衡斋算学校证

李兆华 著

陕西科学技术出版社

衡斋算学校证

李兆华 著

陕西科学技术出版社

（陕）新登字第 002 号

衡斋算学校证
李兆华 著
陕西科学技术出版社出版发行
（西安北大街 131 号）
新华书店经销 西北大学印刷厂印刷
850 毫米×1168 毫米 32 开本 8.625 印张 14.8 万字
1998 年 4 月第 1 版 1998 年 4 月第 1 次印刷
印数：1—1 500
ISBN 7-5369-2601-4/O·80
定 价：19.80 元

序

汪莱是我国清代著名数学家。1993 年，我以《清代著名数学家汪莱及其数学成就》一文纪念他逝世 180 周年（载《数学传播》17 卷 3 期），文末有这样一语："从能力和水平来看，汪莱不仅是他那个时代，而且也是中国历史上的一流学者。"其数学专著《衡斋算学》七册富有创造性和理论价值，而素以艰深难读著称。其挚友焦循在所作《汪君孝婴别传》中称："人所言不复言，所言皆人所未言与人所不能言。故其著述无多卷而简奥似周秦古书。"主要由于这一原因，《衡斋算学》的若干疑难问题长期未能得到彻底解决。

近十余年来，海内外数学史家对清代数学史的研究表现出极大兴趣和热情，取得许多重要的成果。本书作者李兆华教授关于《衡斋算学》的研究为其中突出的一例。十年间，本书作者先后发表《汪莱〈递兼数理〉〈参

两算经〉略论》、《汪莱方程论研究》以及《汪莱球面三角成果讨论》等论文多篇，就《衡斋算学》的疑难问题予以深入讨论并给出圆满解释，其结论已被许多论著引为定论。在此基础上，本书作者又对《衡斋算学》进行了系统的校证，原文之疑点和难点涣然冰释，全书之数学方法与思路亦清晰可见，使我们能够更清楚地认识汪莱的数学工作。这一校证工作说明，本书作者具备中国古代数学的系统的知识、扎实的数学史功底，并熟悉中国数学史研究的前沿工作。

我从50年代中期致力于数学史研究，旁及其他科学史领域，倏忽四十余年。昔日同道李继闵、白尚恕、梁宗巨诸先生先后谢世，念之亦可悕也已。喜看我的各位学生勤奋力学，各有所成，亦可慰也，益信中国数学史的研究后继有人。《衡斋算学校证》出版之际，谨志数语。是为序。

李　迪

1996年元月9日

于内蒙古师大科学史所

策　划　张培兰
责任编辑　王　军
封面设计　王　祚
版式设计　惠红彦
责任校对　吴贤唯

目　录

导　言

衡斋算学

附 录 一

附 录 二

导言

汪莱及其《衡斋算学》

汪莱，字孝婴，号衡斋，安徽歙县人。清代著名数学家。据汪宜楷《汪莱出生年月辨证》知，汪莱生于乾隆三十三年八月二十七日（1768，10，7），卒于嘉庆十八年十一月二十日（1813，12，12），享年四十六。汪莱于文字、音韵、律历以至经学无所不通。江藩《汉学师承记》称之“十三经注疏皆能背诵如流水，而又能心通其义。”汪莱在数学方面的成就尤为突出。平生著作多种，半皆散佚。今传《衡斋算学遗书合刻》，包括《衡斋算学》七册，《衡斋遗书》九卷。另有《衡斋先生烬余诗稿》抄本一册。

汪莱出身于书香门第。其父汪昌（1717～1788），乾

隆三十年（1765）举人，未涉仕途，著有《静山堂诗稿》等。汪莱十五岁入郡庠。抄本《大统锦灵经》汪莱读书记称："余年二十有二，始习九九，读宣城梅氏《历学骈枝》，知有明《台官通轨》者。"所著《覆载通几》乾隆五十七年（1792）冬序称："《数理精蕴》备极精详，书生僻处草茅不克伏读，每怀戴盆之耻。"又《乐律逢源》乾隆五十八年三月自序称："今年春，假馆吴门。"胡培翚《石埭县训导汪先生行略》称："馆吴中三年归，学成著书，刊布艺林，海内通人言天文算术必推先生。"焦循《石埭县儒学训导汪君孝婴别传》亦称："弱冠后读书于吴葑门外，数年苦心冥索，尽得中西之秘。"自苏州返里后数年间，汪莱先后完成《衡斋算学》第一册至第四册。自嘉庆六年（1801）至十一年间，汪莱主要活动于扬州、六安等地。嘉庆六年，在扬州秦恩复、汪石潭家处馆。其间得读《数书九章》、《测圆海镜》等宋元数学著作。是秋，去六安处馆，历时二年。八年夏，复至扬州处馆。十年四月，返里岁试，成为廪生，旋复返扬。十一年夏，应邀测算云梯关外黄河新旧入海口地势高下。此五年间，完成《衡斋算学》第五册至第七册。自嘉庆十二年（1807）至十四年间，汪莱供职北京。嘉庆十二年，以优贡生入都。翌年，考授八旗官学教习。同年，入史馆预修《天文志》、《时宪志》。是冬，得见明安图九术抄本。十四年，志书告成，授安徽石埭县儒学训导。自嘉

庆十五年（1810）至十八年间，官石埭，卒于官。

汪莱的一生清贫而坎坷。早年，因徽州地区水灾为患兼之家道中落，“至掘草根以佐食”。晚年虽为训导，仍“食贫茹苦无异诸生”。自十五岁入庠，发奋刻苦几三十载，学行见重于时而屡试不中。若非明师力荐则区区贡生亦成黄粱。殁后，囊无余资，两孤在抱，书稿飘零。幸得亲友敛金相助，孀妻孤子得以生活。

清贫与坎坷炼就汪莱独立之人格与独到之见解。焦循《别传》称，汪莱之为人“倔强，不少假借”，为官“公事依例独行，不为利疚威惕”，为学则“天资敏绝，性能攻坚”。乾嘉之际，考据之风极盛。而汪莱对此则持蔑视态度。去世之前尝言：“今世考据家陈陈相因，不过剿袭前言耳，非能发古人所未发也。”焦循《别传》评曰：“人所言不复言。所言皆人所未言与人所不能言。”平心观理与刻意创新之精神贯穿于《衡斋算学》之始终。焦循之言，绝非挚友之私誉，确乎识者之公论也。

汪莱以真才实学为师友所推重，而志同道合则是汪莱择友的准则。汪莱与夏銮（1760～1829）、夏炘、夏燮（1800～1875）有累世之好，与巴树谷、江玉、胡培翚（1782～1849）皆有深交，与焦循（1763～1820）、李锐（1768～1817）为“谈天三友”。汪莱和李锐的交谊比较短暂。李锐是一位学养深厚、著作精实的数学家。张敦仁（1754～1834）、阮元（1764～1849）的著述得力于李

锐不少。中西数学得失之争是当时数学界所关注的问题。据焦循《别传》、江藩《汉学师承记》及《费隐与知录》包世臣（1775～1855）序可知，汪莱和李锐于此问题之见解有所分歧。对于秦九韶《数书九章》（1247）、李冶《测圆海镜》（1248）等宋元著作，汪、李所见不同，是为分歧之始。据焦循《雕菰楼集》卷十四《答李尚之书》之一可以推知，汪、李相识于嘉庆五年（1800）秋。翌年，汪莱至扬州，得见秦、李两家书。先是，李锐业已得见秦、李之书。又于嘉庆元年受阮元之托校证《测圆海镜》，翌年刊入《知不足斋丛书》。焦循《别传》于两者见解之不同有所反映："李尚之特为雠校，谓少广一章得此始贯于一。好古之士翕然相从。孝婴独推其有可知、有不可知。如《测圆海镜》边股第五问圆城求径，二百四十步与五百七十六步共数，而李仁卿专以二百四十为答数。《数学九章》田域第二题尖田求积，二百四十步与八百四十步共数，而秦道古专以八百四十为答。"可见，对于秦、李之书，汪莱、李锐的态度有攻守之异。至于《衡斋算学》第五册李锐的跋文及汪莱就跋文所作的"记"和"论"所反映的不同意见皆属具体数学问题的讨论。两者所见互有得失而所持态度不失真挚。就数学著作考察，两者的争论产生积极的效果。中算史上的两部重要著作，汪莱《衡斋算学》第七册和李锐《开方说》，均缘此而出现。可以看出，《衡斋算学》第五册、第七册

和《开方说》互有启发和明显联系。焦循评曰："绝学之显，端由两君。"所见确实。

汪莱的数学研究涉及方程论、球面三角、三角函数表造法、组合、进位制以及《九章算术》校勘等几个方面。

方程论研究见诸《衡斋算学》第二册（1798）、第五册（1801）与第七册（1805）。梅瑴成（1681～1763）汇编《数理精蕴》（1722）时指出，有句股形面积与句弦和（或股弦和）求句股弦各数，可用带两从相同和数立方求解。以句弦和为例，梅氏由方程

$$a^2\left(\frac{c+a}{2}-a\right)=\frac{\left(2\times\frac{1}{2}ab\right)^2}{2(c+a)}$$

解得一正根 a，由此可得 b，c. 梅氏所立方程正确，但只给出一解而失去一解。其原因是，中国传统数学对方程的次数和根的个数之关系缺乏认识，而以求得合题意的一解视为当然。汪莱以此问题为起点，指出形如 $x(p-x)^2=q$ 的方程可有二正根，其中，$p>0$，$q>0$，$0<x<p$. 这一发现成为清代数学家方程理论研究的起点。在该问题的研究中，汪莱指出，等句弦和两句股形其等积的充要条件是

$$(c_1-a_1)+\sqrt{(c_1-a_1)(c_2-a_2)}+(c_2-a_2)=c+a.$$

该结果对整数句股形的研究以及形如 $x^2+xy+y^2=k$ 的

二次不定方程的研究均有积极的意义。以上是第二册的主要结果。

研究《数书九章》和《测圆海镜》之后，第五册系统讨论有实根的二次方程和三次方程正根的个数，无正根的情形不予讨论。本册依方程系数之符号列举九十六条。归纳之后，共得十六个方程。有实根的二次方程和三次方程共二十三个，除去开平方、开立方的情形三个，无正根的情形四个，其余十六个有正根。汪莱的十六个方程即此十六个，并无重复遗漏。凡方程有一正根者称为可知，多正根者称为不可知，有一正根或多正根者称为可知或不可知。例如，

$ax^3-bx^2-cx-d=0$，可知

$ax^3-bx^2+cx-d=0$，可知或不可知

$ax^3-bx^2+cx+d=0$，不可知

其中 a，b，c，$d>0$. 这一事实已就简单情形揭示出笛卡尔符号法则。在上述第二个方程的讨论中，汪莱给出可知或不可知的判别方法，其中蕴含着虚根共轭的意义。

在第五册的基础上，第七册进一步论述有实根的高次方程正根个数的出现规律和正根的判别条件。无实根的情形不予讨论。本册对方程的分类给予更多的注意。其分类法如下：

- 方程
  - 有实根（可开）
    - 有正根（有）
      - 有一正根（可知）
      - 有多正根（不可知）
    - 无正根（无）
  - 无实根（不可开）

第五册所论方程正根的可知、不可知为本册研究之起点。汪莱以举例方式显示正根出现的规律，其结论有下列两点。其一，乘积多项式正根的个数等于其相乘诸多项式正根个数之和，即“合而有数皆如本”。其二，乘积多项式的系数序列变号次数相同者其正根个数可相差一个偶数，即所谓“同式异理”。例如，

$6x^4-5x^3-x^2-10x+24=0$，“此题无数”

$4x^4-15x^3+5x^2+36=0$，　“此题二数，同式异理”

$2x^4-21x^3+78x^2-117x+68=0$，“此题无数”

$x^4-13x^3+58x^2-108x+72=0$，“此题四数，同式异理”

显然，上述两例所揭示的正根出现的规律较第五册所论三次方程的情形具有更明确的笛卡尔符号法则的意义。同时，所显示的虚根共轭的意义较第五册所论三次方程

的情形亦更明确。

本册重点讨论有实根的方程正根的判别条件。其结论仍以举例方式予以说明。汪莱的基本思路大致可以作如下的理解。首先，将方程依项数分类。其次，就三项方程各种类型分别讨论其正根的个数，凡不必有正根者给出判别条件。再次，就四项方程各种类型分别讨论其正根的个数，凡不必有正根者可以减根变换使缺项成为三项方程予以讨论。五项及其以上方程类推。三项方程的类型有

$$x^n+px^m+q=0,$$
$$x^n-px^m+q=0,$$
$$x^n-px^m-q=0,$$
$$x^n+px^m-q=0,$$

其中 n，m 是正整数，$n>m$，$p>0$，$q>0$. 汪莱给出，方程 $x^n-px^m+q=0$ 有正根的充要条件是 $q\leqslant\frac{n-m}{n}p\times(\frac{m}{n}p)^{\frac{m}{n-m}}$. 可以证明该结论成立。该方程有二正根或无正根即不必有正根，应予判别。四项方程最简单的情形共八个，其中无正根者一个，有二正根或无正根者三个，有三正根或一正根者四个。其中第二种情形即不必有正根的三个方程是

$$x^3-px^2-qx+r=0,$$
$$x^3-px^2+qx+r=0,$$

$$x^3+px^2-qx+r=0,$$

其中 p，q，$r>0$. 汪莱给出判别条件者恰是上述三个方程。方程正根的判别条件是一项杰出的成果。虽仅以三项和四项方程为例，但其思想方法具有理论价值。汪莱所给四项方程正根判别条件有误，其致误之由仍需进一步探讨。

汪莱的上述工作标志着中国传统数学的方程分支由算法研究进入理论研究，谓之该分支发展史上的一个里程碑殆非虚誉。

球面三角研究见诸《衡斋算学》第一册（1796）与第四册前半（1799）。梅文鼎（1633～1721）《弧三角举要》（1684）、《环中黍尺》（1702）及《堑堵测量》（约1703）等三书就明末以来传入的球面三角知识作出全面的总结，并以所创球面正投影法在图形画法和公式证明方面作出突出成就。梅著关于次形和直角三角形有如下的两个限制条件。其一，凡所作次形须与本形在本形某边大圆的同侧以使次形与本形的正投影可见。其二，凡所作直角三角形须无大边和钝角以使直角三角形求解公式的各函数值皆为正值。由于上述两个限制条件，遂使次形和垂弧的作法复杂化并与当时传入的有关次形和垂弧的某些内容相抵牾。至于球面三角形解的个数及有解的条件等比较抽象的内容当时未曾传入，梅氏各书亦未深入至此。汪莱的工作约有两端。其一，“三角求边用次