數的一般形，具有基底的空間以及此種空間內的全連續運算子的理論，有界自共軛運算子的譜分解等等，而這些都佔着本書的重要地位，論文的最後一節講述變分問題的汎函數分析處理，而現在是由 Л. А. 劉斯鐵爾尼克把它加以擴充後寫成本書的最後一章。

本書的第一章講述距離空間。與亞歷山大洛夫的"集合與函數的一般理論入門"或豪斯多夫的"集合論"相比較，在這裏距離空間自然是從稍爲不同的方面來講述的，因此可以把它看成前兩書的某種補充。

次兩章講述線性賦範空間及這種空間內的線性運算子。

1) 目前"汎"字已不用，均寫作"泛"。此書沿用舊版，未予改正，請讀者注意。

篇頁不太多的第四章講述具有基底的空間內的完全連續運算子的理論。這個情形包括了分析學中所有重要的函數空間。

第五章是自共軛運算子的譜論的初步介紹．如所周知，這個理論是現代分析學中最重要的部門之一．已經有了相當多的文獻講述這個理論，這些文獻的一部分在本書的末尾列出．因此我們僅限於這個理論的初步，只研究了有界自共軛運算子理論的最簡單的部分．即使這樣，從這裏已經可以認識到譜論的方法．

最後一章講述施於抽象函數的分析運算．主要是討論微分法的運算及其各種應用．

在陳述理論的同時，作者力圖用它對不同數學部門的應用來說明它，例如用微分方程和積分方程，分析中的近似法，殆週期函數的理論，變分法等等．

這些例子中的某一些佔了本書中個別的一節，它們的討論對說明汎函數分析和其他數學部門的聯系以及說明汎函數分析的方法在一般分析內的作用是有用的．

作者對 Ю. Б. 格爾麥伊爾、А. И. 蒲列斯涅爾和 М. Р. 蘇拉布拉所給的寶貴指示表示感謝．作者對 В. Г. 阿史基魯斯及 Д. А. 萊可夫在閱讀校樣時所作的巨大工作也表示謝意．

作者識

目　錄

序　言……………………………………………………… i

導　論……………………………………………………… 1

第一章　距離空間

§ 1. 函數(運算子). 極限運算 ……………………………… 5

§ 2. 距離空間和拓撲空間 ………………………………… 7

§ 3. 距離空間的例子 ……………………………………13

§ 4. 完備空間. 某些具體空間的完備性 …………………26

§ 5. 距離空間的完備化……………………………………34

§ 6. 關於完備空間的兩個定理 ……………………………41

§ 7. 壓縮寫像原理…………………………………………43

§ 8. 可分空間………………………………………………51

§ 9. 距離空間內的集合的列緊性 …………………………55

§ 10. 某些函數空間的集合的列緊性判別法 ………………63

§ 11. 對殆週期函數理論的應用 ……………………………74

第二章　線性空間與線性運算子

§ 12. 任意集合內的代數運算 ………………………………79

§ 13. 線性空間 ………………………………………………89

§ 14. 線性運算子 ……………………………………………99

§ 15. 線性賦範空間 ………………………………………… 111

§ 16. 有窮維數空間與子空間 ……………………………… 116

§ 17. 抽象希勒柏特空間 …………………………………… 124

§ 18. 線性賦範空間內的線性運算子 ……………………… 136

§ 19. 線性運算子空間 …… 143
§ 20. 逆運算子 …… 149

第三章 線性汎函數

§ 21. 線性賦範空間內的線性汎函數 …… 162
§ 22. 某些函數空間內的線性汎函數的一般形式 …… 172
§ 23. 共軛空間和共軛運算子 …… 194
§ 24. 汎函數敍列的弱收斂性 …… 205
§ 25. 空間的元素的弱收斂性 …… 213
§ 26. 空間 C(0, 1) 的萬有性 …… 219

第四章 全連續運算子

§ 27. 全連續運算子 …… 227
§ 28. 具有基底的巴拿赫空間 …… 234
§ 29. 具有基底的巴拿赫空間內含全連續運算子的線性運算子方程 …… 245

第五章 希勒柏特空間內自共軛運算子的譜論初步

§ 30. 自共軛運算子 …… 251
§ 31. 自共軛運算子的譜 …… 258
§ 32. 具純點譜的運算子 …… 266
§ 33. 射影運算子 …… 270
§ 34. 正運算子 …… 276
§ 35. 正運算子的平方根 …… 279
§ 36. 自共軛運算子的譜分解 …… 282
§ 37. 運算子函數。豫解式 …… 290

第六章 非線性汎函數分析的一些問題

§ 38. 數值變數的抽象函數的微分法 …… 299
§ 39. 抽象函數的積分法及解微分方程 …… 308
§ 40. 齊式與多項式 …… 317
§ 41. 抽象函數的微分 …… 324
§ 42. 高次微分與導數 …… 333
§ 43. 二變函數的微分法 …… 342
§ 44. 關於隱函數的定理 …… 345
§ 45. 隱函數定理的應用 …… 352
§ 46. 切向流形 …… 360
§ 47. 極值問題 …… 370
附　錄
I. 輔助不等式 …… 375
II. 實變函數的兩個 n 次導數的定義 …… 382
汎函數分析及其有關理論的基本文獻
名詞對照表

導　　論

分析、幾何與代數的基本概念的一般化

在本世紀初產生了一個新的分析科目，即所謂汎函數分析．

汎函數分析的基本概念和方法是在一些比較古老的數學分析部門——如變分法[27]、微分方程論、函數的逼近與表現論、分析中的數值計算法，特別是積分方程論[33]——的內部逐漸形成的．

汎函數分析的發展在近十年內是特別的向前推進了一步．在這個發展中起着領導作用的是蘇聯、波蘭和匈牙利的數學家．

汎函數分析的實質在於將數學分析（及與之相近的代數與幾何領域中）的許多初等部分的很多概念和方法推移到更一般的對象和屬性更複雜的事物上去；不僅如此，而且廣泛的應用了幾何和代數的方法．這樣的推移是和分析基本概念的推廣相關聯的，這樣作就可以從一個統一的觀點來處理許多早期只在特殊的分析科目裏被孤立討論過的問題，並把一些看起來似乎相隔較遠的數學理論聯系起來，從而更促進新的數學事實的發現．爲了證實這一說法的正確性，只須看近年內用汎函數分析的方法所得出的關於微分方程和積分方程的解的一系列存在定理[25]或汎函數分析對分析中近似計算法的探討就够了[8]．

數學分析的基本概念之所以可能一般化，是因爲在它各個

不同部門的發展過程中，發現了在概念上或方法的應用上有許多共同的地方，而且這些概念和方法常常在代數和幾何中找出相似之點．例如逐次逼近法可以應用於很多不同的代數問題和分析問題而求得其解．又如汎函數的定義，汎函數的極値以及變分法中極値存在的條件則類似於函數(一個或多個變數)的定義，函數的極値以及微分學中極値存在的條件．

線性常微分方程論和線性差分方程論與線性代數方程組理論的相似，這都是大家知道的．這些相似之點在發展歷史較晚的積分方程論中顯得更突出．

隨着十九世紀數學中分析的概念的推廣，也發生了由羅巴契夫斯基的非歐幾何發現而開始的幾何概念的推廣．n 維空間幾何的產生允許我們把多變數函數用幾何學的語言解釋爲多維空間的像，同時也顯示了分析和幾何間新的相似處．不僅如此，把分析幾何化的新的可能性的出現更要求着把幾何概念愈加推廣．我們不妨舉幾個例子來談一談．n 階齊次線性常微分方程的解的全體和 n 維矢量空間就是同構．而齊次線性偏微分方程的解的全體則類似於無窮維數的矢量空間．分析和幾何的概念的對比中有一個非常深入而且重要的例子就是關於正交函數系的展開理論．這些正交系在很多地方和歐幾里得空間的正交矢量系相類似，而正交系之所以得名也正在於此．把一個矢量用分量表示則對應於把函數用傅立葉級數展開．畢達哥拉定理則對應於帕爾塞瓦勒-斯鐵克洛夫定理等等．在這裏，爲了幾何地表示無窮正交系，也要求把歐幾里得空間擴張爲無窮維數的空間．

隨着數學分析和幾何的發展，不但分析的各個部門的概念之間或分析和幾何的概念之間的相似之處增多了，而且也逐漸顯示出來原來這些不同理論的相似乃是由於這些理論的基礎概念極爲相近之故。函數相依、極限、鄰域、距離等就正是這樣的基礎概念。它們都是明顯的或不明顯的在各種形式上應用於這些理論之中。

我們已經指出，汎函數分析的特點不僅是要把古典分析的基本概念和方法一般化，而且是要把這些概念和方法幾何化。不同類型的函數被看做"函數空間"的點或矢量。我們也曾說過，這樣的討論要求把幾何概念更進一步推廣——如無窮維歐幾里得空間，矢量空間，距離空間等。這樣一來，到最後引出了"抽象空間"這一個一般的概念，它旣包括了從前討論過的幾何對象，也包括了不同的函數空間。

引進了抽象空間以後，分析上的許多問題就可以用幾何的語言來處理。像這樣的用幾何方法去研究分析理論，不僅廣泛的應用在數學文獻裏，而且也同樣的應用於物理和力學的許多工作中。許多事實可仿照 n 維幾何推測出來；而另外許多事實也可由幾何方法獲得證明。這樣一來就在分析學中找到了新的幾何方法。

在十九世紀隨着幾何概念的擴張，同時也發生了代數概念的擴張。

施於數的代數運算可以推移到屬性更一般的對象上去（如矩陣，運算子等）。在數學不同的部門裏引出了並且採用了羣、環、域、一般線性系等概念。

隨着代數概念在分析上的應用，開始了定義有極限趨近的代數機構的研究．特別在近十年內產生一門新的科學(哈爾、闊勒莫果洛夫、彭特利雅金和另外一些數學家們)——拓撲代數，它用了同一的觀點研究定義有極限運算的代數機構(拓撲羣、拓撲環、拓撲域等)．

分析的運算是對代數運算的極限情形．初等代數在普通分析中所起的作用正如把它們一般化以後對汎函數分析所起的作用．因此線性代數和線性運算子的理論相當，這個理論在本書中佔着相當大的一部分．

分析的基本方法——用線性的對象去逼近非線性的對象——已運用到汎函數分析中(參考第六章)．

由數値變數的多項式取極限後引出更一般的數値函數；與此相當，"在環上的多項式"(矩陣環、運算子環等)取極限後引出這種變量的更一般的函數．一些重要的數學部門如矩陣算法，運算子計算法，線性運算子譜論(參考第五章)等等都是在這個基礎上建立起來的．

在汎函數分析發展的第一階段，一般線性代數起着特別的作用．近日由於蘇聯數學家(И. М. 蓋勒範德、Д. А, 萊科夫、M. A. 奈瑪爾克等等)在汎函數分析這方面的工作，使得拓撲代數各個部門的概念和方法獲得廣泛的應用(參考[6])．就是說，可以使用這些方法解決分析中一系列的困難問題．

汎函數分析的幾何的引論和代數的引論放在本書§§2, 12, 13, 15, 17中．

第一章　距離空間

§1. 函數(運算子). 極限運算

數學分析的基本概念之一是函數相依的概念. 函數相依的定義在分析中是這樣的: 給定兩個實數的集合 X 和 Y, 假若根據某一定律(規則)可使 X 的每一數 x 與 Y 的唯一個數 y 相對應, 我們就說在集合 X 上定義了一個單值函數 $y=f(x)$, 函數的值域含在集合 Y 內, 集合 X 也叫做函數的定義域.

不難看出, 在函數相依的概念中, 把集合 X 和 Y 都限制爲實數的集合是沒有必要的. 若把 X 和 Y 了解爲不同屬性的元素, 我們就會得到更一般的函數相依的概念, 這樣的例子在數學分析各個部門裏都找得到.

例 1. 設 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 n 個實變數的一個實函數, 則 X 是 n 個實數的有序組的集合, Y 是實數的集合.

例 2. 設 $\vec{y}=f(x)$ 是矢量函數, 使 n 維矢量 $\vec{y}$ 和實數 x 對應. 在這裏的 X 是實數的集合, Y 是 n 維矢量的集合.

例 3. 在變分學中我們常討論形式如下的泛函數:

$$I(\gamma)=\int_a^b F(x,y,y')\,dx,$$

式中的 γ 代表由方程 $y=f(x)$ 所給定的曲線, $f(x)$ 是具有連續導數且過兩已知點 $A(a,y_a)$, $B(b,y_b)$ 的函數類 C_1 中的某一函數. 在這個情形

下，X 是具有上述性質的曲線的集合，Y 是實數的集合。

例 4. 在積分方程論中討論到形式如下的積分式：

$$y(s)=\int_a^b K(s,t)\,x(t)\,dt.$$

在這裏我們假設核 $K(s,t)$ 是定義在正方形 $a\leqslant s,t\leqslant b$ 內的連續函數。由此就可把上述的等式看成一個定律，根據這個定律對在 $[a,b]$ 上連續的每一函數 $x(s)$ 可使在同一閉間隔上連續的另一函數與之對應。在這裏 X 和 Y 都是連續函數集合。

現在我們介紹函數相依的一般定義。

設想給定了兩個任意的集合 X 和 Y，並給定了一個定律（規則）。假如對每一個元素 $x\in X$，根據這個定律可使唯一完全確定的元素 $y\in Y$ 和它相對應，我們就說，在集合 X 上定義了一個**抽象函數**[*]（或運算子）$y=f(x)$（或寫爲 $y=fx$），其值域含於 Y 內。在特別的情形下，假若運算子的值是實數，我們就把這個運算子叫做**汎函數**[**]。

像這樣非常一般化的去定義運算子，我們幾乎不可能說出關於它的性質。因此，我們還要附加一些假設。

極限運算與抽象空間 在分析中與函數相依這一概念同等重要的另一基本概念，就是極限的概念以及隨之而來的連續性的概念。凡可用某種方法來定義敍列的極限概念的集合叫做抽

*) 我們作這樣的規定：假若某一個情况對集合所有的元素都成立，我們就說"在集合上"成立。假若某一個情况成立，但可能不是對集合所有的元素成立，我們就說"在集合內"成立。

) 定義在 X 上值域含於 Y 內的運算子也叫做集合 X 在集合 Y 內的映像**。

象空間。假若一個抽象空間的元素是函數或數列，我們就叫這個抽象空間做函數空間。研究定義在函數空間內的某些類型的運算子，是汎函數分析的基本內容。

§2. 距離空間和拓撲空間

在數學分析中我們遇見過一些極限的概念，而且在某些情形下對於同類數學對象的敍列常由問題性質的不同而引入不同的極限概念。我們最先遇到的是實數敍列的極限概念。這個概念立刻可以推廣到複數敍列和 n 維矢量敍列。其次，對函數敍列我們有一系列的收斂概念：單純（不一致的）的收斂，一致的收斂，殆遍收斂等等。這些概念都是我們所熟知的。更甚的是 П. Л. 切比謝夫在應用最小二乘式的方法研究插入法的問題時還討論過函數敍列以 $\rho(t)$ 爲權的平均收斂[52]。就是說，定義在閉間隔 $[a,b]$ 上的函數敍列 $x_n(t)$ 叫做以 $\rho(t)$ 爲權平均收斂於定義在同閉間隔上的函數 $x(t)$，假如 $n\to\infty$ 時

$$\int_a^b [x_n(t)-x(t)]^2\rho(t)dt\to 0,$$

式中的 $\rho(t)$ 代表 $[a,b]$ 上某一正値函數。匈牙利數學家弗雷得利克·黎斯在他關於可積分函數系的研究中引入了以 p 爲冪的平均收斂的概念，p 代表滿足條件 $p\geq 1$ 的實數[48]。

所有這些收斂的概念都具有一個重要的共性：一個敍列的元素 x_n（代表數、矢量或函數）收斂於元素 x，其意思是說 x_n 無限制的"趨近"於 x，亦即當添數 n 無限增大時，這些元素間的"距離"就無限的減小。由此，隨我們對元素 x_n 和 x 的距離的

了解的不同，我們就可得出不同的極限的定義．因此，一個合理的方法是在某些集合內給出元素間的距離的一個一般的定義，使它能包括上面所討論的特別情形；然後再利用這個距離在集合內引入極限的概念，使它轉變成爲一個抽象空間．

定義　集合 X 叫做距離空間，假如可對它的每一對元素 x 和 y，可使一個非負實數 $\rho(x,y)$ 與之對應，滿足下述的條件：

1）爲了 $\rho(x,y)=0$，必須且只須 $x=y$（恆等公理）；

2）$\rho(x,y)=\rho(y,x)$（對稱公理）；

3）$\rho(x,y)+\rho(y,z)\geq\rho(x,z)$（三角形公理）．

$\rho(x,y)$ 叫做元素 x 和 y 的距離，而上列的三個條件則叫做距離公理．顯然，距離公理所表述的乃是普通三維歐幾里得空間的點之間的距離的最一般性質（參考[51]）．

極限元素　距離空間 X 的元素 x 叫做 X 的元素的敍列 $x_1, x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 的極限，假若 $n\to\infty$ 時，$\rho(x_n,x)\to 0$．在這個情形下，我們寫成 $x_n\to x$，或 $\lim\limits_n x_n=x$．距離空間的元素也叫做點．最後，我們應當注意到，含於距離空間 X 的每一個集合 Y，若以它的點在 X 內的距離來定義它們在 Y 內的距離，則 Y 也是一個距離空間．

關於距離空間的收斂點列，有下述的幾個一般定理．

定理 1　假如距離空間 X 的點列 $\{x_n\}$ 收斂於點 $x\in X$，則敍列 $\{x_n\}$ 的任一子敍列 $\{x_{n_k}\}$ 也收斂於同一點．

這個定理的證明是很明顯的．事實上，若 $n\geq n_0(\varepsilon)$ 時有 $\rho(x_n,x)<\varepsilon$，則 $n_k\geq n_0(\varepsilon)$ 時當然也有 $\rho(x_{n_k},x)<\varepsilon$．

定理 2　距離空間的點列 $\{x_n\}$ 不能收斂於一個以上的極

限。

設 $x_n\to x, x_n\to y$, 則對充分大的 n 有

$$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,x_n)+\rho(x_n,y)<\varepsilon.$$

因爲 x 和 y 是固定點而 ε 是任意的正數，所以上述不等式只有在 $\rho(x,y)=0$, 卽 $x=y$ 時才有可能。

定理 3　假如 X 的點列 $\{x_n\}$ 收歛於 $x\in X$, 則敍列 $\{x_n\}$ 在下述意義上有界：就是說，對於空間 X 的任意一個固定點 θ, 數列 $\{\rho(x_n,\theta)\}$ 有界。

事實上，由三角形公理，對任意的 n 有 $\rho(x_n,\theta)\leqslant\rho(x_n,x)+$ $+\rho(x,\theta)\leqslant a+\rho(x,\theta)=K$, 因爲 $\{\rho(x_n,x)\}$ 是一個收歛數列，所以有界，從而 $\rho(x_n,x)$ 不超過某一常數 a。

空間 X 中滿足不等式 $\rho(x,a)<r$ 的點 x 的全體（或滿足 $\rho(x,a)\leqslant r$ 的點 x 的全體），叫做以 a 爲中心，r 爲半徑的球（或閉球）。我們以後常用 $S(a,r)$ [或 $\overline{S}(a,r)$] 代表這樣的球。任一個以 x 爲中心的球叫做 x 點的鄰域。由此不難看出，x 點是敍列 $\{x_n\}$ 的極限的必要且充分條件是：x 點的任意鄰域除去這個敍列的有限個點外（或者說從某一個添數開始），包含這個敍列的所有的點。完全含於某一個球內的集合叫做有界。

閉包　在距離空間中可以引入很多重要的概念，這些概念是在直線上的點集理論中曾經遇見過的。例如給定一個集合 $M\subset X$, 我們把 $a\in X$ 叫做 M 的聚點，假如 a 點的任意鄰域內至少含有集合 $M-a$ 的一個點，換句話說，就是對於任意的 r 都有 $S(a,r)\cdot(M-a)\neq 0$。把集合 M 的所有聚點添加於 M 後所得的集合叫做 M 的閉包並用記號 $\overline{M}$ 代表它。