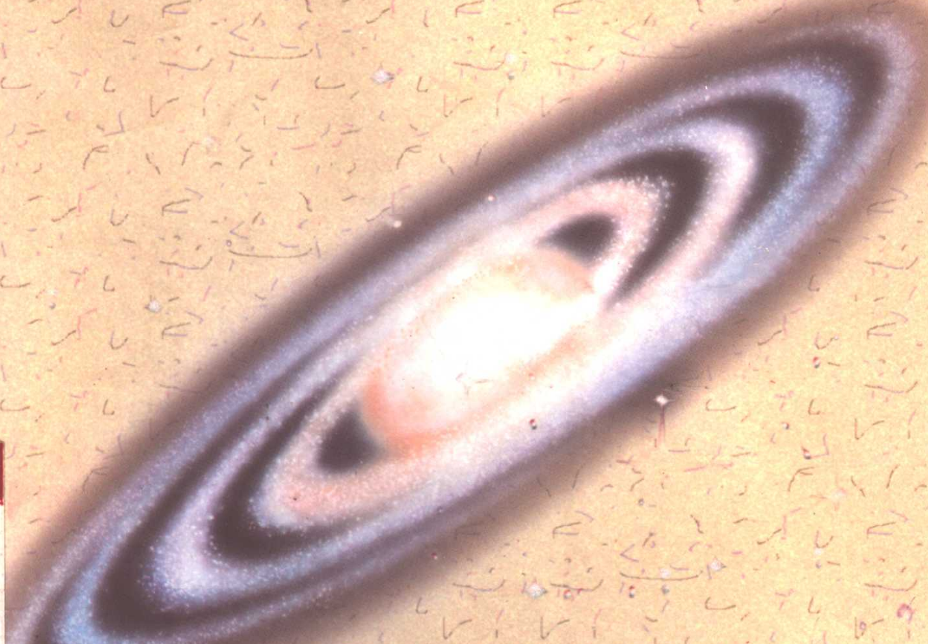
面向21世纪课程教材

基/础/物/理/教/程

JICHUWULIZHONGDE SHUXUEFANGFA

基础物理中的数学方法

王楚 吴锦雷 刘志雄 周乐柱 编



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

基础物理中的数学方法/王楚等编. —北京：北京大学出版社，1999
面向21世纪课程教材·基础物理教程
ISBN 7-301-04288-4

Ⅰ. 基… Ⅱ. 王… Ⅲ. 数学物理方法-教材 Ⅳ. 0411.1

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第34830号

书　　名：基础物理中的数学方法
著作责任者：王　楚　吴锦雷　刘志雄　周乐柱
责 任 编 辑：李采华
标 准 书 号：ISBN 7-301-04288-4/O·0450
出　版　者：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　址：http://cbs.pku.edu.en/cbs.htm
电　　话：出版部 62752015　发行部 62754140　编辑室 62752021
电 子 信 箱：zpup@pup.pku.edu.cn
排　版　者：北京因温特有限公司
印　刷　者：北京大学印刷厂印刷
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
787×1092　18开本　9印张　156千字
1999年9月第一版　1999年9月第一次印刷
定　　价：13.5元

内 容 提 要

本书是《基础物理教程》丛书中的数学预备知识，该丛书为教育部批准的面向21世纪课程教材.

本书系统地总结和补充高中阶段相关的数学知识，使大学新生能更好地理解基础物理课程.全书以直观的物理概念为基础，介绍基础物理中较简单的微积分运算及其物理意义.

全书共分五章.第一章为初等函数的极限与微分；第二章为积分运算；第三章是矢量运算(含平面与直线)；第四章为三维空间函数的图形与重积分；第五章为多元函数的微分.

本书可作为综合大学和师范大学理工科各专业新生第一学期讲授数学基础知识的教科书或教学参考书，也是一本高中文化程度读者学习数学知识的辅助读物.

《基础物理教程》总序

物理学是其他各自然学科和技术学科的基础，在过去几十年中物理学日益成为新技术的一个重要的支柱，因而《基础物理》已成为大学理、工、农、医各专业重要的基础课，而且各国的高等学校都为改进物理教学作了长期的探索. 新技术的飞速发展，要求学生较全面地掌握物理学的基本知识，并在思维方法方面得到锻炼，从而能适应他们一生在事业中将遇到的不断变化和发展的情况. 然而，要把近代物理学的成就和应用，组织成基础课的教学体系，并不单纯是材料的取舍和拼接，而是一个知识再加工的研究课题，需要经过长期持之以恒的研究和实践，才可能逐步有所改进. 课程改革是一个永无止境的难题.

在写这套书时，我们着重考虑了以下三个问题：

1. 按基本原理组织内容，适当调整某些素材的区划范围

对于教学改革的一个共识是如何精选内容，使教材不至过分庞杂. 经过考虑，我们认为宜以物理学的基本概念与基本规律为主题，并应联系现代的应用实例. 由于物理学的基本规律具有普遍性，所以在论述上和素材的选取上与传统的区划范围可以有所不同. 例如，在力学中可以涉及洛伦兹力；在分子运动论中可以讨论带电粒子的随机运动. 这样做有助于阐明基本规律的意义，并使线索更加明晰.

2. 注重论述的科学性并加强思维能力训练

对于物理课程改革的另一个共识，就是应提高学生的理解能力和理论联系实际的能力. 这是又一个难题. 我们认为在过去的教材中，某些命题的论述欠深入；对实际应用的介绍未能着重于体现基本原理，而是较多地描述具体的技术过程；习题偏重于“代公式型”或“技巧型”. 这些急于求成的做法，往往使学生不自觉地养成注重记忆结论、但是忽视理解和思考的习惯. 在这套书中，我们力图使论述比较深入，体现物理学的思辨，用基本原理来概括各种可能的应用. 我们认为习题是课程教学的一个重要环节，习题能引导学生运用基本原理分析和解决实际问题. 这套书中除习题外，每一章还编入能引导学生深入思考的思考题.

习题和思考题数量较多，不可能要求学生全做. 有些习题涉及较深入的课题，可作为课堂讨论或课外研究的命题. 学生即使不做，只要看一遍

并略加思索，作为自我检查的“镜子”也是有益的.

3.《基础物理》是供学生反复阅读的书

物理课的教学环节，包括讲授、实验、自习、习题、复习考试等.许多教学组织者，常希望教师能把学生“讲明白”，但往往是事与愿违.困难在于任何课程和教材，都只能按“直线式”的顺序来安排内容.但在一门课中介绍的概念或规律，又必须综合其他课程的内容才能理解.真正的理解和消化有赖于学生的反复钻研.我们不希望这套书，是一套学生在考试后可永不再翻阅的书.因此，书中的材料可能比授课时的教学要求高一些，有些论点也比教学基本要求深入一些.总之，对大学的主要课程，学生不能只学教师的讲稿内容，也不宜只看一本教材.学生应通过对几本教材的比较，通过自己的研究，才能做到逐步消化和理解.

本书是参照理工科大学的教学基本要求编写的，但又不局限于此.希望对学生的钻研和进取，有一定的引导作用.为了便于使用，本书将有关内容分为若干层次.打“*”号的章节可有选择地讲授或不讲；有些为扩展知识面的或常识性的材料则写在附录中.

《基础物理教程》包括《力学》、《电磁学》、《光学》、《热学》、《原子物理》五本书.本书所需的数学知识是矢量代数、空间解析几何及简单的微积分运算，这些都是中学毕业生可以掌握的知识.鉴于当前一些中学的教学受“应试教育”的影响，不少中学生未能系统地掌握应具备的知识，尤其缺乏思辨能力和通过自学进取的意识.为弥补中学生数学知识的不足，作者还编写了《基础物理中的数学方法》，这本书可作为大学一年级学生的参考书.

《基础物理教程》是作者长期从事教学研究和实践的总结，也是一次教学改革的试验.作者欢迎广大教师和读者提出自己的见解、指出本书的缺点和错误，以期进一步改进.

王　楚

序

当前高中毕业生学习大学物理的难点之一是缺少必要的数学工具.一个时期以来,大学教师为此作了多方面的探索,但未能作出令人满意的安排.我们认为,学习大学物理的必要的数学知识,在中学的教科书中已大致齐备.只是由于多种实际原因,使中学的教学有所偏废.此外,许多中学毕业生还来不及对中学知识在整体上消化理解,也是一个重要的原因.

我们认为,大学的《基础物理》课程应有符合要求的质量,但也不能简单地要求大学的《高等数学》课程来解决这一问题.大学的数学课程不只是工具课,还是对自然规律的归纳与概括,也是科学的思维训练课程.从这一方面来说,大学的《基础物理》也应为《高等数学》提供背景材料.

基于以上的认识,北京大学电子学系自 1992 年起,为一年级新生开设了一门选修课——《基础物理中的数学方法》,本书是这门课程的教材.本课程大约需要 30 学时左右,在第一学期前半学期完成,为《基础物理》的教学创造了较好的条件,因而也有助于《高等数学》与计算机系列课程的教学.

本书的主要内容是把中学数学中的矢量运算、简单的函数与极限概念、以及简单的微积分运算作一次简明的整理,并结合物理概念有所补充和延伸.本书内容的次序,是按逻辑上的合理性和物理课程的进度安排的.在教学过程中可按实际情况调整.

本书可作为理工科一年级本科生的参考书,对于已具有高中毕业水平的读者,本书可以作为自学资料,也可作为文科学生的自学资料.

王　楚

教 学 说 明

本书是一年级大学生的教学参考书.如果作为专题课的教材,则该课程应是与物理课紧密结合的辅助性选修课.教学要求以满足一年级的物理课的需要为准,讲授内容可按需删增,讲授次序可灵活调整.大学第一学期各门课程的一个共同的任务,就是培养学生自学能力,养成把有关的课程联系起来思考钻研的习惯.本书的内容不必全讲,宜着重于讲解基本概念.以下提出一个供参考的教案.

第一章 初等函数的极限和微分(6学时)

§1.1 初等函数(1学时)

§1.1.1函数的概念与§1.1.2常用的初等函数,只是高中数学和物理的回顾.宜引导学生通过自学作一次回忆.着重讲解§1.1.3,它是高中数学的"补漏",也是基础物理中不可缺少的部分.§1.1.4不是重点.

§1.2 极限(1.5学时)

本节有两个重点:其一是极限的四则运算;其二是无穷小量的"阶次"的概念.本节大致是以中学数学中的极限概念为基础,但在论述方法上略有延伸.本节的教学要点是,要求做好习题作为自学下一节的准备.§1.2.4无穷大量可不讲授,但要求自学.

§1.3 微商与微分(2学时)

本节的教学要求是在理解微商和微分意义的基础上,掌握初等函数的微分运算.这里不要求学生能作熟练的运算,但应能理解物理量的定义.§1.3.4反函数与隐函数的微分运算可不讲授.

§1.4 高阶微商与高阶微分(1.5学时)

本节着重于引进算符"D"的运算,这是为介绍常系数线性微分方程作准备,也是为第二学期解线性电路作准备.如果物理课程不要求解微分方程,则§1.4.2可省略.§1.4.3曲线的密切圆与曲率半径是运动学的准备知识.如果物理课程中不急于引进曲率的概念,也可以不讲.

第二章 积分运算(6学时)

本章实际上已包括了常系数线性微分方程.

§2.1 **不定积分(2学时)**

本节应强调不定积分是给定积分求“全体”原函数,是微分的逆运算.因此,决不可省略任意常数.此外,应侧重讲授换元积分法与复数变换,分部积分可不讲解.

§2.2 **积分算符$\frac{1}{D}$——微分算符的逆运算(2学时)**

本节是用算符运算解常系数线性微分方程,目的在于使学生初步感受到,解微分方程就是作积分运算.即:不要使学生对微分方程有畏惧感和神秘感.本节的习题也是不定积分的练习.在物理课中,也宜多用算符作练习.因为在后续的物理课中,某些算符是有物理意义的.§2.2.3含积分算符的方程可不讲解.

§2.3 **定积分(2学时)**

本节的要点在于使学生理解定积分是无穷多微元求和,并与在坐标系中的面积联系起来.就定积分的计算而言,应着重说明在作换元积分时应注意积分限的变换.

§2.4补充说明可不讲解.

第三章 矢量运算(6学时)

本章只是复习中学关于矢量的基本知识,要求借助三维坐标系的矢量运算.

§3.1 **矢量的加减与数乘(1学时)**

这一节基本上是复习高中数学和物理.需要着重讲解的只是“单位矢量”的概念和用三维坐标表示矢量.

§3.2 **直角坐标系中矢量的微分与积分(1.5学时)**

这一节在相当大的程度上与物理课重复,应与物理课紧密配合组织讲解.例如,可把这一节的讲授作为与物理课配合的讲座.这一节应着重说明矢量的微分和积分运算,就是数乘和加、减运算.

§3.3 **矢量的点乘(2～2.5学时)**

§3.3.1点乘的运算规则是复习中学知识.§3.3.2直角坐标系中的平面,只是把解析几何与矢量联系起来.其目的在于引导学生练习三维图形,逐步培养对三维空间中的曲线(轨迹)的想象能力.因此,在习题中要求学生认真作图.

§3.3.3按路径积分,是以场力作功为背景介绍路径积分.这部分宜与物理课有机配合,不一定讲授,也可以结合物理课中的例题讲解.

§3.4 矢量的叉乘(1学时)

着重于直角坐标系中的叉乘运算.

§3.5 混合积与二重矢量积可以不讲解.

到第三章结束,第一学期的物理课已无概念上的困难.因此,如果没有进一步的要求,以下各章均可作为自学资料.

第四章 三维空间函数的图形与重积分(6学时)

本章包括两部分(约各占3学时):

第一部分是常用的三维正交坐标系与三维图形.这部分已在物理课中或多或少涉及过,在这里只是较系统地整理一下.同时,若物理课已涉及柱坐标与球坐标,则可指定§4.1与§4.2为参考资料.总之,这部分应视有关课程的进展和学生的实际情况讲解.为加强形象思维能力的训练,应严格要求学生认真作图.

第二部分是重积分.在物理课关于"质心"与"转动惯量"的章节中,已学过累次积分的方法,实际上引进了重积分的概念.在这里只是较规范地整理一下,进一步为分子物理学和电磁学作准备.

综上所述:到本章为止已较好地解决了《基础物理》的教学需要.第五章只是机动的参考资料.

第五章 多元函数的微分(4～6学时)

§5.1 偏微商(2～3学时)

偏微商的运算可能在《高等数学》中已经学过,这里只是结合物理中常用的球坐标系和柱坐标系复习一次.本节侧重于偏微商的几何意义、曲面的单位法线矢量和简单的曲面积分,为电磁学作必要的准备.

§5.2 全微分与方向微商(2～3学时)

全微分在《高等数学》中已介绍过.这里侧重于方向微商与哈密顿算符.宜结合保守场讲解.

§5.3～§5.5只是阅读资料,完全可以不作为课程讲解.

目 录

第一章　初等函数的极限和微分

§ 1.1　初等函数

1.1.1　函数的概念

在物理过程中，一些物理量之间有由物理规律决定的关系，这种关系叫做函数. 例如一个物体 M 在离地面高度为 h_0 处，于 $t=t_0$ 时刻自由落下(图 1.1.1)，在 t 时刻的瞬间高度为

$$h = h_0 - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (1.1.1)$$

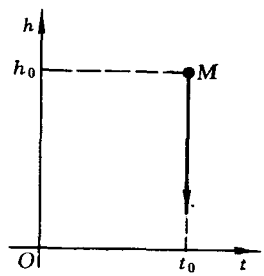


图　1.1.1

式中 $g=9.8\mathrm{m/s^2}$，g 叫做重力加速度.

式(1.1.1)在形式上显示出物体的高度随时间的变化关系，时间 t 叫做自变量，高度 h 叫做因变量. 式(1.1.1)也可表为

$$t = \sqrt{2(h-h_0)/g} \qquad (1.1.2)$$

该式适宜于说明物体高度为 h 时所经历的时间. 在这种形式的表示式中，h 是自变量，t 是因变量.

一般说来，在分析物理问题时总有一些物理量被视为条件，叫做自变量；另一些物理量被视为结果，叫做因变量.

在数学上，把只有一个自变量的函数叫做一元函数，把有多个自变量的函数叫做多元函数. 例如 1mol(摩尔)理想气体的压强 p 与它的体积 V 及绝对温度 T 之间的关系式为

$$p = RT/V \qquad (1.1.3)$$

在上式中 p 是以 T 和 V 为自变量的二元函数，R 是气体常数.

自变量为实数的函数叫实变函数；自变量为复数的函数叫复变函数. 本书讨论的函数都是实变函数.

为了方便起见，在讨论一元函数时常以符号 y 表示因变量，符号 x 表示自变量，以

$$y = f(x) \qquad (1.1.4)$$

泛指函数关系.

1.1.2 常用的初等函数

在基础物理中常用的初等函数有以下三种：

(1) 幂函数

$$y = ax^n \quad (a,n\ \text{为常数}) \tag{1.1.5}$$

n 可为正数，也可为负数；可为整数，也可为分数. 幂函数的一般形式是多项式，式(1.1.5)只是给出其中一项的函数式，幂函数的一种特殊形式是 $n=0$ 的情况，即

$$y = C \quad (\text{常数}) \tag{1.1.6}$$

(2) 三角函数和反三角函数

这是经常要用到的函数. 例如交流电的电压为

$$u = u_0\cos(\omega t + \phi)$$

在 x 轴上以原点为中心的简谐振动为

$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

由于正弦函数和余弦函数是最常用的函数，它们的和差角公式、和差化积和积化和差公式都是常用的公式.

(3) 以 e 为底的指数函数和对数函数

$$y = a\mathrm{e}^x, \qquad y = a\ln x$$

这类函数，以及它们经过有限次四则运算与有限次复合步骤所构成的函数，统称为初等函数.

1.1.3 欧拉恒等式

在分析振动、交流电路、波动等物理过程时，常借助复数来简化运算过程. 在学习基础物理之前，希望读者能复习高中数学中关于复数的表示式与运算规则. 在这里，只是扼要地说明欧拉恒等式.

大家知道复数 z 可以用两个实数 a 和 b 来表示

$$z = a + \mathrm{j}b, \quad \mathrm{j} = \sqrt{-1}\ (\text{常数}) \tag{1.1.7}$$

a 是 z 的实数部分，b 是它的虚数部分的系数. 实数部分相同而虚数部分符号相反的两个复数叫共轭复数. z 的共轭复数记作 z^*

$$z^* = a - \mathrm{j}b \tag{1.1.8}$$

以上是复数的代数表示法.

在平面直角坐标系中(图 1.1.2)，它们又可表示为

$$z = \rho(\cos\phi + \mathrm{j}\sin\phi) \tag{1.1.9}$$

$$z^* = \rho[\cos(-\phi) + \mathrm{j}\sin(-\phi)]$$

$$= \rho(\cos\phi - \mathrm{j}\sin\phi) \tag{1.1.10}$$

式中

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot z^*} \tag{1.1.11}$$

$$\tan\phi = b/a \tag{1.1.12}$$

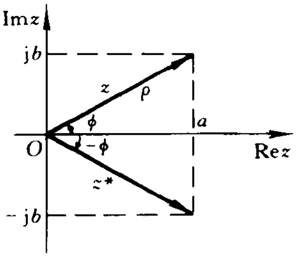


图 1.1.2

ρ 叫做复数的模，ϕ 叫做辐角. z 与 z^* 的模相等，辐角的符号相反.

在式(1.1.9)中，$(\cos\phi+\mathrm{j}\sin\phi)$是模为 1 的复数. 高等数学可以证明

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi} = \cos\phi + \mathrm{j}\sin\phi \tag{1.1.13}$$

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi} = \cos\phi - \mathrm{j}\sin\phi \tag{1.1.14}$$

这就是欧拉恒等式. 由上两式解得

$$\cos\phi = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi}) \tag{1.1.15}$$

$$\sin\phi = \frac{1}{2\mathrm{j}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi}) \tag{1.1.16}$$

这两式是欧拉恒等式的另一种表示式. 欧拉恒等式把指数函数和三角函数联系起来，使三角函数的运算简化.

在这里还不能对欧拉恒等式作出严格的证明，只是希望读者开始练习使用这两个公式.

例 1 导出正弦和余弦函数的三倍角公式.

解 对式(1.1.13)两边同时作立方运算得

$$(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi})^3 = (\cos\phi + \mathrm{j}\sin\phi)^3 = \mathrm{e}^{\mathrm{j}3\phi}$$

利用欧拉恒等式，将上式的指数函数用三角函数表示，并展开两边得

$$\cos3\phi + \mathrm{j}\sin3\phi = (\cos^3\phi - 3\cos\phi\sin^2\phi) + \mathrm{j}(3\cos^2\phi\sin\phi - \sin^3\phi)$$

根据复数的运算规则，两复数相等必是实部和虚部分别相等，故有

$$\cos3\phi = \cos^3\phi - 3\cos\phi\sin^2\phi$$

$$\sin3\phi = -\sin^3\phi + 3\cos^2\phi\sin\phi$$

例 2 已知三角函数

$$f(\phi_1,\phi_2) = 2\sin\phi_1\cos\phi_2$$

试将它变换为三角函数和(差)的形式.

解 将三角函数用指数表示得

$$f(\phi_1,\phi_2) = \frac{1}{2\mathrm{j}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_1} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi_1})(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_2} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi_2})$$

$$= \frac{1}{2\mathrm{j}}[(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\phi_1+\phi_2)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\phi_1+\phi_2)}) + (\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\phi_1-\phi_2)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\phi_1-\phi_2)})]$$

再将上式右边的指数函数用三角函数表示即得

$$f(\phi_1,\phi_2)=\sin(\phi_1+\phi_2)+\sin(\phi_1-\phi_2)$$

1.1.4 双曲函数

欧拉公式实质是揭示三角函数和指数函数的关系,也说明两种函数有相同的运算规则.由此想到,可仿照欧拉公式定义一套广义的三角函数,叫做双曲函数.双曲正弦和双曲余弦函数的定义是

$$\mathrm{sh}x=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}) \tag{1.1.17}$$

$$\mathrm{ch}x=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}) \tag{1.1.18}$$

由双曲函数的定义式知

$$\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=1$$

此式与三角函数的基本公式

$$\sin^2x+\cos^2x=1$$

相似.还可以证明

$$\mathrm{sh}(x_1+x_2)=\mathrm{sh}x_1\,\mathrm{ch}x_2+\mathrm{sh}x_2\,\mathrm{ch}x_1$$

$$\mathrm{ch}(x_1+x_2)=\mathrm{ch}x_1\,\mathrm{ch}x_2+\mathrm{sh}x_1\,\mathrm{sh}x_2$$

实际上,若以 $\mathrm{j}x$ 代替定义式中的 x 即得

$$\mathrm{sh}\,\mathrm{j}x=\mathrm{j}\sin x \tag{1.1.19}$$

$$\mathrm{ch}\,\mathrm{j}x=\cos x \tag{1.1.20}$$

式(1.1.15)和式(1.1.16)定义的三角函数,也可视为双曲函数的特例.以 $\mathrm{j}x$ 代替两式中的 ϕ 得

$$\cos\mathrm{j}x=\mathrm{ch}x \tag{1.1.21}$$

$$\sin\mathrm{j}x=\mathrm{j}\,\mathrm{sh}x \tag{1.1.22}$$

由此可以想到:三角函数 $\sin x$ 与 $\cos x$ 之间的任一关系式,都可化为对应的双曲正弦和双曲余弦之间的关系式,只要在这种关系式中以 $\mathrm{ch}x$ 代替 $\cos\mathrm{j}x$,以 $\mathrm{j}\,\mathrm{sh}x$ 代替 $\sin\mathrm{j}x$.

最后请读者注意:在欧拉恒等式和双曲函数中引用了复数,但只要自变量 x(或 ϕ)是实数,则函数仍是实变函数.以上的讨论是为了说明,指数函数和三角函数有广泛的对应关系.同时也希望读者注意到,对数函数和反三角函数也有相应的对应关系.