

电磁场与电磁波

高等学校通信专业教材

电磁场与电磁波

王增和 王培章 卢春兰 编著



电子工业出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

URL: <http://www.phei.com.cn>

高等学校通信专业教材

电磁场与电磁波

王增和 王培章 卢春兰 编著

电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

内 容 简 介

本书在大学物理电磁学的基础上系统阐述了宏观电磁场与电磁波的基本理论,主要包括:矢量代数与矢量分析,麦克斯韦方程的积分形式和微分形式,静态场与似稳电磁场,静态场问题的解析法和数值法,均匀平面波在无限大均匀各向同性或各向异性媒质中的传播,平面波的反射与折射,电磁波的辐射以及导行电磁波。

本书的最大特色是:抽象概念形象化,一般推导被简化,定理证明附录化,复杂演算电脑化,既适合于自学,也方便了教学,更有利于“计算机不断线”。书中所附程序用 MS-FORTRAN 书写,并调试通过,且误差小于百万亿分之一。

本教材的主要读者对象是电子通信类专业的本科生,也可供跨学科跨专业的本科生、专科生、教师和工程技术人员作为教材或参考书。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,翻版必究。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场与电磁波/王增和等编著. - 北京:电子工业出版社,2001.1

现代通信技术专业基础系列教材

ISBN 7-5053-6254-2

I. 电… II. 王… III. ①电磁场-高等学校-教材 ②电磁波-高等学校-教材 IV. O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 86746 号

丛 书 名: 高等学校通信专业教材

书 名: 电磁场与电磁波

编 著 者: 王增和 王培章 卢春兰

责任编辑: 张荣琴

排版制作: 电子工业出版社计算机排版室

印 刷 者: 北京大中印刷厂

装 订 者: 三河市万和装订厂

出版发行: 电子工业出版社 URL: <http://www.phei.com.cn>

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

经 销: 各地新华书店

开 本: 787×1092 1/16 印张: 25 字数: 636.8 千字

版 次: 2001 年 1 月第 1 版 2001 年 1 月第 1 次印刷

书 号: ISBN 7-5053-6254-2
TN·1393

印 数: 5000 册 定价: 30.00 元

凡购买电子工业出版社的图书,如有缺页、倒页、脱页、所附磁盘或光盘有问题者,请向购买书店调换;

若书店售缺,请与本社发行部联系调换。电话 68279077

序

为培养适应信息时代需要的高素质人才,近年来,全军通信院校实施了面向 21 世纪教学改革计划,在教学内容和课程体系改革上取得了丰硕成果。为及时总结和推广改革成果,从 1999 年开始,我部启动了“撰名著”工程,力求编写出一批思想性、先进性、针对性、科学性、实践性较强的“精品”教材,为培养高素质人才创造条件。

列入首批“撰名著”工程建设的教材共有 21 本,其中《数字电路与逻辑设计》、《通信电子线路》、《电磁场与电磁波》、《现代通信原理》、《现代通信技术》、《现代通信系统》等 6 本为统编教材。为确保质量,通信部集中了通信系统的院士、博士生导师和部分优秀中青年教学骨干,在统编教材的过程中,对编写纲目进行了集体审定。与以往出版的同类教材相比,这套教材具有以下特点:

体现了时代性:充分吸收新理论、新技术、新装备成果,整个知识点建立在“高”、“新”平台上,反映了本学科的发展前沿和趋势。

突出了系统性:6 本统编教材自成系列,对现代通信技术基础、原理、技术和运用等做了全面、系统的介绍,各教材内容衔接比较紧密,分工比较合理,层次分明,重点突出。

加强了实践性:在阐述理论知识的同时,注重基本技能和基本方法的讲授,并紧密结合通信建设实际,培养学员解决实际问题的能力。

注重了通俗性:概念、原理以及新技术的阐述比较精炼,深入浅出,图文并茂,便于自学。

我们希望这套教材的出版,能够有助于现代通信技术的传播,为现代通信事业的发展做出应有的贡献。

本套教材可作为高等院校通信及相关专业本、专科生课程教材,也可作为通信工程技术人员学习的参考书。

衷心地感谢为这套教材编写付出辛勤劳动的全体作者;感谢为此提供支持的院校、部队、机关的领导和有关人员;感谢电子工业出版社为本套教材的出版所付出的努力。

总参谋部通信部

2000 年 12 月

前 言

《电磁场与电磁波》是总参通信部确定的重点统编本科教材。本教材的主要读者对象虽是通信电子类专业的本科生,但也可供跨学科跨专业的本科生、大专生和工程技术人员为拓宽知识面自学进修之用。目录中标注“*”号的内容可根据专业的需要和学时的多寡由教师酌情取舍。每章末都配备较多数量的习题供广大师生选择,书末附有计算机类习题的简单答案。

本书的编写以提高场与波教学质量,促进学员知识、能力和素质全面提高为目标,重点参考了已故毕德显教授所著《电磁场理论》一书,吸收了理工大学通信工程学院和重庆通院长期从事本课程教学同志的实践经验,征求了通信部其他兄弟院校关于纲目的宝贵意见,比较了国内外近期同类书籍的材料取舍,并以此为基础,形成贯穿编写过程的原则与全书的特色。

1. 编写原则

(1) “四化”的原则 为了方便教师组织教学或学员自学进修,全书力图做到:①抽象概念形象化;②一般推导要简化;③定理证明附录化;④复杂运算电脑化。

(2) 起点低、少而精的原则 第1、2章通俗细致地讲述了矢量分析,甚至有一节专门复习矢量代数。读者只要粗通微积分、线性代数和大学物理的电磁学,就是本书的最佳读者。电磁场理论的素材极为丰富,如面面俱到就会蜻蜓点水浮光掠影,或者洋洋洒洒逾百万言。笔者则采取“选材少而精,选中要讲清”的态度。

(3) 突出重点、分散难点的原则 重要的公式外围打上方框;必须记忆的公式在附录I中汇总。重要的概念、定理和结论用黑体排版。本书第1、2章的取材出于分散难点的考虑,既加强了矢量积分又实现了数学与物理的紧密融合。凡数学上繁难之处则例题多;凡概念上晦涩之处则叙述多。本书还以新颖的问、答格式,用通俗的语言进一步阐释难点,极利于自学。

(4) 温故知新的原则 考虑到知识创新决非平地高楼,编写时特别注重通过调用学员原有的知识导出新的知识。第1、5、8章在这方面作了有意义的探索。

2. 演绎法与归纳法的有机结合

宏观上看是演绎法,彻底的公理化叙述体系;而细节上常用归纳法,如常用坐标系、偶极子和均匀平面波等都是先特殊后一般,既有高屋建瓴全局在胸之势,又无囫圇吞枣消化不良之虞。

3. 力争有点新意

(1) 坡印廷定理的导入过程新颖活泼,富有启发性。

(2) 梯度、散度和旋度的引进分别与全微分、奥-高公式和斯托克斯公式挂钩,新旧知识既接上轨,又简洁明快省篇幅;突出了变 ϵ 矢之“变”,用枚举法论证了标性与矢性拉普拉辛实质上是等价的。

(3) 将科研成果引进教材,如3.6节似稳电磁场的两道例题既来自科研实践,又是分布参数影响的好例子。

(4) 分离变量法与数值计算相结合且误差小于百万亿分之一,让人信服无穷级数解确实是准确的;也清晰地看到吉布斯过冲现象及其发生的位置,因而懂得怎样回避。格林函数法既让镜像法有所归属,又有助于日后学习并矢格林函数。

(5) 讲赫兹磁偶极子时引进对偶原理;讲惠更斯面元时引进等效原理。两条原理的引入时机甚佳。

(6) 严格证明了:理想矩形波导中的任一 TE 模均可等效为电场 z 分量 $E_z = 0$ 的线极化均匀平面波对该波导斜入射所形成的合成场,丰满了部分波的概念。

(7) 有限元法被大大简化,且便于记忆和编程;求解了浅埋在地表下的两块电极间的电阻,而且土壤电导率 σ 是非均匀的,使接地电阻 R 的计算更贴近实际。

本书编写前,奉通信工程学院首长指示,作者对清华大学、北京理工大学、北方交通大学、西安电子科技大学和电子科技大学等院校对口专业进行了走访和调研。编写任务下达后,在通信部训练局的直接领导和亲切关怀下,于 1999 年 7 月组织专家对教材的纲目进行了审定。唐知新同志也参加了本书的编写工作。初稿完成后,遵照通信部训练局和通信工程学院教保部门的指示,聘请了院内外两名专家——南京邮电学院博士生导师曹伟教授和通信工程学院的刘代国教授担任本书的主审。作者由衷地感谢并愉快地采纳了两位主审所提的若干改进意见。本书的编写和出版得到了院、系、室各级领导的大力支持,作者尤其要感谢杨海平院长、陈绪栋主任、许晔峰科长和王蕾女士等同志所给予的关怀、帮助和支持。

由于作者水平有限,经验不足,行文疏漏乃至错误之处在所难免,材料的取舍恐怕也不尽合理,恳请读者不吝指正,E-mail 请发往 wzh1951@jlonline.com。

作者

2000 年 12 月

目 录

第 1 章 矢量积分·场方程的积分形式	(1)
1.1 三种常用坐标系与微分元	(1)
1.1.1 常用坐标系的回顾	(1)
1.1.2 坐标变量代换	(3)
1.2 标量与矢量	(4)
1.2.1 标量	(4)
1.2.2 矢量	(5)
1.3 标量场与矢量场	(5)
1.3.1 按时空变化规律介绍几种典型场	(5)
1.3.2 几种标量场的数学表示	(6)
1.3.3 标量函数的坐标变换	(7)
1.3.4 矢量场的直角分量表示	(8)
1.4 矢量的基本代数运算	(9)
1.4.1 矢量的加减运算	(9)
1.4.2 矢量的三种乘法运算	(11)
1.4.3 混合积与三重矢积简介	(12)
1.4.4 单位矢量	(12)
1.5 坐标单位矢量·常矢与变矢	(12)
1.5.1 坐标单位矢量	(12)
1.5.2 矢量函数·常矢与变矢	(14)
1.5.3 不同坐标单位矢量间的关系	(15)
1.6 源点·场点·矢径·距离矢量	(16)
1.6.1 源点与场点的物理意义	(16)
1.6.2 场点与源点的表示方法	(17)
1.6.3 距离及其倒数的近似计算	(18)
1.6.4 关于矢径 $\boldsymbol{r}$ 的分量表示式	(19)
1.7 矢量函数的积分	(19)
1.7.1 对时间变量的积分	(20)
1.7.2 对坐标变量的积分	(20)
1.8 电磁场的真实源·连续性方程	(23)
1.8.1 真实源与虚拟源	(24)
1.8.2 电荷分布的常用物理模型	(24)
1.8.3 电流分布的常用物理模型	(26)
1.8.4 电量不变性与连续性方程	(29)
1.9 电场·磁场·洛伦兹力	(29)
1.9.1 电场对电荷的作用力	(30)

1.9.2	磁场对电流的作用力	(30)
1.9.3	洛伦兹力公式	(31)
1.10	积分形式的麦克斯韦方程组·边值关系	(31)
1.10.1	位移电流·安培环路定律被修正	(31)
1.10.2	涡旋电场·电磁感应定律被推广	(32)
1.10.3	高斯定律·麦克斯韦第三、第四方程	(32)
1.10.4	边值关系的一般形式	(33)
1.10.5	边值关系的特殊形式	(36)
	习题	(36)
第2章	矢量微分·场方程的微分形式	(39)
2.1	矢量函数的偏导数	(39)
2.1.1	矢量函数偏导数的计算公式	(39)
2.1.2	坐标单位矢量的偏导数	(40)
2.1.3	对时间 t 的偏导数	(41)
2.1.4	对空间坐标的偏导数	(41)
2.2	梯度、散度与旋度	(41)
2.2.1	梯度	(42)
2.2.2	散度	(45)
2.2.3	旋度	(48)
2.3	拉普拉斯与格林恒等式	(52)
2.3.1	拉普拉斯算子	(52)
2.3.2	场的图示法	(55)
2.3.3	格林恒等式	(59)
2.3.4	场论·亥姆霍兹定理	(60)
2.4	微分形式的麦克斯韦方程组	(62)
2.4.1	微分形式的麦克斯韦方程组	(62)
2.4.2	麦克斯韦方程组的自洽性	(63)
2.4.3	麦克斯韦方程组的独立性	(64)
2.4.4	麦克斯韦方程组的适定性	(64)
2.5	复数形式的麦克斯韦方程组	(68)
2.5.1	谐变场量的复数表示法	(69)
2.5.2	有耗媒质·复电容率	(70)
2.5.3	麦克斯韦方程组的复数形式	(71)
2.6	电磁能量守恒与转化定律	(71)
2.6.1	坡印廷定理	(71)
2.6.2	坡印廷定理的复数形式	(73)
2.6.3	坡印廷矢量的瞬时值与平均值	(75)
	习题	(76)
第3章	静态场与似稳电磁场	(79)
3.1	静电场理论	(79)

3.1.1	静电场的基本方程、本构关系、边值关系	(79)
3.1.2	电位函数	(80)
3.1.3	电偶极子	(82)
3.1.4	电能密度·电能·电容	(83)
3.2	静电场计算	(85)
3.2.1	已知电荷分布求场强	(85)
3.2.2	已知电位或场强求电荷分布	(93)
3.3	恒定电场理论和计算	(95)
3.3.1	电流密度	(95)
3.3.2	恒定电场的基本方程、边值关系	(96)
3.3.3	电位函数	(96)
3.3.4	恒定电场与静电场的比较	(97)
3.3.5	恒定电场计算举例	(98)
3.4	恒定磁场理论	(99)
3.4.1	恒定磁场的基本方程、本构关系、边值关系	(99)
3.4.2	矢量磁位	(100)
3.4.3	磁偶极子	(103)
3.4.4	磁能密度·磁能	(104)
3.4.5	互感与自感	(106)
3.5	恒定磁场计算	(108)
3.5.1	已知电流分布,求解磁场	(109)
3.5.2	磁能·磁链·电感的计算	(112)
3.6	似稳电磁场	(117)
3.6.1	似稳场的基本方程	(117)
3.6.2	似稳场与基尔霍夫定律	(117)
3.6.3	应用举例	(119)
	习题	(121)
第4章	静态场问题的解析法	(128)
4.1	惟一性定理	(128)
4.1.1	边值型问题的分类	(128)
4.1.2	惟一性定理	(129)
4.2	镜像法	(130)
4.2.1	静电场中的镜像法	(130)
4.2.2	恒定磁场中的镜像法	(133)
4.2.3	电轴法	(135)
4.2.4	镜像法小结	(136)
4.3	格林函数法	(136)
4.3.1	格林函数法的基本思想和解题步骤	(137)
4.3.2	泊松方程的基本积分公式	(137)
4.3.3	格林函数法的积分公式	(138)

4.3.4 格林函数法应用举例·····	(139)
4.4 分离变量法·····	(144)
4.4.1 直角坐标系中的分离变量法·····	(144)
4.4.2 极坐标系中的分离变量法·····	(149)
4.4.3 柱坐标系中的分离变量法·····	(153)
4.4.4 球坐标系中的分离变量法·····	(159)
习题·····	(167)
第5章 均匀平面电磁波的传播 ·····	(175)
5.1 理想介质中的均匀平面波·····	(175)
5.1.1 理想介质中的波动方程·····	(175)
5.1.2 理想介质中均匀平面波解·····	(176)
5.1.3 理想介质中均匀平面波的传播特性·····	(178)
5.1.4 均匀平面波解的推广·····	(180)
5.2 沿任意方向传播的均匀平面波·····	(182)
5.2.1 沿 x 轴方向传播的均匀平面波·····	(183)
5.2.2 沿 y 轴方向传播的均匀平面波·····	(183)
5.2.3 沿任意方向传播的均匀平面波·····	(184)
5.3 平面电磁波的极化·····	(185)
5.3.1 直线极化·····	(186)
5.3.2 圆极化·····	(186)
5.3.3 椭圆极化·····	(188)
5.4 媒质的分类·····	(189)
5.4.1 良导体的条件·····	(189)
5.4.2 媒质的分类·····	(190)
5.4.3 导电媒质中的场方程·····	(191)
5.5 有耗媒质中的均匀平面波·····	(191)
5.5.1 无界有耗媒质中波的解·····	(191)
5.5.2 传播常数 γ 和波阻抗 $\hat{\eta}$ 的计算·····	(192)
5.5.3 有耗媒质中平面波的传播特性·····	(193)
5.6 电磁波的传播速度·····	(197)
5.6.1 相速与视在相速·····	(198)
5.6.2 群速度·····	(198)
5.6.3 能量速度·····	(200)
5.7 磁化等离子体中的平面波·····	(200)
5.7.1 等离子体的宏观电磁特性·····	(200)
5.7.2 磁化等离子体的张量电容率·····	(202)
5.7.3 磁化等离子体中的平面波·····	(203)
5.8 磁化铁氧体中的平面电磁波·····	(207)
5.8.1 朗道-栗弗席兹方程·····	(207)
5.8.2 旋磁媒质的张量磁导率·····	(209)

5.8.3 旋磁媒质中的平面电磁波	(210)
习题	(212)
第6章 均匀平面波的反射与折射	(215)
6.1 反射定律与折射定律	(215)
6.2 对两种不同媒质分界面的垂直入射	(217)
6.2.1 均匀平面波垂直入射到理想导体表面	(217)
6.2.2 均匀平面波垂直入射到理想介质表面	(219)
6.2.3 均匀平面波垂直入射到有耗媒质表面	(222)
6.3 对多层媒质分界面的垂直入射	(226)
6.3.1 半波长夹层介质	(227)
6.3.2 $1/4$ 波长的涂敷层	(227)
6.3.3 消除良导体表面的反射	(228)
6.4 对两种不同媒质分界面的斜入射	(229)
6.4.1 均匀平面波斜入射到理想介质表面	(229)
6.4.2 均匀平面波斜入射到导体表面	(235)
习题	(242)
第7章 电磁波的辐射	(245)
7.1 动态位与洛伦兹条件	(245)
7.1.1 一般时变场的动态位	(245)
7.1.2 谐变场的动态位	(246)
7.2 滞后位	(247)
7.3 电偶极子的辐射特性	(249)
7.3.1 电偶极子与电流元	(249)
7.3.2 矢量磁位 A	(249)
7.3.3 标量电位 Φ	(250)
7.3.4 赫兹电偶极子的电磁场解	(251)
7.3.5 赫兹电偶极子的辐射场	(251)
7.3.6 赫兹电偶极子的辐射特性	(252)
7.4 方向函数·方向图·方向系数	(253)
7.4.1 方向函数	(253)
7.4.2 方向图	(254)
7.4.3 方向系数	(255)
7.5 磁偶极子的辐射特性	(256)
7.5.1 磁偶极子与磁偶极矩	(256)
7.5.2 矢量磁位	(256)
7.5.3 电磁场解	(257)
7.5.4 对偶原理	(258)
7.5.5 磁偶极子的辐射特性	(259)
7.5.6 磁偶极子的辐射功率	(259)
7.6 惠更斯元的辐射特性	(260)

7.6.1 等效原理	(260)
7.6.2 电磁流“十字架”	(261)
7.6.3 辐射场解	(261)
7.6.4 辐射特性	(262)
7.7 对称振子	(263)
7.7.1 结构和辐射场解	(263)
7.7.2 半波振子及其电参数	(265)
习题	(268)
第 8 章 导行电磁波	(271)
8.1 广义均匀传输线的场方程	(271)
8.1.1 导行波为 TE 模的情形 ($\dot{E}_z = 0$)	(273)
8.1.2 导行波为 TM 模的情形 ($\dot{H}_z = 0$)	(273)
8.1.3 导行波为混合模的情形 ($\dot{E}_z \neq 0$ 且 $\dot{H}_z \neq 0$)	(274)
8.1.4 导行波为 TEM 模的情形 ($\dot{E}_z = 0$ 且 $\dot{H}_z = 0$)	(274)
8.2 矩形波导的模式理论	(276)
8.2.1 矩形波导中的 TM 传输模	(276)
8.2.2 矩形波导中的 TE 传输模	(278)
8.2.3 平面波的斜入射与矩形波导中的导行波	(280)
8.2.4 矩形波导中的模式简并现象	(282)
8.3 矩形波导的传输特性	(283)
8.3.1 规则波导的常用参数	(283)
8.3.2 TE_{10} 模的纵向传输特性	(285)
8.3.3 TE_{10} 模的场结构	(286)
8.3.4 TE_{10} 模与斜入射	(288)
8.3.5 波导内壁上的面电流	(288)
8.3.6 TE_{10} 模的损耗估算	(290)
8.4 圆形波导	(294)
8.4.1 圆波导中的 TM 模	(294)
8.4.2 圆波导中的 TE 模	(295)
8.4.3 圆波导中的 TM 、 TE 模的传输特性	(296)
8.4.4 圆波导中几种常用模式的场结构	(298)
8.5 同轴波导	(300)
8.5.1 同轴线上的主模	(300)
8.5.2 同轴线上的高次模	(301)
习题	(302)
第 9 章 数值法初步	(305)
9.1 分布型问题的数值积分法	(305)
9.1.1 沿直线的积分问题	(305)
9.1.2 平面上的二重积分问题	(307)

9.1.3 沿空间曲线的积分问题	(310)
9.1.4 曲面上的二重积分问题	(315)
9.2 二维场域的有限差分法	(318)
9.2.1 差商代替导数	(318)
9.2.2 拉普拉斯方程的有限差分形式	(319)
9.2.3 差分网格的划分	(319)
9.2.4 应用举例与计算程序	(320)
9.3 二维域上的有限元法	(326)
9.3.1 均匀媒质中的有限元法	(326)
9.3.2 非均匀媒质中的有限元法	(329)
9.4 矩量法初步——点配法	(335)
9.4.1 矩形导电薄板的孤立电容	(335)
9.4.2 圆形导电薄板的孤立电容	(339)
9.4.3 带状线单位长度的电容量	(342)
9.5 电磁场理论的局限性	(346)
9.5.1 关于接地的评论	(346)
9.5.2 关于面源的评论	(346)
9.5.3 宏观电磁理论的局限性	(347)
习题	(348)
附录 1 必须牢记的若干公式和定理	(351)
附录 2 矢量代数和矢量分析常用公式	(356)
附录 3 勒让德方程与勒让德多项式	(357)
附录 4 贝塞尔方程与贝塞尔函数	(359)
附录 5 狄拉克 δ 函数简介	(363)
附录 6 球坐标下的散度与旋度	(365)
附录 7 二维域有限元法计算公式的证明	(367)
附录 8 任意形状的磁偶极子模型的矢位	(369)
附录 9 第一、二类全椭圆积分的计算程序	(370)
附录 10 恒等式(4.4.23)的数字试验程序	(371)
附录 11 恒等式(4.4.64)的数字试验程序	(372)
附录 12 本征值方程(4.4.76)式求解程序(设 $a=1, k=b/a>1$)	(374)
习题答案	(375)

第 1 章 矢量积分·场方程的积分形式

古语云：工欲善其事，必先利其器。为了在大学物理电磁学的基础上跨进电磁场理论的殿堂，必须掌握矢量分析即矢量的微积分这一利器。由于在麦克斯韦那个年代矢量分析还不是很成熟，更没有今日简洁明快的符号系统，所以发表在《电磁学通论》中的麦克斯韦方程竟多达十几个，外表又很相像，看得人眼花缭乱；而在今日已被压缩为 4 个。可见矢量分析这一数学工具功能之强大！

众所周知，代数是数学分析的基础。同理，矢量代数是矢量分析的基础。这就是知识的阶梯，人类进步的足迹。因此，本章复习矢量代数、讲述矢量的积分，在下一章讲述矢量的微分。

学习这两章的时候，请细心领悟矢量与坐标系之间的辩证关系：矢量的几何意义决定了矢量表出的优越性，表现出与坐标系的选取无关的优雅性；但是在求解具体问题的时候，又一定要精心选取坐标系，这时矢量的代数性质上升为矛盾的主要方面，并贯穿于定量计算的全过程。

学习的目的全在于应用。将积分形式的麦克斯韦方程组安排在本章；而把微分形式的麦克斯韦方程组安排在下一章自然是顺理成章的事。麦克斯韦方程反映的是宏观电磁场现象的客观规律，在本书中有时把它们简称为场方程。

引用矢量代数、矢量分析常用公式时可查阅附录 2。

1.1 三种常用坐标系与微分元

直角坐标系、圆柱坐标系、球坐标系是 3 种最常用的正交曲线坐标系，也是学习电磁场理论的基础。部分初学者误以为：掌握了直角坐标系足矣，因为任何的曲线、曲面原则上都可以用它来描述。在他们的印象中，极坐标、球坐标惟一的好处就是能简化某些面积、体积等的重积分运算，殊不知这是一种肤浅的见解。请大家务必重视这 3 种最常用的正交曲线坐标系的基础知识。

1.1.1 常用坐标系的回顾

1. 直角坐标系 (x, y, z) 诸要素

(1) 坐标变量的名称及变化范围

$$-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty, -\infty < z < +\infty$$

(2) 各坐标变量的几何意义

给定坐标 (x_1, y_1, z_1) 的值，怎样找到对应的空间点 M 呢？

线积分中常用的方法：从原点出发，首先沿 x 轴移动至 $(x_1, 0, 0)$ ，接着沿平行于 y 轴的方向移动至 $(x_1, y_1, 0)$ ，最后沿平行于 z 轴的方向移动至 (x_1, y_1, z_1) ，这个点就是 M 点，如图 1-1 所示。

(3) 坐标线

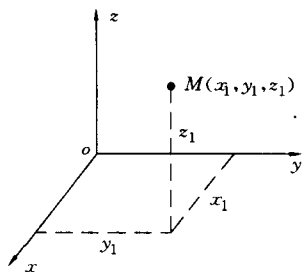


图 1-1 直角坐标系

本概念对于矢量的微分意义重大。

务必要建立和习惯于如下的思维：过任一点 $M(x, y, z)$ 必能引出 3 条坐标线，例如 $(x, y, z) \rightarrow (x+dx, y, z)$ 的连线，是一条平行于 x 轴的坐标线，余此类推。

(4) 弧长元 dl 与体积元 $d\tau$

$$dl = [(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2]^{1/2}, \quad d\tau = dx \cdot dy \cdot dz$$

2. 圆柱坐标系 (ρ, φ, z) 诸要素

(1) 坐标变量的名称及变化范围

$$0 \leq \rho < +\infty, \quad -\pi \leq \varphi < +\pi, \quad -\infty < z < +\infty$$

圆柱坐标系有时简称柱坐标系， φ 坐标称为方位角。

注 有的书将方位角定在 $0 \leq \varphi < 2\pi$ ，也是允许的。此外，柱坐标变量 z 与对应的直角坐标变量 z 的名称、定义和值完全相同。

(2) 各坐标变量的几何意义

给定坐标 (ρ_1, φ_1, z_1) 的值，怎样找到对应的空间点 M 呢？

方法如下：以原点为中心，以 ρ_1 为半径在 xoy 平面内作一圆；过原点作方位角等于 φ 的射线（仍在 xoy 平面内），必与圆有一交点 $(\rho_1, \varphi_1, 0)$ 。最后沿平行于 z 轴的方向移动至 (ρ_1, φ_1, z_1) ，这个点就是 M 点，如图 1-2 所示。

(3) 坐标线与拉梅系数 h

过任一点 $M(\rho, \varphi, z)$ 必能引出 3 条坐标线。它们分别是：

$(\rho, \varphi, z) \rightarrow (\rho+d\rho, \varphi, z)$ 的连线，与 z 轴相垂直，长度就是 $d\rho = 1 \cdot d\rho$

$(\rho, \varphi, z) \rightarrow (\rho, \varphi+d\varphi, z)$ 是半径为 ρ 的一段圆弧，弧长是 $\rho d\varphi = \rho \cdot d\varphi$

$(\rho, \varphi, z) \rightarrow (\rho, \varphi, z+dz)$ 的连线，与 z 轴相平行，长度就是 $dz = 1 \cdot dz$

线元长度与坐标微分之比称为拉梅系数 h 。可见柱坐标 (ρ, φ, z) 的 3 个拉梅系数依次是：

$$h_1 = 1, \quad h_2 = \rho, \quad h_3 = 1 \quad (1.1.1)$$

(4) 弧长元 dl · 体积元 $d\tau$

$$dl = [(d\rho)^2 + (\rho d\varphi)^2 + (dz)^2]^{1/2}, \quad d\tau = d\rho \cdot \rho d\varphi \cdot dz$$

3. 球坐标系 (r, θ, φ) 诸要素

(1) 坐标变量的名称及变化范围：

$$0 \leq r < +\infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad -\pi \leq \varphi < +\pi$$

θ 坐标可称为极轴角， φ 坐标仍称为方位角。

注 球坐标变量 φ 与对应的圆柱坐标变量 φ 的名称、定义和值完全相同。

(2) 各坐标变量的几何意义

设 M 点的球坐标是 $(r_1, \theta_1, \varphi_1)$ ，则①坐标 r_1 表示从坐标原点到 M 点的直线距离；②坐标 θ_1 表示 oM 连线与 z 轴间的夹角；③坐标 φ_1 表示过 M 点的那个午面的方位角。

问 过 M 点的子午面究竟指什么？

答 一切以 z 轴为边界的半平面都是子午面，但经过定点 M 的子午面只有一个，除非 M 是 z 轴上的一个点。同一个子午面上的任意两点，方位角 φ 总是相同的，因此子午面也可以看成：具有相同 φ 坐标的点的集合。

给定坐标 $(r_1, \theta_1, \varphi_1)$ 的值，怎样找到对应的空间点 M 呢？

方法如下：以原点为中心，作一半径为 r_1 的球面；以原点为顶点、以 z 轴为对称轴作一个

半顶角 $=\theta_1$ 的圆锥,它与球面的交线称作纬线;作方位角 $=\varphi_1$ 的子午面,它与球面的交线称作经线。经线与纬线相交于 M 点,如图 1-3 所示。

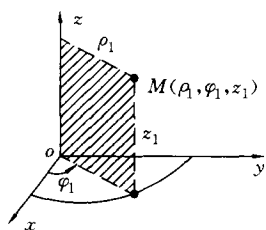


图 1-2 圆柱坐标系

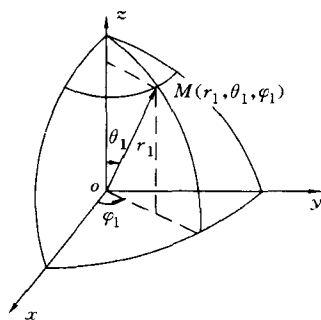


图 1-3 球坐标系

(3) 坐标线与拉梅系数 h

过任一点 $M(r, \theta, \varphi)$ 必能引出 3 条坐标线。它们分别是:

$(r, \theta, \varphi) \rightarrow (r+dr, \theta, \varphi)$ 的一段直线,长度就是 $dr=1 \cdot dr$

$(r, \theta, \varphi) \rightarrow (r, \theta+d\theta, \varphi)$ 的一段经线,弧长是 $rd\theta=r \cdot d\theta$

$(r, \theta, \varphi) \rightarrow (r, \theta, \varphi+d\varphi)$ 的一段纬线,弧长 $r\sin\theta d\varphi=r\sin\theta \cdot d\varphi$

问 若把地球看作一球坐标系, $dr, d\theta, d\varphi$ 分别表示什么运动方向?

答 当 $dr>0$, 表示向上移动; 当 $dr<0$, 表示向下移动。当 $d\theta>0$, 表示向南移动; 当 $d\theta<0$, 表示向北移动。当 $d\varphi>0$, 表示向东移动; 当 $d\varphi<0$, 表示向西移动。

球坐标 (r, θ, φ) 的三个拉梅系数依次是:

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = r\sin\theta \quad (1.1.2)$$

(4) 弧长元 dl · 体积元 $d\tau$

$$dl = [dr^2 + (rd\theta)^2 + (r\sin\theta d\varphi)^2]^{1/2}$$

$$d\tau = dr \cdot r d\theta \cdot r\sin\theta d\varphi$$

4. 注意事项

(1) 球坐标系的特点

球坐标变量 (r, θ, φ) 各司其职, r 管距离, (θ, φ) 管方向。 r 具有长度量纲, θ, φ 均以弧度或度为单位。这给某些关键问题的求解带来方便。例如: 立体角的计算、电偶极子的辐射等。

z 轴上的点, 方位角 φ 不定, 可取任意值。还有, 原点 o 的球坐标除 $r=0$ 确定无疑外, (θ, φ) 都不定。其实, 这些不确定性并不会给推导和计算带来麻烦。

(2) 直角坐标轴对应的 (θ, φ)

正 x 轴对应于 $\theta=90^\circ, \varphi=0^\circ$;

正 y 轴对应于 $\theta=90^\circ, \varphi=90^\circ$;

正 z 轴对应于 $\theta=0^\circ, \varphi=\text{任意值}$ 。

1.1.2 坐标变量代换

通过回顾柱坐标特别是球坐标的要素, 更能体会到 3 种常用坐标系之间千丝万缕的联系。

譬如,柱坐标系、球坐标系的方位角 φ 的基准面 $\varphi=0$,实际上就是 xoz 半平面;球坐标极轴角 θ 的定义要依赖 z 轴等等。因此,当使用非直角坐标对问题进行描述和处理的时候,不可须臾忘记了暗中相伴随的直角坐标系的那个刚性框架。坐标变量代换用于下列场合:已知点 M 的柱坐标或球坐标,求该点的直角坐标;已知点 M 的直角坐标,求该点的柱坐标或球坐标;同一点 M 的柱坐标与球坐标的相互换算。1.3 节就要用到坐标变量代换关系式。

1. 球坐标 $\rightarrow$ 柱坐标 $\rightarrow$ 直角坐标的变量代换

(1) 球坐标 $\rightarrow$ 柱坐标

$$\rho = r \cdot \sin\theta \quad (1.1.3a)$$

$$z = r \cdot \cos\theta \quad (1.1.3b)$$

(2) 柱坐标 $\rightarrow$ 直角坐标

$$x = \rho \cdot \cos\varphi \quad (1.1.4a)$$

$$y = \rho \cdot \sin\varphi \quad (1.1.4b)$$

(3) 球坐标 $\rightarrow$ 直角坐标

$$x = r \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi \quad (1.1.5a)$$

$$y = r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \quad (1.1.5b)$$

$$z = r \cdot \cos\theta \quad (1.1.5c)$$

2. 直角坐标 $\rightarrow$ 柱坐标 $\rightarrow$ 球坐标的变量代换

(1) 直角坐标 $\rightarrow$ 柱坐标

$$\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

(2) 柱坐标 $\rightarrow$ 球坐标

$$r = (\rho^2 + z^2)^{1/2}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right)$$

1.2 标量与矢量

1.2.1 标量

只有大小而没有方向的物理量是标量。质量 M 、体积 V 、功 W 、功率 P 、能量 E 、电压 U 、电流强度 I 、电阻 R 、磁通量 Φ 、静电位 ϕ 、电量 Q 等都是标量。

标量的共同特点是:只有大小,没有方向。值得注意的是:

(1) 一部分标量是算术量,如质量 M 、体积 V 、直流电阻 R 均大于等于 0;另一部分标量是代数量,如电量 Q 、静电位 ϕ 、磁通量 Φ 等可正可负,这部分标量有微妙的用途。例如:电量 Q 的正负可描述带正电还是带负电;磁通量 Φ 的正负可描述磁力线的穿进和穿出;忽略力 F 的方向属性后,从它的正负依然可甄别是吸力还是斥力;在规定了参考方向后,电流强度 I 的正负可描述电流的瞬时方向等等。总之,在研究的问题中,如果只存在两种对立的广义方向,那么使用标量进行描述和处理是合理的。