

保险精算丛书



修匀数学

D. 伦敦 著 徐诚浩 译

上海科学技术出版社

李大潜主编

《保险精算丛书》

修 匀 数 学

上海科学技术出版社

内 容 简 介

修匀数学研究的是如何根据先验观点修匀观察数据序列,也就是如何修正已得的估计序列。本书介绍了较新的修匀理论和多种实用的修匀方法,适用于精算学中的各种生存模型。书中配有大量习题和参考文献,可供学习和进一步研究之用。

Dick London, FSA
GRADUATION:
The Revision of Estimates
· ACTEX Publications
Winsted and Abington, Connecticut
Copyright ©1985

《保险精算丛书》

修 匀 数 学

D. 伦敦 著

徐 诚 浩 译

上海科学技术出版社出版、发行

(上海瑞金二路450号)

常熟市印刷八厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 7.625 字数 212 000

1995年11月第1版 1998年11月第2次印刷

印数 1 801 - 3 800

ISBN 7-5323-4135-6/O·193

定价: 18.00 元

如遇印装质量问题,可直接向承印厂调换

地址:常熟市梅李镇通江路21号 邮编:215511

《保险精算丛书》编委会

总顾问：何静芝 徐福生 钱建中

主 编：李大潜

副主编：尚汉冀 郑培明 郑韞瑜(常务)

编 委：(按姓氏笔划为序)

李大潜 余跃年 尚汉冀 郑培明

郑韞瑜 徐诚浩 裘星熙

策划：应兴国

《保险精算丛书》前言

保险，作为商品社会中处理风险的一种有效方法，已被全世界所普遍采纳。在现代保险业蓬勃发展的进程中，科学的理论和方法，特别是精确的定量计算，起着十分重要的作用。保险业运营中的一些重要环节，如新险种的设计、保险费率和责任准备金的计算、分保额的确定、养老金等社会保障计划的制定等等，都需要由精算师 (Actuary) 依据精算学 (Actuarial Science) 原理来分析和处理。有鉴于此，许多发达国家都以法律形式规定，保险公司的营业报告必须由精算师签字方为有效。这也是国家对保险业进行调控管理的一种手段。

所谓精算学，实际上是将数学方法应用于金融保险所形成的一套理论体系。它的基础包括精算数学、利息理论、风险理论、人口数学、修匀数学、生存模型和生命表构造等等，还包括一些更专门的内容。这一套理论的重要性和正确性，已经得到国际社会的公认。

在我国，虽然早在 1949 年就由中央人民政府批准成立了中国人民保险公司，但是，由于种种历史原因，在相当长一段时间内我国的保险业发展缓慢，人才培养远不能适应实际需要。特别是精算学的研究和精算人才的培养，未得到应有的重视。在保险业的实际运作中，也很少严格按照精算学的原理办事。这一切都影响了我国保险业的进一步发展及与国际接轨。这种情况已引起保险界、教育界和学术界的注意，正在采取积极措施改变现状。刚刚颁布的《保险法》更明确规定：“经营人身保险业务的保险公司，必须聘用经金融监督管理部门认可的精算专业人员，建立精算报告制度。”在此情况下，迫切需要引进国际上先进的精算学

理论,并结合我国的实际加以应用,本丛书就是在这样的背景下翻译出版的。

《保险精算丛书》(第一辑)是由复旦大学数学系、中国人民保险公司上海市分公司(以下简称人保上海分公司)合作翻译的,由上海科学技术出版社出版。全国政协副主席、中科院院士苏步青为丛书题写书名;复旦大学研究生院院长、中科院院士李大潜担任丛书主编;中国人民保险公司上海市分公司总经理何静芝、副总经理钱建中,上海市新闻出版局局长徐福生担任丛书总顾问。上海是我国保险业的发源地之一,历来是保险业的中心。成立于1950年的人保上海分公司,经过45年艰难曲折的发展,业务有了很大开拓,1994年已实现业务收入30亿元人民币,占上海保险市场的80%。根据市场的需要,公司已开办了财产、人身、责任、信用四大类约200多个险种。特别是作为公司主要业务之一的国内人身保险业务,1994年的业务收入已近12亿元。公司所开设的人身险种类也从1982年时的一种,扩展到各种形态的医疗保险、定期和终身保险及责任不同的各种人身意外伤害保险等多个品种,并逐步形成系列化。上海保险市场虽然在不断扩大,但竞争也日趋激烈。特别是一些实力雄厚的国际著名大保险公司的进入,促使国内各保险公司采取有力措施不断提高从业人员的业务素质,包括学习精算知识和培养精算人才。正是由于这样的需要,人保上海分公司决定与复旦大学数学系联手,在上海科学技术出版社的积极支持下,翻译了这套《保险精算丛书》。

复旦大学数学系不仅在数学的基础理论研究方面成就卓著,而且历来重视数学在国民经济中的应用,并取得多项重大研究成果。近年来,他们为了拓宽数学应用的领域,又开辟了精算学研究的新方向,并进行了大量的实际工作。他们在数学系研究生和本科生中开设了有关精算的课程和专题讨论,努力培养精算人才;他们还与各大保险公司合作,从事保险精算实际课题的研究,招收应用数学(保险)大专班,举办面向社会的保险精算培训班,培

训了一批人员参加 A.S.A (北美精算师学会准会员) 资格考试 (该项考试的上海考点就设在复旦大学内), 并于第一期考试中取得通过率超过 90% 的优异成绩。与人保上海分公司合作翻译这套《保险精算丛书》, 不仅是复旦数学系理论和实践相结合的一项新的举措, 也是他们面向社会培养国家急需的精算人才的重要措施。

“保险精算丛书” (第一辑) 共六本, 分别为:

- 《利息理论》, S.G. 凯利森著, 尚汉冀译;
- 《风险理论》, N.L. 鲍尔斯著, 郑韞瑜、余跃年译;
- 《精算数学》, N.L. 鲍尔斯著, 余跃年、郑韞瑜译;
- 《人口数学》, R.L. 布朗著, 郑培明译;
- 《修匀数学》, D. 伦敦著, 徐诚浩译;
- 《生存模型》, D. 伦敦著, 陈子毅译。

所依据的原书均是北美精算师学会 (Society of Actuaries) 为其准会员 (A.S.A) 资格考试所指定的教材和参考书, 具有一定的权威性。阅读这套丛书, 不论对读者了解和掌握精算学基本原理并应用于保险业实践, 还是对读者准备参加 A.S.A 资格考试 (该项考试在中国的北京、上海、天津、长沙等地已设有考点), 均会有很大帮助。

保险精算在我国是一项刚刚起步的新事物, 这套丛书是高等院校、保险公司和出版社三方共同合作, 编写翻译出版学术水平较高、填补国家缺门的专业书籍的一种有益的探索。我们热诚希望广大读者提出宝贵意见, 以利于我们改进工作, 做好这套丛书的出版工作, 促进保险精算事业在中国的发展。

编者谨识

1995 年 11 月于上海

目 录

第一章 总论	(1)
§1.1 修匀定义	(1)
§1.2 一个精算方向	(2)
§1.3 修匀的统计性质	(3)
§1.4 修匀作为统计估计的特殊性质	(4)
§1.5 光滑性	(6)
§1.6 修匀结果的光滑性检验	(7)
§1.7 修匀方法的分类	(8)
§1.8 总结	(9)
第二章 统计考虑	(11)
§2.1 引论	(11)
§2.2 一个简单的估计问题	(11)
§2.3 进入修匀	(13)
§2.4 类推到死亡数据	(16)
§2.5 记号汇总	(18)
§2.6 估计误差	(19)
§2.7 拟合检验修匀结果	(20)
§2.8 一个总结性实例	(24)
§2.9 参考标准表	(29)
§2.10 总结	(32)
练习	(33)
第三章 移动加权平均修匀	(40)
§3.1 引论	(40)
§3.2 基本公式	(40)

§3.3 误差缩减	(42)
§3.4 误差缩减的一个推广	(47)
§3.5 另一种阐述	(50)
§3.6 R_z^2 的约束极小化过程	(52)
§3.7 总结	(56)
练习	(56)
第四章 Whittaker 修匀	(65)
§4.1 引论	(65)
§4.2 基本修匀公式	(65)
§4.3 M 的极小化	(68)
§4.4 极小性证明	(71)
§4.5 Bayesian 阐述	(72)
§4.6 标准 Whittaker 型的若干变形	(76)
§4.7 总结	(82)
练习	(82)
第五章 Bayesian 修匀	(88)
§5.1 引论	(88)
§5.2 Bayesian 过程	(88)
§5.3 一个实例	(91)
§5.4 Kimeldorf-Jones 方法	(94)
§5.5 元素 $\mathbf{m}$, $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的确定	(98)
§5.6 Bayesian 修匀过程的另一实例	(102)
§5.7 总结	(105)
练习	(107)
第六章 参数修匀	(114)
§6.1 引论	(114)
§6.2 函数形式	(115)
§6.3 曲线拟合技术	(119)
§6.4 一个有趣的变形	(123)

§6.5 分段参数修匀 (样条)	(128)
§6.6 总结	(134)
练习	(135)
第七章 光滑连接插值	(142)
§7.1 引论	(142)
§7.2 光滑连接插值公式的性质	(143)
§7.3 导出四点公式	(149)
§7.4 导出六点公式	(151)
§7.5 确定枢轴点	(153)
§7.6 总结	(154)
练习	(155)
第八章 二维修匀	(160)
§8.1 引论	(160)
§8.2 先验观点	(161)
§8.3 修匀方法	(162)
§8.4 二维 Whittaker 修匀	(163)
§8.5 数学公式	(166)
§8.6 总结	(167)
练习	(167)
第九章 分析与评论	(171)
§9.1 引论	(171)
§9.2 参数选择	(171)
§9.3 方法选择	(173)
§9.4 进一步考虑	(174)
附录	(177)
附录 A 各章练习答案	(177)
附录 B 参考书目	(198)
附录 C 数值实例说明	(202)
附录 D 有限差分	(220)

汉英名词对照	(225)
译者的话	(231)

第一章 总 论

§1.1 修匀定义

许多作者曾对修匀过程下过定义。Andrews 和 Nesbitt 把修匀定义成：

“根据一个有其自身规律的自然现象的若干观察值，经过有规则的修正，力求能代表这个现象。” ([1], 第 2 页)

这个定义需要建立一个模型；这就是说，我们已经有了一个观察值的集合，它给予我们关于这个模型的初始信息，然后，去修正这些观察值，尽力改进我们的模型，使它可以作为基现象的代表。

Miller 把修匀叙述成：

“修匀是这样一种可靠的方法，根据一个连续变量的不规则的观察序列，用这种方法，可得到一个光滑的有规则的修正序列，与观察值序列相和谐。” ([46], 第 4 页)

Miller 方法与 Andrews 和 Nesbitt 方法一样，都认为对于某个基规律 (或基现象) 都给出了一个“不规则”的值序列，这些值应该被修正。把修正值序列取作基规律的代表。但是，Miller 方法，仅仅在“修正观察值”这个要求上，就有两个重要的样式，优于前一种方法。

首先，他提出修正值不应离初始 (观察) 值太远，这种被称为拟合的考虑，在修匀过程中，显然是所希望的。这将在第二章中作进一步的探讨。

其次，更有意思的是，Miller 的定义明显地假设了基规律本身是光滑的，有规则的和连续的。因为在修匀过程中通常的目标

是修正那些观察值，以便产生作为基规律的“更好”的代表，所以，Miller 关于基规律的性质的假设，更明确地给出修匀过程的方向。在 §1.5 将进一步探讨光滑性概念。

应该注意到以下事实：这两种定义都把修匀与修正初始观察数据看作是一回事，而并没有首先考虑如何得到这些数据。因此，这里提出的建模过程（至少）由以下两步组成：

1. 设法得到观察数据集，
2. 按照预先指定的准则，修匀（或修正）这个数据集，产生所假定的基规律的“较好”的代表。

§1.2 一个精算方向

因为本书主要是为精算师们而写的，所以，从精算角度考虑修匀问题将是有益的。

实施精算的更重要的任务之一是构造生存模型，根据这个模型计算保费值。这些模型通常是用表格形式表示的，通常称为死亡表（又称为生命表，这样称呼可减少一些悲观情调）。

假设建模工作的第一步工作业已完成，通过试验研究，产生一个关于某些特定年龄的死亡率（或概率）序列，这些死亡率是基于某个观察群体的试验而得到的，所以常被称为观察数据（在下一节中我们将指出，“观察”这个术语并不是关于这些数据的最恰当的专门术语）。

在许多其他书籍中含有这些试验研究的设计和过程。例如，Batten [2] 处理这个问题的方向是为保险公司建立养老基金数据，而 Elandt-Johnson 和 Johnson 的书 [11]，主要方向是收集临床数据。另外，许多书籍在很大范围内研究的是一般的人口数据，它是一般的人口统计学的一个组成部分。

这些观察死亡数据组成了假想的基规律或死亡模型的一个初始代表。此时，我们的建模工作的第二步，称为修匀的，就开始

了。我们着手初始数据的系统修正工作，其目标是产生关于那个未知的，基死亡模型的一个代表。它与已给的初始估计相比，要好一些。然而，要注意的是，所得的修正数据仍被看作基规律的一个代表，而不可不客气地把它看作是基规律本身。

此时，应该注意到，在我们的建模工作中应该有第三步。因为经过一次修匀，死亡数据将被改变（一般是改善了），这可适当地反映我们模型的这种期望改进。所以，这种模型可用来产生适用于将来的经济和人口数据。虽然，死亡设计这个论题是一个重要的论题，但它超出了修匀的范围，在本书中不作进一步讨论。因而，在我们的精算方向中，我们是把修匀看作一种尝试，去得到通用的有效的死亡率的最好代表。

§1.3 修匀的统计性质

在 §1.1 中引用的 Miller 关于修匀的定义，其言外之意是，修匀过程由两个方面组成，既要光滑观察数据，又要保持对观察数据的一定的拟合度。这在技术上是可行的，但这是远远不够的，它未能认识到修匀过程的统计性质。

早在 1887 年，King 就注意到这个问题，他说：

“什么是修匀的真正目的？许多人回答，‘去得到一个光滑曲线’；但这是不十分正确的。应该这样回答，‘去得到最可能的死亡率’。” ([36], 第 114 页)

八十年以后，Kimeldorf 和 Jones 说：

“我们看待这个修匀，不仅仅是作为光滑过程，而是更一般的作为对真变化率的估计过程，这个真变化率就是在人群中实际存在的变化率……” ([35], 第 126 页)

Whittaker 十分简明地叙述了修匀的本质。他说：

“修匀问题本质上属于关于概率的数学理论。” ([60], 第 303 页)

最后，免得给读者留下一个印象，好像 Miller 所讲的是一个不正确的修匀观点，我们找到了他的关于修匀的非常有说服力的优美的说法：

“我们仅仅有一个由有限次观察得到的观察概率序列，我们必须根据这个序列估计出未知的真的死亡率。采用这种观点，修匀问题是一个数学问题，它要求我们去估计或者得到真死亡率序列的一个代表，它被认为是根据观察概率的不规则序列而得到的。”([46], 第 6 页，加上重点号的)

Miller 的这一段引文，连同 Kimeldorf 和 Jones 的引文，给出了关于修匀的合乎理想的好定义。它允许我们把修匀问题纳入统计估计的范围，并属于序列估计的情形。由于承认了这个统计基础，我们就可用大家所熟悉的统计概念来介绍修匀，例如随机变量，平均值，方差，置信区间等等。

我们承认每个“观察”值真正是真基值的一个估计，这个真基值是在所考察的总体中真实的值。把某个统计估计过程应用到某个样本数据(这个样本取之于所考察的基总体)上就可得到估计值。除了在一些最简单的情形以外，估计值未必恰好是“观察值”，估计值是根据试验数据，藉助于某个选定的估计过程计算出来的。例如，极大似然方法或一个矩过程。鉴于这一点，在本书中，我们宁可用术语 初始估计 代替术语“观察值”，当我们修匀时，我们修正这个初始估计，于是得到真基值的一个修正估计(但仍然是个估计)。当然，我们是对整个的估计序列修正的。

§1.4 修匀作为统计估计的特殊性质

在我们已经得到初始估计序列以后，为什么还要去修正它们呢？为什么我们不把这些初始估计看成是那些要去估计的未知值的“最佳”估计呢？如果我们采用的估计过程是合理的，无可非议的，为什么还要去改变那些估计呢？

其回答就在于那些数据本身的性质。每一个初始估计是某个特种序列的一个元素。在这个序列的各个元素之间我们怀疑存在着一种很强的关系。按照这一种说法，并不是所有的数列都可以作为修匀的对象，只有某些类型的数列才适合于修匀，那就是这样一种数列，相信在其各元素之间存在某些关系。各个年龄的死亡率就是一个明显的例子。在 Henderson [21] 的关于修匀的开创性工作中，把这种数据称为 序列统计。

特别地，Elphinstone 在处理死亡率时，也认为修匀必须有这种假设，就是在邻近的死亡率之间存在某种关系。如果不要这种关系存在，那末修匀将是不妥当的，不能把初始估计修正成“最佳”估计。Elphinstone 直截了当地说：

“修匀理论是相邻变化率之间的相互关系的理论……” ([12], 第 18 页，加上重点号的)

现在我们可以弄明白为什么我们的初始估计序列需要修正。在大多数情形下，这个序列中的每一个元素是彼此独立地得到的，也就是说，不承认“相邻变化率之间有关系”。而当我们修匀这些初始估计时，这些关系是被承认存在的，且将反映在它们的修正估计上。

一般地说，现在我们要处理的是 知识 (也许我们应该说成是信念)，它就是我们所知道的关于所考虑的序列的性质。这种知识是不依赖于初始估计所包含的信息的，也就是说，我们所说的知识 (或者信念，或者观点)，在获得初始估计之前就已经有了。所有这些知识的总体，称为我们的 先验观点。

先验观点的如此广泛的含义使得修匀工作与一般统计估计中所做的工作相距甚远。在许多情形下，统计估计是基于观察数据本身 (它不考虑或几乎不考虑其他因素)；在这种情况下，我们的初始估计可作为最终估计。但是在修匀中，我们的最终估计是基于初始估计 (观察数据)，也基于关于所考虑序列的先验观点。

所有的修匀方法，以不同的方式或多或少地反映了应用先验

观点这个原则。在本书中所叙述的各种修匀方法中，我们将始终用先验观点这个名称（当它出现时）。我们将会看到，先验观点可以非常随意地表示出来，也可以有很大程度的拘泥性，如在第五章中的 Bayesian 方式中那样。

§1.5 光滑性

无疑地，精算师们在修匀死亡率（或其他减少率）时所常用的先验观点的要素，总是基于这样一种信念，那就是真变化率形成一个在某种意义上光滑的序列。这种最初的直观信念确实是被实践经验所证实的。另外，对于光滑性目标有一个明确的实际的要求，这正如 Milles 所说的：

“为了计算保费，责任准备金，年金等等，精算师总希望运用他的死亡率表。如果这些死亡率不是有规则的和连续的，那末他将什么也得不到。在表中各个年龄的死亡率变幻莫测的不规则性搅乱了保费等有规则的增长趋势，这些数应该是有某种规律性的，这样就显得不协调了。另外，这种不规则性也将引起对整个死亡率表的合理的怀疑。”（[46]，第 6 页）

由于不管在理论上还是在实际上，无可争议地要求有某个光滑性准则，所以在修匀方法中应用先验观点时，光滑性要求一直是举足轻重的事情，有时甚至于是仅有的要求。实际上，由于如此着重强调光滑性，致使在许多人的头脑中，把“修匀”和“光滑”这两个词看成是同义语。这种常见的过于简单的说法就产生了在 §1.3 中被 King 引用的即时回答这一段话。

我们应该承认这种过于简单化的倾向是很可理解的。仅仅根据上面所说的实际理由，在修匀过程中，光滑性准则的一些要求也是非常需要的。它能作为我们先验观点的要素，其理由也是最明白和最无可非议的，而且最容易引入我们的修匀过程。

在这里，我们不想怀疑光滑准则的运用；实际情况是，恰恰