高等学校教学用書

微分几何教程

C. П. 芬尼可夫著

高等教育出版社

高等学校教学用書

微分几何教程

С. П. 芬尼可夫著
施祥林　徐家福譯

高等教育出版社

本書係根據蘇聯國立技術理論書籍出版社（Государственное издательство технико—теоретической литературы）出版的芬尼可夫（С. П. Фиников）著"微分幾何教程"（Курс дифференциальной геометрии）1952年版譯出。原書經蘇聯高等教育部審定爲國立大學教科書。

本書內容分緒論，曲線論，曲面論，微分幾何發展史簡述及附錄五部分。

參加本書翻譯工作的有南京大學施祥林、徐家福二同志。

微 分 几 何 教 程

С. П. 芬尼可夫著

施祥林　徐家福譯

高 等 教 育 出 版 社 出 版

北京琉璃廠一七〇號

（北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號）

商務印書館上海廠印刷　新華書店總經售

書號 13010·83　開本 850×1168 1/32　印張 11 1/16　字數 282,000

一九五四年七月上海第一版

一九五七年一月上海第五次印刷

印數 8,501—11,500　　定價(8) ¥ 1.30

序

這本微分幾何教程是按大學物理數學系和力學數學系的微分幾何教學大綱而寫成的，但是具有某些特點。

因爲在無窮小的解析教程中通常已研究過平面曲線的初等性質，我認爲把平面曲線看做空間曲線的特別情形是可能的。因此在緒論的第一部分一開始便向讀者介紹簡單曲線弧（平面的與空間的）與簡單曲面片的初等幾何概念。除了基本的定義以外，這裏還研究了它們與一階導數有關的最簡單的性質。

用參變方程或是用未曾就一個流動坐標解出的曲線方程來定義曲線時將引用隱函數的存在定理。爲使讀者方便起見，這些定理都放在附錄中而不加證明，本書就是以這些定理爲基礎而編成的。完全同樣地，在附錄中也提出了矢函數微分法的全部理論，這理論無疑地祇是解析學的一部分，但是在微分幾何中卻被廣泛地運用着。

在緒論的兩節中闡明了由一個未曾解出的方程所給定的平面曲線（或曲面）之奇異點的討論方法。用微分幾何的方法來描繪平面曲線的問題則是這個理論的自然應用。我僅在書末詳細分析三個例子。

由參變方程給定的曲線之奇異點的討論則在較遲一些來考慮，同時對於平面曲線與空間曲線，採用那些使得全部討論非常簡單的不變矢量的方法。不變矢量（與純量）的概念對全部教程而言具有基本的意義。可以說，微分幾何教程就是由對於空間運動羣的與可以容許參數變換的微分不變式的理論所構成。

此處自然地發生了曲線（或曲面）上的點的這一階或那一階的微分鄰域的概念。如所熟知，微分不變式是由流動坐標關於參數的導數的階數來分階的，藉助於它們，這些不變式可以被寫出。包括直到 n 階的微分不變式確定了 n 階微分鄰域，具有 n 階接觸的曲線在切點有共同

的 n 階微分鄰域。

本書的另一特點是在研討與曲線或曲面的點相關聯的三面形的移動時,運動學見解的廣泛運用。這不僅使得曲線或曲面的研究更明顯,而且可以給曲面論的基本方程以全部概括的結論。這些方程,特別是關於高斯曲率的定理,被應用於討論曲面的貼合。此處挑出常曲率的曲面,作爲在其本身的幾何中容許重合圖形的概念。關於曲面上幾何學的一般研究將以擬球面與羅巴切夫斯基平面的幾何結構來終結。

此後接着是從萊布尼茲到現在爲止的微分幾何發展歷史的簡述,特別是,在莫斯科大學的微分幾何的發展。

最後,我要特别愉快地提到當我致力於這本書時從各方面得到同志們的意見和指正。例如,Д. И. 皮芮皮爾金給了我非常重要的幫助,他是我的手稿的校閱者並且給了我以或大或小註解的筆記。還須提到 С. А. 亞羅夫卞婭和 А. П. 由希開維奇的合作,沒有他們的友誼幫助,我幾乎不能寫出微分幾何發展史簡述的這一部分。

對矢函數微分法不熟悉的讀者,請注意:在開始研究曲線論(第一篇)時,他應該熟悉了附錄 II (第 316 頁) 的內容。凡有必要時可以參考附錄 I (隱函數的存在定理)。至於附錄 III (補充問題),它可以與緒論同時去研讀。

標有星號的節在第一次讀時可以删去。

目　　錄

緒　　論

第一篇　曲線論

第二篇 曲面論

附錄

緒　論

微分幾何是以解析幾何爲基礎，並廣泛地運用着數學解析——首先是微分學——的方法，來研究幾何形象(曲線、曲面等等)的。

爲了了解微分幾何的任務起見，首先必須確定我們將如何了解關於曲線、曲面諸術語的定義。旣然微分幾何根據曲線與曲面的方程來研究它們，於是問題就在於：這些方程必須加上怎樣的限制，才能定義今後我們所說的曲線或曲面。

§1. 平面上曲線的定義

1. 簡單曲線弧　有三種定義平面上曲線的方法：(1)用一個方程定義曲線上的點的一個笛卡兒坐標爲另一個坐標的顯函數，(2)用一個方程定義一個笛卡兒坐標爲另一個坐標的隱函數，(3)用兩個方程定義點的兩個笛卡兒坐標爲某一輔助參數的函數。當方程中所包含的函數，合於某些條件時，這些方法中的每一種方法都定義着平面上的曲線，雖然這些定義會導出若干不同的結果來。

若利用第一種方法，將得到最簡單的結果。

定義　坐標滿足方程

$$y=f(x) \tag{1}$$

的點的軌跡，稱爲平面上的簡單曲線弧，其中橫坐標 x 在線段

$$a\leqslant x\leqslant b$$

中取值，並且在這線段上函數 $f(x)$ 是單值連續的，且有連續的導數。

簡單弧具有一系列值得注意的性質 不難看出，當橫坐標 x 由 $x=a$ 增至 $x=b$ 時，點 $M(x, y)$ 從對應於 $x=a$ 的點 A 移動到對應於 $x=b$ 的點 B，其所經路程依一個方向恰是曲線弧 AB。弧上點 $M(x, y)$ 與橫軸上線段 (a, b) 的點一一對應着。由此推知，簡單弧不能本身相交。

爲了闡明簡單弧在其內點的鄰域內的構造起見，我們來研究通過弧 AB 上某一內點 $M_0(x_0, y_0)$ 的直線

$$Y-y_0=k(X-x_0), \tag{a}$$

自弧上一點 $M(x, y)$ 至直線（a）的距離是由從點 M 至直線所引的垂直線段 MP 來確定，其絕對值等於直線（a）的法式方程的左邊，將流動坐標換成點 $M(x, y)$ 的坐標：

$$MP=\frac{f(x)-f(x_0)-k(x-x_0)}{\sqrt{1+k^2}}。$$

由於導數 $f'(x)$ 的連續性，根據關於函數有限改變量的定理，便有：

$$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+\varphi(x, x_0)(x-x_0),$$

其中函數 $\varphi(x, x_0)$ 當 $x\to x_0$ 時爲無窮小。將上一表達式代入，我們就可以得到求距離 MP 的公式：

$$MP=(x-x_0)\frac{f'(x_0)-k}{\sqrt{1+k^2}}+(x-x_0)\varphi(x, x_0)\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}。$$

由此推知，對於所有的數值 $k\neq f'(x_0)$，距離 MP 與點 M 和 M_0 的橫坐標的差 $x-x_0$，也就是，與距離 MM_0，爲同階無窮小，而僅當直線具有斜率 $k=f'(x_0)$ 時，距離 MP 的無窮小的階才會增高；因爲這時比

$$\frac{MP}{x-x_0}=\frac{\varphi(x, x_0)}{\sqrt{1+k^2}}$$

當 $x\to x_0$ 時趨於 0。

在解析學教程中，方程

$$Y-y_0=f'(x_0)(X-x_0) \tag{2}$$

是當割線與曲線的兩個交點相重合時割線的極限位置的方程，而這直

線本身稱爲切線。

定理 在每一內點的一鄰域中，簡單弧是這樣的趨近於它的切線，使得由它的點到切線的距離之無窮小的階比較由它的點到切點的距離之無窮小的階要高。

我們看到，在簡單曲線弧（1）的每一內點有一切線，當切點 $M_0(x_0,y_0)$ 在弧上移動時，這切線連續地轉動着。我們所採取的定義在簡單弧的概念上加了一個補充的與坐標系的選擇有關的限制：不論在曲線弧上的那一點，切線都不平行於縱軸，因爲此時斜率將變爲無窮，這便和函數（1）在線段 (a,b) 上的全部點均有確定的導數相矛盾了。

爲了除去這一限制，最好轉來討論曲線的參變表示。

2. 曲線的參變表示 **定義 I.** 坐標由方程

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t) \tag{3}$$

所定義的點的軌跡，稱爲平面上的曲線（正則段），若參數 t 經歷區間

$$a<t<b$$

中的數值，並且在這區間中函數 $\varphi(t)$，$\psi(t)$ 是單值連續的，並且有不同時爲 0 的連續一階導數，也就是說，滿足不等式

$$\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)>0。 \tag{4}$$

推論 在正則區間 (a,b) 的每一內點的一鄰域內，曲線表示一簡單弧。

實際上，根據不等式（4），對於區間 (a,b) 中的每一個數值 $t=t_0$，導數 $\varphi'(t)$ 或 $\psi'(t)$ 必有一個不等於 0，若

$$\varphi'(t_0)\neq 0,\quad 且\quad \varphi(t_0)=x_0, \tag{5}$$

則（3）的第一個方程可以就 t 解出，也就是，這方程可以取始點 $x=x_0$ $t=t_0$，在這點附錄 I 中第 1 節的條件與組（5）一致，因爲

$$\frac{\partial}{\partial t}[\varphi(t)-x]=\varphi'(t)。$$

因此，有一個解且祇有一個解：

$$t=\Phi(x) \tag{6}$$

存在，它滿足（３）的第一個方程，並且當 $x=x_0$ 時取值 $t=t_0$。

將表達式（６）代入（３）的第二個方程中，我們將它化爲（１）的形式。

若 $\varphi'(t_0)=0$，則 $\psi'(t_0)\neq 0$，於是我們可以將（３）的第二個方程就 t 解出，有一個解並且祇有一個解

$$t=\Psi(y) \tag{a}$$

存在，它滿足（３）的第二個方程並且當 $y=y_0$ 時取值 $t=t_0$。將表達式(a)代入(3)的第一個方程中，便得到方程 $x=F(y)$。若改變軸的名稱：用 y 表 x 軸，而用 x 表 y 軸，它便變爲方程（１）。反之，用方程（１）所定義的函數，可以表爲參變形式。置 $x=t$，從而方程（１）便給出 $y=f(t)$。

當 t 由 $t=a$ 變到 $t=b$ 時，點 $M(x, y)$ 這樣的經歷弧 AB，使得在區間 (a, b) 中的每一個數值 t 對應於弧 AB 的一點。反過來是不對的：曲線的同一點可以對應於參數 t 的不同的數值（參看補充問題第 21 節）。若我們來限制參數 t 的變化區間 (a, b)，以使弧 AB 的每一點祇對應一個數值 t，則曲線（３）和簡單曲線弧所不同的祇是切線的方向不受補充條件（與 y 軸的不平行性）的限制。

定義 II.　對於在線段 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的數值 t，若具有連續一階導數的函數 $\varphi(t)$，$\psi(t)$，在這線段上滿足不等式（４）並且在弧上的點與線段上 t 的數值之間定義一一對應，則（３）的點的軌跡便稱爲廣義的簡單弧。

這個簡單弧的定義比以前的定義（第１節）更爲廣泛：它除去了補充條件（切線與縱軸的不平行性）。

另一方面，若去掉正則性的條件（４）並且考慮那些使兩個導數 $\varphi'(t)$ 與 $\psi'(t)$ 均爲 0 的數值 t，則關於切線存在性的問題的解決需要另外更深入的討論，並且答案可能是否定的。

若函數在所考慮的區間內是解析的（參看附錄 I 第３節），則由

方程(3)所定義的軌跡將表示一曲線，它由一些失去正則性的點——此處兩個導數 $\varphi'(t)$ 與 $\psi'(t)$ 均為0——所分開的若干正則曲線段所組成。可能在失去正則性的條件的點的一鄰域中，曲線表示一簡單弧，在曲線上點的一鄰域中曲線不是簡單弧的點稱為曲線的奇異點。

在奇異點的一鄰域中，解析曲線形狀的討論，我們將在第四章§4中來進行。

3. 切線與法線　現在來考慮由方程(3)所定義的曲線，其中 $\varphi(t)$, $\psi(t)$ 是連續可微函數，在區間 (a, b) 中滿足條件(4)，並且它的點 $M_0(x_0, y_0)$ 對應於區間內的值 $t=t_0$。根據由參數所給定的函數的微分法則，若 $\varphi'(t_0)\neq 0$，則在點 $t=t_0$，我們有 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y_0'}{x_0'}$，而若 $\varphi'(t_0)=0$，但 $\psi'(t_0)\neq 0$，則 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{x_0'}{y_0'}$。

在兩種情形下，切線方程具有如下的形式：

$$(X-x_0)y_0'=(Y-y_0)x_0', \tag{7}$$

其中

$$x_0'=\varphi'(t_0), \quad y_0'=\psi'(t_0)。$$

根據不等式(4)導數 x_0' 或 y_0' 必有一個不等於0；因此，在區間 (a, b) 上弧的任何點，切線是存在的，並且當切點在正則區間上移動時，切線連續地轉動着。

在切點與切線相垂直的直線稱為法線。法線是由方程

$$(X-x_0)x_0'+(Y-y_0)y_0'=0 \tag{8}$$

來確定的。

實際上，直線(8)，顯然通過切點 $M_0(x_0, y_0)$。

直線(7)和(8)的斜率

$$k=\frac{y_0'}{x_0'} \quad 和 \quad k^*=-\frac{x_0'}{y_0'}$$

數值上互為倒數且符號相反，因此，直線(8)垂直於切線(7)，因而它是法線。

4. 方程 $F(x, y)=0$　若在某一區域 $\mathfrak{A}$ 內，函數 $F(x, y)$ 具有連續

一階偏導數，則根據隱函數的存在定理（參看附錄Ⅰ第1節）與第1節的定義，通過每一個其坐標滿足方程

$$F(x, y)=0 \tag{9}$$

的點 $M(x, y)$ 有一（且祇有一條）簡單曲線弧，其上每一點的坐標滿足方程（9），祇須偏導數 F_x, F_y 在點 M 不同時等於0，也就是，祇須滿足不等式

$$(F_x)^2+(F_y)^2 \neq 0。 \tag{10}$$

在其每一點的一鄰域內曲線都是一簡單弧的這樣的曲線段稱為曲線的正則段。

區域 $\mathfrak{A}$ 內的滿足三個方程

$$F(x, y)=0, \quad F_x(x, y)=0, \quad F_y(x, y)=0 \tag{11}$$

的點稱為奇異點。在這些點正則性的條件(10)不成立。可能有曲線的若干支通過一奇異點，其中每一支都表示一條簡單弧。

為了能夠用微分幾何的方法來研討曲線（9）在其奇異點的一鄰域內的構造起見，必須假定更高階的偏導數的存在，特別是，可以假定函數 $F(x, y)$ 在奇異點的一鄰域內是解析的。代數曲線奇異點的討論還更有價值。代數曲線由方程（9）所定義，其中函數 $F(x, y)$ 是多項式，在此種情形下，可以把整個平面上的曲線看做是坐標滿足方程（9）的點的軌跡。

我們將在§4中來考慮曲線（9）的奇異點的最簡單的情形。

5. 由隱式方程所給定的曲線的切線 現在來考慮由方程（9）所給定的曲線，其中 $F(x, y)$ 是連續可微函數，在平面上的閉區域 $\mathfrak{A}$ 內滿足條件(10)，而點 $M_0(x_0, y_0)$ 是位於這區域內曲線上的點。在點 M_0 的一鄰域內，可以就橫坐標 x 或縱坐標 y 解出的方程來給定曲線。此方程可表示為參變形式（3），切線與法線便由方程（7）與（8）來確定。

現在在方程（9）中用函數（3）代替 x 和 y，我們便得到一個恆等式，它在正則區域內可以對 t 微分。作為複合函數來微分，我們得到