湍流研究最新进展

——中国科学技术协会青年科学家论坛第41次活动论文集

王晋军　符　松
孟庆国　邓小刚　主编

科学出版社

湍流研究最新进展

——中国科学技术协会青年科学家论坛第41次活动论文集

王晋军　符　松
孟庆国　邓小刚　主编

科 学 出 版 社

2001

内 容 简 介

本书是中国科学技术协会主办的“青年科学家论坛”第41次活动论文集。所收集的论文分属“湍流数值模拟”、“湍流基本结构及控制”、“湍流稳定性与边界层转捩”及“湍流对流与传热传质”四个单元主题，反映了湍流研究的最新进展。

本书可供从事湍流研究的科技人员及相关领域的研究人员参考.

图书在版编目（CIP）数据

湍流研究最新进展：中国科学技术协会第41次青年科学家论坛集/王晋军，符松等主编.-北京：科学出版社，2001.2

ISBN 7-03-008456-X

Ⅰ.湍… Ⅱ.①王… ②符… Ⅲ.湍流-研究-中国-文集 Ⅳ.O357.5

中国版本图书馆CIP数据核字（2000）第06565号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

源海印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2001年2月第一版 开本：787×1092 1/16

2001年2月第一次印刷 印张：13 3/4

印数：1—1 000 字数：317 000

定价：32.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈杨中〉）

序　言

中国科学技术协会主办的“青年科学家论坛”第41次活动于1999年6月14～15日在中国科技会堂举行，来自全国各科研院所、大专院校的近20名青年学者参加了这次活动．中国科协学会部部长、“论坛”组委会主任马阳，中国科协学会部副部长、“论坛”秘书处秘书长周济，国家自然科学基金委员会数理学部孟庆国博士出席了论坛活动，马阳主任作了重要讲话．

本次论坛由清华大学符松教授、中国空气动力研究与发展中心邓小刚研究员、北京航空航天大学王晋军教授担任执行主席．论坛以“湍流数值模拟”、“湍流基本结构及控制”、“湍流稳定性与边界层转捩”、“湍流对流与传热传质”四个单元主题进行了交流；分别由桂业伟研究员、佘振苏教授、罗纪生教授、刘宇陆教授、吴锤结教授、夏克青教授、王立秋教授、吴子牛教授担任单元主题的主持人．“论坛”活动期间，大家踊跃发言，对湍流研究的现状和我国未来湍流研究的发展提出了许多意见和建议．通过“论坛”的交流加强了青年学者之间的了解和沟通，也就一些重要问题达成一定的共识．

1. 湍流是非线性复杂系统研究的基础学科

世纪之交科学的发展，已越来越明显地表明，人类对非线性系统和复杂性的认识上正经历着巨大的飞跃，但在研究方法上还需要有更大的突破．许多与国民经济发展密切相关的重大科学问题（如航空航天工业中的控制问题，灾害性气象气候的预报问题等）都涉及到多尺度多层次的复杂系统．对湍流这一世纪性难题的研究，曾经直接引发了非线性科学与混沌学的诞生和发展．20世纪90年代，我国旅美学者佘振苏教授（现担任北京大学湍流研究国家重点实验室主任）提出的湍流层次结构理论，在概念上和方法上对多尺度多层次的湍流系统提出了崭新的见解．佘振苏教授介绍了这几年湍流层次结构理论在国际湍流界引起广泛关注及获得大量实验验证的情况，引起与会的广大青年学者的浓厚兴趣．大家一致认为，湍流研究正在不断涌现新思想、新思路，湍流研究的开拓必将带动非线性科学的进一步发展．我国的湍流研究需要进一步加强协作，相互支持，在一些重大湍流问题上凝聚力量，必将有所成就，并带动一批相关学科的发展．

2. 湍流数值模拟的研究是重点

清华大学符松教授指出：“湍流数值模拟是进一步加深对湍流本质认识的有效工具．直接数值模拟为湍流模式的建立提供依据，而最有实际应用前景的是大涡模拟：应集中力量开发适应于复杂流动的大涡模拟算法”．中国空气动力研究与发展中心的邓小刚研究员介绍了近年来我国学者对高精度紧致格式的研究进展．北京航空航天大学吴子牛教授近年来对流体计算方法的分析颇有建树；另有多位学者介绍了他们在应用大涡模拟生态环境保护及航空航天工程计算上的成果．

代表们一致认为，我国青年学者有必要在新的湍流物理思想的指导下，开发研究新型的湍流模拟计算方法，并与工程科学及环境科学的问题接轨．湍流数值模拟计算是连接湍流理论与应用的桥梁．计算机工业的发展，为我们提供了良好的条件．吴锤结教授

认为在未来的数年中，建设若干个湍流数值研究中心，不但是必要的，也是可行的.

3. 亟须加强湍流实验研究

这次参加论坛的青年学者，只有为数很少的几位是从事湍流实验研究的. 清华大学李存标副教授介绍了他在实验研究湍流拟序结构上取得的成果，及他提出的孤粒子拟序结构的新概念. 香港中文大学的夏克青教授近几年来对 Rayleigh-Bénand 热对流的湍流状态作了细致的实验研究，他的报告引起大家广泛的兴趣，使与会青年学者对香港学术界的动态有了较多的了解；天津大学的姜楠副教授应用子波分析方法分析近壁区湍流实验测量数据，他坚持湍流实验研究，给大家留下了深刻印象.

与会的代表感到，尽管我国湍流实验研究有一些设备，有一定的基础，但实验研究队伍的年轻化迫在眉睫. 没有稳定、优秀的湍流实验队伍，我国的湍流研究将会在理论的深入发展与应用上遇到巨大的阻力，对把湍流研究成果转向生产，为经济建设服务也将无法实现.

本次论坛活动汇聚了我国青年湍流研究的主要精英人才，他们来自各个不同的研究领域，有从事基础理论研究者，也有从事工程应用研究者，其中有获得长江学者计划的特聘教授，有国家杰出青年基金获得者. 通过两天的交流、交谈，大家增强了相互的了解，增进了友谊，加强了团结协作，并增强了把我国的湍流研究事业发扬光大的决心和勇气. 本论文集汇编了大部分与会青年学者在湍流研究方面取得的最新进展和成果，从一个侧面代表了我国湍流研究的水平，本论文集的出版将有助于增进学术交流，促进我国湍流研究水平的提高.

编　者

1999 年 8 月

目　　录

湍流脉动的层次结构描述…………………………………………… 佘振苏，苏卫东（1）
By-pass 转捩的湍流模式研究 ………………………………………… 陈　瀚，符　松（17）
沟槽面湍流减阻研究进展……………………………………………………… 王晋军（40）
湍流直接相互作用原理与湍流逆输运………………… 刘宇陆，蒋剑波，卢志明（50）
壁湍流多尺度湍涡结构标度律的实验研究………………………………… 姜　楠（58）
在水垫塘内淹没冲击射流中的大尺度涡结构及其特征…………………… 刘沛清（74）
湍流大涡模拟及其在地球界面流动中的应用…………………… 谢正桐，李家春（83）
湍流发生的确定性物理过程…………………………………………………… 李存标（94）
近壁湍流对称与非对称相干结构演化机理的比较………………………… 陆昌根（102）
湍流数值模拟在工程应用中的一些问题研究……………………………… 李　栋（106）
湍流的分形特征……………………………………………………………… 黄真理（113）
三维混合层中的大尺度结构的演化………………………………………… 罗纪生（131）
超声速 Couette 流动稳定性直接数值模拟方法研究 …………… 邓小刚，毛枚良（145）
无数据库最优低维动力系统建模理论及其在 Lorenz 系统分析中
　　的应用……………………………………………………… 吴锤结，赵红亮（154）
Well-Posedness of a Turbulent Boundary Layer ……………………………… Ziniu Wu（177）
Physical Constraints of Turbulence Modeling ……………………………… Liqiu Wang（189）
Heat Flux Scaling in Turbulent Convection ………………………………………………
　　…………………………………… Ke-Qing Xia, Siu-Lung Lui, and Xin-Liang Qiu（208）

湍流脉动的层次结构描述*

余振苏[1,2]　苏卫东[1]

(1 湍流研究国家重点实验室,北京大学力学与工程科学系,北京　100871)

(2 Department of Mathematics, University of California, Los Angeles, CA 90095, U.S.A)

摘　要　本文简要介绍了湍流层次结构模型(She, Leveque, *Phys. Rev. Lett.* 1994, 72, 336),着重于讨论该模型与两种重要的湍流唯象理论描述方法,即多分形描述和脉动级串随机映射描述之间的关系.在讨论湍流脉动级串随机映射一般理论的基础上,指出了标度律与概率论中的无穷可分分布性质的联系证明了级串随机映射的对数 Poisson 分布是 SL 标度律的必然结果.最后对层次结构模型的进一步研究进行了展望.

关键词　湍流,层次结构,脉动级串,标度律,多分形

1. 引　言

湍流是连续介质表现出的最为复杂的宏观运动.在高雷诺数的湍流运动中,由于强烈的非线性作用,外部扰动激发的流体脉动不断地从大尺度向小尺度传递,脉动分布在很宽的尺度(通常根据傅里叶谱上的波数范围来判断)和幅度范围上.例如,在大气湍流中,从尺度 10^6 m 的大气旋到尺度 10^{-4} m 的最小涡旋范围内,都存在着脉动.湍流工程应用通常更多地关注湍流场的平均性质,而基础研究则试图揭示湍流多尺度、多幅度脉动的机理和普适规律.

在充分发展的湍流中,以积分尺度为界可将脉动粗略地划分成大尺度和小尺度两种类型.大尺度脉动依赖于具体的流动环境(边界条件),而小尺度脉动则表现出更多的普适性[1,2].根据 Richardson 最早提出的脉动由大尺度向小尺度逐级传递的级串(cascade)图像[3],小尺度脉动的普适性可以解释为边界条件的影响在级串过程中逐步丧失,小尺度上的脉动趋于各向同性.但目前对于湍流小尺度脉动的普适规律还无法根据高雷诺数下 Navier-Stokes 方程解的性质从理论上预测或解释,只能通过实验配合进行一些雷诺数不太高的直接数值模拟进行观测,通过唯象方法进行研究.其中数学大师 Kolmogorov 1941 年提出的湍流理论[4~6](简称 K41 理论)对半个多世纪以来的湍流基础研究产生了深远的影响.

K41 理论最成功的预测是湍流中标度律的存在.在该理论中,充分发展的湍流在小尺度上被认为是局部均匀各向同性的.大尺度的旋涡不断分裂成更小尺度的旋涡,动能由大尺度向小尺度不断传递,最后在黏性作用下耗散掉.在雷诺数充分高时,小尺度脉动达到一种统计定常状态,在尺度空间耗散区和大尺度含能区之间形成一惯性子区 $\eta \ll l \ll L$,其

* 国家杰出青年科学基金和北京大学校长基金资助项目.

中所有脉动量只依赖于尺度 l 和平均能量耗散率 ε，与流体的黏性系数 ν 无关. 这里 $\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$ 代表黏性耗散尺度，L 是积分尺度. 引入脉动速度结构量 $\delta\nu_l = \nu(x+l) - \nu(x)$ 为流场中距离为 l 的两点某一方向(通常取沿着两点连线的纵向方向或垂直于两点连线的横向方向)脉动速度分量之差(也可理解为尺度 l 上脉动速度的典型值). 当 l 在惯性范围内时，根据量纲分析可以得出

$$\delta\nu_l \propto (\varepsilon \cdot l)^{1/3}, \qquad <\delta\nu_l> \propto l^{1/3} \tag{1.1}$$

这里 $<\cdot>$ 代表平均值. 如果从尺度变换的角度考虑，当尺度从 $l \to \lambda l$ 时，就有 $\delta\nu_{\lambda l} = \lambda^{1/3}\delta\nu_l$，$<\delta\nu_{\lambda l}> \propto \lambda^{1/3} <\delta\nu_l>$，即脉动速度结构场有标度指数 1/3. 对于 2 阶脉动速度结构量 $\delta\nu_l^2$，有

$$<\delta\nu_l^2> \propto (\varepsilon \cdot l)^{2/3} \propto l^{2/3} \tag{1.2}$$

于是对于惯性区脉动速度的能谱函数 $E(k)$，有

$$E(k) \propto \varepsilon^{2/3}k^{-5/3} \propto k^{-5/3} \tag{1.3}$$

K41 理论预测的(1.2)和(1.3)这两个标度律已为大量的实验和数值模拟证实(见[1]所引参考文献)，分别被称为湍流速度的“2/3 定律”和湍流能谱的“-5/3 定律”. 对于任意 p 阶速度结构函数 $<|\delta\nu_l|^p>$(即脉动速度结构量的 p 阶矩)，K41 理论预测

$$<|\delta\nu_l|^p> \propto (\varepsilon \cdot l)^{p/3} \propto l^{p/3} \tag{1.4}$$

即 p 阶速度结构函数在惯性区有标度指数 $p/3$.

对于 3 阶速度结构函数，当 $Re \to \infty$ 时，在均匀和各向同性的假设下由 NS 方程可以导出一个精确结果[6,7]：

$$<|\delta\nu_l|^3> = -\frac{4}{5}\varepsilon \cdot l \propto l \tag{1.5}$$

这就是著名的 Kolmogorov 4/5 定律，也为大量的实验证实. 显然，(1.5)式符合 $p/3$ 的标度律.

标度律是充分发展湍流小尺度脉动最有趣的统计规律，它反映了小尺度湍流场在尺度变化下的某种自相似性或不变性. 从一般的观点上看，由于标度律是一大类复杂现象(如相变、自组织临界性等[8])表现出的共同规律，标度律在湍流中的存在引导人们将湍流纳入更广泛的所谓复杂性系统，进一步探索复杂性背后的简单规律.

K41 理论提出后，人们对于充分发展湍流惯性区脉动的统计规律进行了大量的实验和数值研究，发现 p 阶速度结构函数虽然符合标度律，但在 $p>3$ 时标度指数 ζ_p 却偏离理论预测值 $p/3$，p 越大偏离越明显，这就是所谓的反常标度律(anomalous scaling)或间歇现象(intermittency)* [9~11]. Kolmogorov 本人在 1962 年也提出了修正自相似假设(refined self hypothesis，简称 RSH)对标度律进行修正[12]. 注意到能量耗散率在空间分布的不均匀性，他将(1.1)式修改为

$$\delta\nu_l \propto (\varepsilon_l \cdot l)^{1/3} \tag{1.6}$$

其中 ε_l 代表耗散率在尺度为 l 的球内的平均值，这也是一个脉动量. 由此可得 ε_l 的标度指数 ζ_p^ε 和 ζ_p 有如下关系

* 间歇现象通常也指在一点观测到的脉动信号经过傅里叶变换高通滤波后在高频段间隔出现的脉动猝发，或者指脉动结构函数偏离正态分布. 还有一种所谓外间歇是指在较大的时间和空间尺度上层流与湍流交替出现导致信号本身间隔性地呈现脉动和平稳的间歇性现象.

$$\zeta_p^v = p/3 + \zeta_{p/3}^\epsilon \tag{1.7}$$

这一重要关系得到了实验和数值模拟的支持[13~16]. Kolmogorov 进一步假设 ϵ_l 符合对数正态(lognormal)分布,得到

$$\zeta_p^\epsilon = \mu p(1-p)/2; \quad \zeta_p^v = p/3 + \mu p(3-p)/18 \tag{1.8}$$

其中 $\mu = 2 - \zeta_6 \approx 0.22$,这就是著名的对数正态模型. 尽管该模型在 $p < 10$ 的通常的实验范围内与实验结果符合,但当 p 较大时由于 ζ_p 呈递减趋势而导致出现无穷大的速度,违反了标度律的约束条件[11].

反常标度律和 RSH 以及对数正态模型提出以来,人们提出了很多唯象模型来对 K41 预测的线性标度律(1.4)进行间歇性修正,以解释实验结果[17~23]. 尤其是 1993 年 Benzi 等人从实验上发现适用范围更广的湍流小尺度的扩展自相似律(extended self similarity,简称 ESS)[24~27]和广义扩展自相似律(general extended self similarity,简称 GESS)[28,29]以来,标度指数测量的精度得到很大提高[29,30],进一步证实了反常标度律的存在. 限于篇幅,我们这里不准备介绍 ESS 和 GESS,但要指出,这两种标度律不是关于尺度的,而是不同阶脉动矩之间的幂次关系,因而是湍流中一类新的标度规律.

下面要介绍的层次结构模型是一种较新的湍流脉动的唯象模型,它与目前已知的实验事实都符合,是解释反常标度律最为成功的模型之一.

2. 湍流层次结构模型

1994 年佘振苏和他的学生 E. Leveque 提出了湍流的层次结构模型(hierarchical structures model)[31]解释反常标度律,取得了成功. 由于该模型对应于能量级串的对数 Poisson 分布,此模型现在也被称为对数 Poisson 模型[2,11]. 下面就来简要介绍一下这个模型.

首先引入层次变量(层次结构量). 设尺度 l 上的某种湍流脉动量为 S_l, S_l 可以是尺度 l 上的平均能量耗散率 ϵ_l 或脉动速度结构函数 $|\delta v_l|$ 等,层次结构模型假设:

(1)对任一尺度 l, S_l 是有界的;

(2) S_l 在充分发展湍流的惯性子区内有标度律,即 $< S_l^p > \propto l^{\zeta_p}$. 其中 $< S_l^p >$ 是 S_l 的 p 阶矩, $<\cdot>$ 表示平均值(系综平均、时间平均或空间平均等); ζ_p 是标度指数. 通常 p 可取任意非负实数,这样我们要求 S_l 也是非负的.

定义 p 阶层次结构量 $S_l^{(p)}$ 为 S_l 的 $p+1$ 阶矩与 p 阶矩之比:

$$S_l^{(p)} = \frac{< S_l^{p+1} >}{< S_l^p >} = \frac{\int S_l^{p+1} P(S_l) \mathrm{d}S_l}{\int S_l^p P(S_l) \mathrm{d}S_l} = \int S_l Q_p(S_l) \mathrm{d}S_l, \quad p = 0,1,2,\cdots,\infty$$

其中 $P(S_l)$ 是 S_l 的概率密度函数, $Q_p(S_l) = \frac{S_l^p P(S_l)}{\int S_l^p P(S_l) \mathrm{d}S_l}$ 是 S_l 的 p 阶加权概率密度函数,它反映了(高阶)矩的概率分布特性. S_l 的有界性保证了存在各阶非零的统计矩.

根据假设(1)和(2)可以证明

$$\lim_{p\to\infty} S_l^{(p)} = S_l^{(\infty)}, \quad \lim_{p\to\infty}(\zeta_{p+1} - \zeta_p) = \gamma, \quad S_l^{(0)} \leqslant S_l^{(1)} \leqslant S_l^{(2)} \leqslant \cdots \leqslant S_l^{(\infty)} \propto l^\gamma \tag{2.1}$$

其中 $S_l^{(\infty)}$ 是 S_l 的最大值, λ 是一个常数. 因此 $S_l^{(p)}$ 代表了幅度增长的脉动结构序列,它

反映了脉动量在强度分布上的一种层次结构，这也正是层次变量的含义.更为重要的是，存在代表最高层次脉动结构的 $S_l^{(\infty)}$，称为脉动量 S_l 的最高(最强)激发态，或最强间歇结构；γ 称为最强间歇结构的标度指数或最奇异标度指数.

由于湍流是由确定性的偏微分方程控制的动力学过程，各层次结构量之间是有关联的.从存在标度律这种统计相似规律出发，层次结构模型进一步假设：

(3)不同尺度上的无量纲层次结构量之间存在统计自相似性：

$$\frac{S_l^{(p+1)}}{S_l^{(\infty)}} = A_p\left(\frac{S_l^{(p)}}{S_l^{(\infty)}}\right)^{\beta} \tag{2.2}$$

其中 $0<\beta<1$ 是与 p 和 l 无关的普适常数，称为层次相似参数或间歇参数；A_p 仅依赖于 p，与 l 无关.

根据(2.2)式和标度律可知，标度指数满足如下递推关系：

$$\zeta_{p+2} - (1+\beta)\zeta_{p+1} + \beta\zeta_p - \gamma(1-\beta) = 0 \tag{2.3}$$

利用 $\zeta_0 = 0$ 从上式可解得

$$\zeta_p = \gamma p + C(1-\beta^p) \tag{2.4}$$

其中 $C = \dfrac{\zeta_1 - \gamma}{1-\beta}$ 包含待定常数 ζ_1.这就是描述湍流脉动结构的 She-Leveque(简称 SL)标度律.

C 的物理意义可作如下分析.因为 $0 \leqslant \left(\dfrac{S_l}{S_l^{(\infty)}}\right) \leqslant 1$，所以当 $p \to \infty$ 时，$\left\langle\left(\dfrac{S_l}{S_l^{(\infty)}}\right)^p\right\rangle$ 反映了 $S_l = S_l^{(\infty)}$，即最强间歇事件或最高激发态出现的概率.如果认为最高激发态对应于物理空间的某种高度拟序的结构，则观测到此结构出现的概率应正比于此结构在空间所占据的相对体积大小 $\left(\dfrac{l}{l_0}\right)^{d-D}$，这里 $d=3$ 是湍流场物理空间的维数，$D<3$ 是嵌入到 d 维空间的最强激发结构的维数，一般是分维数.因为 $\lim\limits_{p\to\infty}\left\langle\left(\dfrac{S_l}{S_l^{(\infty)}}\right)^p\right\rangle \propto \left(\dfrac{l}{l_0}\right)^C$，这样就有 $C = d - D$，它代表最强激发结构所占空间的余维数(codimension).

对于耗散率脉动结构 ε_l，佘振苏和 Leveque 从理论上完全确定了模型中的参数 γ，β 和 C.首先，根据量纲分析可以定出能量耗散率最高激发态的标度指数 $\gamma = -\dfrac{2}{3}$.其次，根据高雷诺数湍流的实验和数值模拟结果，可以认为充分发展湍流的最强耗散结构是 1 维丝状结构[32~35]，于是 $C = 3-1 = 2$.另外，根据 $\zeta_3 = 1$ 的已知结果和速度结构函数标度指数 ζ_p^v 与能量耗散率标度指数 ζ_p^ε 的关系(1.7)式，可知 $\zeta_1^\varepsilon = 0$，于是可定出间歇参数 $\beta = \dfrac{2}{3}$.这样对于充分发展的均匀各向同性湍流，

$$\zeta_p^\varepsilon = -\frac{2}{3}p + 2\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^p\right) \tag{2.5}$$

由(1.7)式可得

$$\zeta_p^v = \frac{1}{9}p + 2\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{p}{3}}\right) \tag{2.6}$$

这两个标度指数公式中不含任何可调参数.

层次结构模型预测的标度律已经得到实验和数值模拟的广泛证实. Ruiz Chavarria 等[36,37]在射流、圆柱尾流和网格湍流的实验中证实了层次结构统计自相似假设(2.2)的正确性,根据实验数据计算得出能量耗散率脉动对应的参数 $\beta = 0.68 \pm 0.03$. 在标度律(2.6)的验证方面,与风洞湍流[21]、尾迹湍流[38]、射流[39]、低温氦气湍流[40]以及直接数值模拟[41]获得的速度结构函数标度指数的比较表明,在实验所达到的 $p \leqslant 10$ 的范围内,理论预测与实验结果符合得非常好. 有趣的是,在湍流 GOY 壳模型的数值模拟[42]中,取 SL 标度律 $\zeta_p = 0.125p + 1.49(1 - 0.58^{p/3})$,则在数值模拟所达到的 $p \leqslant 20$ 的范围内,理论预测与数值结果相差不到 1%. 另外,SL 标度律也用到了磁流体力学湍流中,如 Politano 和 Pouquet[43]提出的标度律 $\zeta_p = \frac{p}{8} + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{p/4}$;Leveque 和 Ruiz Chavarria 等人[44]在圆柱尾流的实验中发现速度和温度复合结构函数标度指数的理论公式 $\zeta_p = \frac{p}{9} + \frac{10}{9}\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{p/3}\right)$ 与实验数据符合得很好. 这些实验和数值模拟结果不但表明充分发展均匀各向同性湍流 SL 标度律(2.6)的有效性,还表明了 SL 标度律的一般形式(2.4)适用于更广的范围.

根据层次结构模型,湍流的标度律是由最强间歇结构(最高激发态)和层次相似参数(间歇参数)共同决定的*. 由于标度律一般是非线性的,湍流场通常表现为多尺度结构. 湍流场中脉动的物理图像可描述如下:脉动可以分为不同尺度、不同幅度的层次结构;大尺度(如积分尺度)上的脉动由于非线性相互作用传播到小尺度,动力学状态变化的特征时间随空间尺度减小而减小,其中脉动速度的典型值(例如均方根值)亦如此,但能量耗散率的脉动却随着尺度的减小越来越大;相对于脉动速度和能量耗散率的典型值,在脉动级串过程中渐渐出现稀少的大振幅事件,脉动振幅愈大,它们占据的空间集合的维数愈小,因此它们空间形态的相干性就愈强. 其中最大振幅的事件对应于最强间歇结构或最高激发态,具有最强的空间相干性. 在统计定常情况下,不同尺度和幅度的脉动由相似律联系在一起,形成了一个整体性的层次结构,使湍流在统计意义上成为一个完整的自组织体系.

层次结构模型中的间歇参数 β 取 1 和 0 两种极端情况时,分别对应于 K41 湍流和 Burgers 湍流的图案. 在真实的湍流中,$0 < \beta < 1$,总是最高激发态与较弱的随机结构并存,有序与无序脉动结构交织的间歇图案.

3. 层次结构模型与湍流脉动的多分形描述

在 K41 的湍流图像中,引起脉动的旋涡结构是充满全空间的(space-filling). 但间歇现象的存在似乎表明即使在充分发展湍流的惯性区,级串导致的活跃的强振幅旋涡结构也并不是充满空间的. 大量湍流数值模拟也发现在湍流场的不同空间位置,能量耗散率相差很大,高耗散区只占整个湍流场的很小的一部分. 间歇现象引导人们考虑级串旋涡在空间

* 由于描述最高激发态的特征参数 γ, C 通常总是通过类似于 $\zeta_3 = 1$ 或 $\zeta_1 = 0$ 这样的约束条件与 β 联系在一起,也可认为标度律完全是由最高激发态的特征决定的.

间歇分布的模型.这种间歇分布在空间上可能极为复杂,既不充满空间,也不是规则的点、线、面或体.Mandelbrot[45]曾经考虑过湍流耗散率间歇的空间结构问题,提出了一系列假说,导致他提出分形几何(fractal geometry)这一重要思想.这里我们简单介绍一下湍流间歇性脉动的多分形描述模型.

假设尺度为 l 的旋涡每经过一次级串变为若干尺度为 $\lambda l(0<\lambda<1)$ 的小旋涡,并且这些旋涡的总体积变为原来的 β 倍 $(0<\beta<1)$,这样尺度为 l_0 且充满空间的大涡经过 n 次级串后变为许多尺度为 $l=\lambda^n l_0$ 的小涡,这些小涡占有的总体积为 $\beta^n l_0^3$.当 $n \gg 1$ 时,小旋涡总体的空间几何结构可视为嵌入在3维空间中的一个分形体,湍流的脉动就是由这些小涡引起的.由于旋涡在空间是呈间歇状分布的,因而脉动也相应地具有间歇性.这就是Frisch 等人提出的描述湍流脉动的最简单的分形模型——β 模型[46].

在 β 模型中,经过 n 次级串后小旋涡的数目为 $N(n)=\beta^n\left(\frac{l_0}{l}\right)^3=\left(\frac{l_0}{l}\right)^{3-\frac{\log\beta}{\log\lambda}}$,因此小涡占有分形体的维数是 $D=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log N(n)}{\log(l_0/l)}=3-\frac{\log\beta}{\log\lambda}$;小涡占有的体积比率为 $\beta^n=\left(\frac{l}{l_0}\right)^{\frac{\log\beta}{\log\lambda}}=\left(\frac{l}{l_0}\right)^C$,其中 $C=3-D$ 是分形体的余维数.这个体积比率正比于用尺度为 l 的小球捕获小涡的概率.现在估计尺度为 l(在惯性子区范围内)的小涡内速度脉动的典型值 $\delta\nu_l$.尺度为 l_0 的大涡通过级串传递的能流 $\propto \delta\nu_0^3/l_0$.因为小涡所含的总动能 $\propto \delta\nu_l^2\left(\frac{l}{l_0}\right)^C$,小涡级串的特征时间 $\propto l/\delta\nu_l$,故小涡传递的能流 $\propto \frac{\delta\nu_l^3}{l}\left(\frac{l}{l_0}\right)^C$.在K41的假设下,惯性区内的能流与尺度 l 无关,于是有 $\frac{\delta\nu_l^3}{l}\left(\frac{l}{l_0}\right)^C \propto \frac{\delta\nu_0^3}{l_0}$,所以 $\delta\nu_l \propto \delta\nu_0\left(\frac{l}{l_0}\right)^{\frac{1-C}{3}}$,即小涡中的速度有标度指数 $h=\frac{1}{3}-\frac{C}{3}$.根据小涡分布的概率可知 p 阶速度结构函数

$$S_p(l)=\langle|\delta\nu_l|^p\rangle \propto \nu_0^p\left(\frac{l}{l_0}\right)^{\frac{1-C}{3}p+C} \tag{3.1}$$

这样就得到速度结构函数在惯性区内的标度指数

$$\zeta_p=\frac{1-C}{3}p+C=\frac{p}{3}+C\left(1-\frac{p}{3}\right) \tag{3.2}$$

与K41的预测相比,β 模型多了一项分形间歇性修正,但余维 C 是可调参数.

同 Anselmet, Gagne, Hopfinger 和 Antonia 的经典实验结果[21]比较,β 模型取 $C=0.2$ 时的标度指数在 $p\leqslant 12$ 范围内与实验符合较好.但该模型仍给出一个线性标度律,而实验发现的标度律是非线性的,这使人们进一步考虑将单分形描述的 β 模型推广到多重分形(multifractal,简称多分形)描述[17].

因为在理论上使NS方程在标度变换下保持不变的标度指数可为任意值,多重分形模型假设在充分发展的湍流中存在着连续变化的多重分形集合,在每一个分形内,速度脉动都有一个标度指数 h.设与 h 对应的分形集维数为 $D(h)$,则 p 阶速度结构函数可以用如下积分来表示

$$S_p(l) \propto \delta\nu_0^p\int\left(\frac{l}{l_0}\right)^{ph+3-D(h)}\mathrm{d}\mu(h) \tag{3.3}$$

其中 $d\mu(h)$是速度标度指数为 h 的分形集在概率上所占的权重.

当 $l \ll l_0$ 时,上述积分可用最陡下降法来估计,近似为$\left(\frac{l}{l_0}\right)^{\inf_h[ph+3-D(h)]}$,所以速度结构函数的标度指数为

$$\zeta_p = \inf_h[ph + 3 - D(h)] \tag{3.4}$$

这正是函数 $3 - D(h)$的 Legendre 变换[11].逆变换为

$$D(h) = \inf_p[ph + 3 - \zeta_p] \tag{3.5}$$

根据 Kolmogorov 的 4/5 定律,$\zeta_3 = 1$,所以 $D(h)$应当满足

$$\inf_h[3h + 3 - D(h)] = 1 \tag{3.6}$$

逆变换(3.5)的意义在于可以根据标度律求得多分形的维数谱 $D(h)$.另外从(3.4)、(3.5)两式还可得到

$$\frac{d\zeta_p}{dp} = h^*(p) \tag{3.7}$$

$h^*(p)$是满足 $D'(h) = p$ 的 h 值.

多分形模型描述适合于任意标度律的情况,因而具有普遍意义.该模型本质上是一种概率描述的方法.由于 ζ_p 是 p 的非线性函数,因此 $D(h)$也是 h 的连续非线性函数,故湍流场是一个具有无穷多个标度指数的多标度场.湍流脉动的多分形描述揭示了湍流结构这一复杂性的一面.但最初的多分形模型仅提出了一个框架,并没有实质性地给出 $D(h)$的具体形式.现在,根据层次结构模型的一般形式(2.4),令

$$\frac{d\zeta_p}{dp} = \gamma - (C\log\beta)\beta^p = h \tag{3.8}$$

可得 $p = (\log(h-\gamma) - \log[C\log(1/\beta)])/\log\beta$.该 p 使(3.5)式右端取最小值,因此可得维数谱

$$D(h) = 3 - C + c_1(h-\gamma) + c_2(h-\gamma)\log(h-\gamma) \tag{3.9}$$

其中 $c_1 = \frac{1+\log[C\log(1/\beta)]}{\log(1/\beta)}$,$c_2 = \frac{1}{\log\beta}$.对于该维数谱,$h_{\min} = \gamma$ 为最奇异标度指数.由于 $D(h_{\min}) = 3 - C$,正好说明与最奇异标度指数对应的最高激发态的空间结构的余维数为 C.

4. 层次结构模型与脉动级串的随机映射

研究湍流脉动级串的传统方法是对湍流场进行傅里叶变换,在谱空间内考察脉动量(如动能).因为傅氏变换分量与简谐振动相对应,将变换后的谱分量视为流场中的旋涡是很自然的.因为低波数对应于大波长,高波数对应于小波长,通常将脉动的低波数分量称为大涡,高波数分量称为小涡.研究级串过程就是要找到脉动从大涡向小涡传递的规律,这种规律是湍流动力学过程的反映.湍流统计理论的传统工具就是傅氏分析.从 20 世纪 80 年代以来,在湍流信号的分析中越来越多地开始应用小波分析(wavelet analysis)的方法[47,48].小波分析的优点在于基函数都是局部的,因而能够分辨出湍流脉动的局部和时域特点(流体中真实的旋涡确实具有局域特征而不是周期特征),这是传统的傅里叶分析

达不到的.但这两种方法都无法与湍流场脉动级串的统计特征建立直接的联系(傅氏分析的出发点仍然是谱空间的 NS 方程).在充分发展湍流的惯性区,脉动级串表现出的标度律行为,是一种高度的统计对称性质.在唯象理论的框架下,我们需要直接针对湍流脉动级串的统计特征建立模型,这一模型将能够使标度律的具体性质同级串的统计过程联系起来.目前在级串统计模型中最常用的是下面将要介绍的一种称为随机映射或随机增殖过程(random multiplicative processes,简称 RMP)的方法.这种方法是 60 年代首先由前苏联科学家提出来的[49,50].

4.1 脉动级串的随机映射描述方法

在充分发展的湍流场中,对于统计矩随长度尺度呈幂次律变化(标度律)的脉动量,随机映射方法假设尺度 l 上的脉动量和尺度 l_0 上的脉动量之间存在一个线性映射.以湍流场中相距 l(l 在惯性范围内)的两点的纵向速度分量差的绝对值 $|\delta\nu_l|$ 作为脉动量为例,线性映射可表示为

$$|\delta\nu_l| \stackrel{\text{law}}{=\!=} W_{l_0 l}\cdot|\delta\nu_{l_0}| \tag{4.1}$$

这里 $W_{l_0 l}$是仅依赖于尺度 l 和 l_0 并且独立于脉动量的随机变量;"$\stackrel{\text{law}}{=\!=}$"表示在统计意义上相等,因而上式并不意味着 $W_{l_0 l}=|\delta\nu_l|/|\delta\nu_{l_0}|$,具体原因我们将在下面论述.先就随机映射的意义进行一些讨论.

由于非线性相互作用,湍流场中各种尺度脉动结构之间是互相耦合的,因而将两个不同尺度上的脉动量仅通过一个随机线性函数来联系只是一种简单的模型.虽然在雷诺数充分高,湍流充分发展的情况下,由于几乎各种尺度下的脉动都被激发,各种尺度之间都是相互关联的,因而脉动呈现出异常丰富的结构,但从统计观点来看,这时脉动规律反而表现得更为简单(标度律),于是我们用尺度之间的 RMP 观点研究脉动之间的关联这种做法就有了一定的合理性.这种脉动级串随机映射的明显的优点是便于根据 $W_{l_0 l}$的统计性质建立级串(比如能量从大尺度到小尺度的逐级传递)的物理图像,而且通过下面的介绍可以与标度律发生联系.采用 RMP 模型,将使我们在一定程度上从传统的傅氏分析的观念下解放出来,能够直接面对湍流脉动呈现简单的标度律这一实验事实.

由于我们基于统计上的简单性,认为尺度 l 和 l_0 上脉动之间的随机映射是线性的,因而 $W_{l_0 l}$是与脉动量无关的.又由于惯性区内具有尺度相似性,因而 $W_{l_0 l}$只能依赖于l/l_0.对(4.1)式两边求统计平均,取 p 阶矩

$$\langle|\delta\nu_l|^p\rangle = \langle W^p_{l_0 l}\rangle\langle|\delta\nu_{l_0}|^p\rangle \tag{4.2}$$

注意到上式已经用"="取代了"$\stackrel{\text{law}}{=\!=}$".根据标度律,

$$\frac{\langle|\delta\nu_l|^p\rangle}{\langle|\delta\nu_{l_0}|^p\rangle} = \left(\frac{l}{l_0}\right)^{\zeta_p} \tag{4.3}$$

于是我们得到

$$\left(\frac{l}{l_0}\right)^{\zeta_p} = \langle W^p_{l_0 l}\rangle \text{ 或 } \zeta_p = \log\langle W^p_{l_0 l}\rangle/\log(l/l_0) \tag{4.4}$$

这样就建立了标度指数与随机映射之间的联系.

RMP 有一个重要的特性.根据统计平均(数学期望)的 Schwarz 不等式可知,对任意的 $p,q>0$,

$$\log\langle W_{l_0 l}^{(p+q)/2}\rangle \leqslant \frac{1}{2}(\log\langle W_{l_0 l}^{p}\rangle + \log\langle W_{l_0 l}^{q}\rangle) \tag{4.5}$$

故 $\log\langle W_{l_0 l}^{p}\rangle$对于 p 来说是凸函数.另外一方面,实验结果表明速度结构函数的标度律指数 ζ_p 对于 p 来说是凹函数[11],这样在(4.4)式成立的情况下就必须有

$$\log(l/l_0) < 0 \text{ 或 } l < l_0 \tag{4.6}$$

因此随机映射 $W_{l_0 l}$的作用只能是从大尺度到小尺度,而不能相反.

随机映射的一个重要应用是从大尺度的脉动的统计规律预测小尺度脉动的规律.对(4.1)式两边取对数,

$$\log|\delta\nu_l| \overset{\text{law}}{=\!=} \log W_{l_0 l} + \log|\delta\nu_{l_0}| \tag{4.7}$$

于是小尺度脉动的概率密度函数 $P(\log|\delta\nu_l|)$可以用大尺度脉动的概率密度函数 $P(\log|\delta\nu_{l_0}|)$和随机映射因子 $W_{l_0 l}$的概率密度函数 $P(\log W_{l_0 l})$来表示:

$$P(\log|\delta\nu_l|) = P(\log W_{l_0 l}) \otimes P(\log|\delta\nu_{l_0}|) \tag{4.8}$$

其中"$\otimes$"表示卷积.

反之,如果在惯性区已知 $P(\log|\delta\nu_l|)$和 $P(\log|\delta\nu_{l_0}|)$,则由(4.8)式可知

$$P(\log W_{l_0 l}) = \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{\mathscr{L}P(\log|\delta\nu_l|)}{\mathscr{L}P(\log|\delta\nu_{l_0}|)}\right) \tag{4.9}$$

这里 $\mathscr{L}$和 $\mathscr{L}^{-1}$分别代表 Laplace 变换及其逆变换*.

必须指出的是,如果由(4.1)式认为 $W_{l_0 l} = |\delta\nu_l|/|\delta\nu_{l_0}|$,则就有

$$\log W_{l_0 l} = \log|\delta\nu_l| - \log|\delta\nu_{l_0}| \tag{4.10}$$

于是

$$P(\log W_{l_0 l}) = P(\log|\delta\nu_l|) \otimes P(-\log|\delta\nu_{l_0}|) \tag{4.11}$$

这与(4.8)式及(4.9)式是相悖的.这就是我们在随机映射的定义中使用"$\overset{\text{law}}{=\!=}$"而不是等号的原因.

4.2 随机映射与无穷可分分布

根据脉动级串的物理过程,随机映射 $W_{l_0 l}$还有如下性质.将从 l_0 到 l 的长度尺度分为 n 段,即取 $l_0 > l_1 > l_2 > \cdots > l_{n-1} > l_n = l$,依次考虑从大尺度到小尺度的相继的级串过程 $W_{l_0 l_1}, W_{l_1 l_2}, \cdots, W_{l_{n-2} l_{n-1}}, W_{l_{n-1} l}$.根据随机映射的定义(4.1)式,在统计上显然有

$$W_{l_0 l} = W_{l_{n-1} l} \cdot W_{l_{n-2} l_{n-1}} \cdot \cdots \cdot W_{l_1 l_2} \cdot W_{l_0 l_1} \tag{4.12}$$

特别地,如果取 $l_i = l_0\lambda^i, i = 0,1,\cdots,n$,其中 $0 < \lambda = (l/l_0)^{1/n} < 1$,即 l_i 满足 $l_{i+1}/l_i = \lambda$,则由于 $W_{l_i l_{i+1}}$只依赖于长度比,(4.12)式中诸 $W_{l_i l_{i+1}}$均满足同一概率分布(并且是互相独立的).如果将(4.12)式两边取对数,就有

* 这里假定有关量的 Laplace 变换和逆变换都是存在的.

$$\log W_{l_0 l} = \sum_{i=0}^{n-1} \log W_{l_i l_{i+1}} \tag{4.13}$$

上式表明,随机变量 $\log W_{l_0 l}$能够分成 n 个具有相同分布的独立随机变量之和.显然 n 可以是任意的.这是一个非平凡的事实,因为不是每个随机变量都能这样分解.概率论中将这种能够分解为任意个具有独立相等分布的概率分布称为无穷可分分布(infinitely divisible distribution).(4.13)式表明 $W_{l_0 l}$满足对数无穷可分分布.我们注意到这一性质是从惯性区内级串随机映射过程的物理性质得到的.

下面举几个常见的无穷可分分布的例子.

(1)正态分布:$P(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$,满足 $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$,其中每个独立随机变量 x_i 的概率密度函数为$p_i(x) = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\dfrac{(nx-\mu)^2}{2n\sigma^2}\right)$;

(2) Poisson 分布:$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\exp(-\lambda)\dfrac{\lambda^k}{k!}\delta(x-k)$,满足 $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$,其中每个独立随机变量 x_i 的概率为 $P_i(k) = \exp\left(-\dfrac{\lambda}{n}\right)\dfrac{(\lambda/n)^k}{k!}$;

(3) Cauchy 分布:$P(x) = \dfrac{a}{\pi}\dfrac{1}{a^2+x^2}(a>0)$,满足 $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$,其中每个独立随机变量 x_i 的概率密度函数为$P(x) = \dfrac{a}{\pi}\dfrac{n}{a^2+n^2x^2}$.

根据 Levy-Khintchine 定理[51],任一无穷可分分布的特征函数 $\varphi(t)$均可表示为

$$\varphi(t) = \exp\left[\mathrm{i}mt - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \int_{-\infty}^{\infty}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}ty} - 1 - \frac{\mathrm{i}ty}{1+y^2}\right)K\mathrm{d}y\right] \tag{4.14}$$

其中 m,σ 是实常数,K 是满足$K(0) = 0$和$\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{y^2}{1+y^2}K\mathrm{d}y < \infty$ 的任意测度.例如,取 $m = \mu, K \equiv 0$ 就得到正态分布;取 $m = \lambda/2, \sigma = 0, K(y) = \lambda\delta(y-1)$ 就得到 Poisson 分布.

由(4.14)式我们可以通过逆变换求得随机映射 $W_{l_0 l}$的概率密度函数,再由(4.4)式就得到标度指数的一般表示

$$\zeta_p = mp - \frac{\sigma^2 p^2}{2} + \int_{-\infty}^{\infty}\left(\mathrm{e}^{yp} - 1 - \frac{py}{1+y^2}\right)K\mathrm{d}y \tag{4.15}$$

注意,这里的常数 m,σ 和测度 K 同(4.14)式相比,是已经约去了 $\log(l/l_0)$之后的结果.

当然,并不是每个测度 K 都能导致合理的 ζ_p.对于不同脉动量的标度指数,一般都相应地满足一些特定的约束条件.例如对于能量耗散率的标度指数 τ_p 来说,就需要满足所谓的 Novikov 不等式[52]:

$$\tau_p + p \geqslant 0, \text{对 } p > 0; \quad \tau_p + p \leqslant 0, \text{对 } p < 0 \tag{4.16}$$

(4.15)式是在随机映射观点下得到的脉动级串标度指数的一般公式,原则上它不仅适用于充分发展的不可压缩流体的湍流,也适用于具有级串过程和标度律的其他非线性场.

当取 $K\equiv 0$ 时,$W_{l_0 l}$满足对数正态分布,其预测的标度指数

$$\zeta_p = mp - \frac{\sigma^2 p^2}{2} \tag{4.17}$$

这就是著名的 lognormal 模型. 通常引入 $\mu = 2 - \zeta_6$, 并且利用 $\zeta_3 = 1$ 的已知条件将该标度律改写为(1.8)式的形式.

特别地, 如果取 $K(y) = -C\delta(y - \log\beta)$, $m = \gamma - \dfrac{C\log\beta}{1+\log^2\beta}$, $\sigma = 0$, 就得到 SL 标度律(2.4). 对应的 W_{l_0l}是对数 Poisson 分布. 这里重要的是, 我们看到, 在 Levy-Khintchine 表示下, SL 标度律是非常显然的.

另外可以看到, 不论令 $K \equiv 0$, $\sigma = 0$ 或令 $K(y) = C\delta(y)$, $\sigma = 0$, 即在对数正态分布和对数 Poisson 分布的特殊情况下, 都可得到 K41 理论预测的线性标度律, 这显然是 SL 标度律的特殊情况.

最后我们要指出的是, 对于能量耗散率脉动随机映射来说, 由于能量耗散率对于长度尺度具有可加性, W_{l_0l}除满足对数无穷可分性质之外还需要满足更多的约束条件[53].

4.3 SL 标度律与对数 Poisson 分布

现在我们直接根据 SL 标度律(2.4)和(4.4)式导出脉动级串随机映射的对数 Poisson 分布. 首先, 由于 $0 \leqslant \beta \leqslant 1$,

$$\sum_{p=1}^{\infty} \langle W_{l_0l}^{2p} \rangle^{-\frac{1}{2p}} = \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{l}{l_0}\right)^{-\frac{\zeta_{2p}}{2p}} = \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{l_0}{l}\right)^{\frac{\gamma}{2}+\frac{C}{2p}(1-\beta^p)} = \infty, \gamma, C \text{ 为任意实数} \tag{4.18}$$

即 W_{l_0l}的各阶矩满足 Carleman 条件[54], 于是其概率密度函数可由矩唯一确定.

设 W_{l_0l}的特征函数为 $\Psi(t)$, 利用特征函数与各阶矩的关系,

$$\begin{aligned}
\Psi(t) &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}t)^p}{p\,!}\left(\frac{l}{l_0}\right)^{\gamma p + C(1-\beta^p)} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}t)^p}{p\,!}\left(\frac{l}{l_0}\right)^{\gamma p + C} \exp\left(-C\log\left(\frac{l}{l_0}\right)\beta^p\right) \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}t)^p}{p\,!}\left(\frac{l}{l_0}\right)^{\gamma p + C}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{[-C\log(l/l_0)]^k \beta^{kp}}{k\,!}\right) \\
&= \left(\frac{l}{l_0}\right)^C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[-C\log(l/l_0)]^k}{k\,!}\left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{[\mathrm{i}t(l/l_0)^\gamma \beta^k]^p}{p\,!}\right) \\
&= \left(\frac{l}{l_0}\right)^C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[-C\log(l/l_0)]^k}{k\,!} \exp[\mathrm{i}t(l/l_0)^\gamma \beta^k]
\end{aligned} \tag{4.19}$$

于是 W_{l_0l}的概率密度为

$$\begin{aligned}
P(W_{l_0l}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tW_{l_0l}}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{l}{l_0}\right)^C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[-C\log(l/l_0)]^k}{k\,!} \exp\{\mathrm{i}t[(l/l_0)^\gamma\beta^k - W_{l_0l}]\}\mathrm{d}t \\
&= \left(\frac{l}{l_0}\right)^C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[-C\log(l/l_0)]^k}{k\,!} \cdot \delta\left(W_{l_0l} - \left(\frac{l}{l_0}\right)^\gamma \beta^k\right) \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k\,!}\delta\left(W_{l_0l} - \left(\frac{l}{l_0}\right)^\gamma \beta^k\right)
\end{aligned} \tag{4.20}$$

其中 $\lambda = -C\log(l/l_0)$. 该式表明 W_{l_0l}只能取离散值$\left(\dfrac{l}{l_0}\right)^\gamma \beta^k$, $k = 0, 1, 2, \cdots$, 且 $P(k) =$