弹性系统的稳定性

武际可　苏先樾　著

科学出版社

中国科学院科学出版基金资助出版

弹性系统的稳定性

武际可　苏先樾 著

科 学 出 版 社

1 9 9 4

（京）新登字 092 号

内 容 简 介

本书以弹性系统为对象，介绍稳定性理论的基本原理、近代稳定性理论的分叉问题、大范围非线性分析的数值方法，并详细介绍了三类典型结构（杆系、板、壳）的弹性稳定性问题的求解及主要结果。

本书可供从事力学、应用数学的科研工作者和工程技术人员阅读，也可供高等院校有关专业的师生参考。

弹性系统的稳定性

武际可　苏先樾 著

责任[redacted]

[redacted]

邮政编码：100717

中[redacted]科学院印刷厂印刷

新华书店北京[redacted]行所发行 [redacted]各地新华[redacted]

1994年7月第[redacted]　开本：787[redacted] 1/16

1994年7月第一次印刷 [redacted]印张[redacted]1/8

印数：1—1 540　字数：317 000

ISBN 7-03-004021-X/TB·115

定价：16.90 元

序

1963年秋，我对北京大学数学力学系六年级学生讲授了弹性系统稳定性课程，并写有一本油印讲义。之后，由于种种原因它被搁置了10年。

1981年我再次给北京大学力学系四年级学生讲授了弹性系统稳定性课程，以后又给硕士研究生讲授了几次，1987年以后，改由苏先樾博士讲授。我们每一次讲授都有一个进行了补充或修改的讲稿。

1982年以后，苏先樾和我的共同兴趣集中在非线性弹性系统的数值方法和分叉问题上，随后又有一批研究生在这一方向做了一些研究工作。这本书就是在多次讲课和近年来进行的研究工作的基础上写成的。

在弹性系统稳定性方面已经出版了几本好书，例如 Timoshenko，Volmir（俄文），Leipholz 以及 Thompson & Hunt 等写的专著。但是 Timoshenko 和 Volmir 的书基本上反映的是四五十年代的认识，而 Leipholz 的书也只包含了将 Liapunov 方法推广到连续系统的内容，Thompson & Hunt 的书则侧重介绍 Koiter 理论及其应用。60年代以后，分叉和非线性理论有了很大的发展，需要在新的认识水平上对弹性系统稳定性的问题重新加以总结。此外，随着电子计算机应用的普及，数值方法已成为解决这类问题的首要手段。为了反映这方面的发展，也需要一本新的专著。本书就是为适应这两方面的需要整理而成的。

对弹性系统稳定性作深入的了解，将涉及到有关的数学，特别是非线性动力系统，以及非线性科学的近代发展、弹性力学和有关非线性问题的数值方法等方面的知识，本书不可能包含所有这些领域。有关问题的深入探讨，读者还可以查阅相应的专著和文献。本书是以弹性系统的大范围非线性数值方法为主要线索来组织材料的。第一章给出了稳定性、分叉和系统非线性行为的一些总的概念；第二章介绍将弹性系统稳定性问题看为特征值问题的一般提法；第三章涉及杆与杆系的稳定性问题；第四章是关于板壳的稳定性问题；第五章专门讨论数值方法，并具体求解了若干典型问题，最后还为有兴趣的读者列出了一些可供思考的问题。

本书可以作为硕士研究生的教材和有关理论研究人员及工程技术人员的参考书。

本书的最后整理出版，主要由苏先樾博士完成。由于她对这一专题的深入了解，对各分支方向上新动态的敏锐感受以及旺盛的精力，本书才得以在较短时间内脱稿。我只是在成稿后统阅和修改了一遍，并对其中的若干章节作了改写和增补。

在这里我们要衷心感谢胡海昌教授对我们这个方向上的研究和本书的出版所给予的鼓励和支持。

我们还要对黄琳教授的鼓励和支持表示衷心的感谢，对中国科学院科学出版基金的资助表示深切的感谢，对王敏中教授审阅了全稿并提出许多宝贵的建议表示诚挚的感谢。

最后，还要感谢曾经与我们共同从事这一课题研究的滕宁钧、季海波、李辉、黄永刚、

周鹏等研究生，感谢他们的辛勤劳动，他们所取得的成果丰富了本书的内容。

本书肯定存有不少缺点和错误，诚恳希望读者给予批评指正。

武际可

1992年8月

前　言

稳定性问题虽然有各种不同的定义，但粗略地讲，是研究系统在外界干扰微小时系统的状态的扰动是否也是微小的问题．它广泛出现在自然科学和工程技术的各个领域，甚至出现在某些定量得较好的社会科学的范畴中．

本书不想从上述一般意义上来讨论稳定性问题．因为那样的话，它将是一本类似数学的书籍，这方面的好书已经为数众多．本书选择一个特殊的具体系统——弹性系统——作为我们展开稳定性讨论的对象．一方面是因为弹性系统稳定性的历史在各类稳定性的课题中最为悠久，所积累的内容极为丰富，可以提供稳定性理论研究的概貌；另一方面还由于弹性系统本身是工程实际中大量结构的理论模型，对它的研究必然具有广泛的实际应用价值．作者根据多年教学和研究的经验力图将它写成一本独具特色，理论与应用并重的书．

弹性系统是一类特殊的力学系统．要了解弹性系统的稳定性，我们必须用一定的篇幅介绍力学系统稳定性的一般提法以及它在近代发展中的方方面面．就弹性系统本身来讲，它的门类也颇多，这里我们不想一一列举各种工程构件的稳定性问题，而仅着眼于使读者全面了解处理各种问题的基本方法与理论现状．因此，我们选择了杆、板、壳这三类有代表意义的结构作为具体处理的对象．我们不仅具体介绍各种问题的特殊处理技巧，更注意从一般技巧到普遍理论的抽象．本书还把近代发展的非线性问题和分叉问题放置在较突出的位置，而且特别着重介绍有关这些问题的数值方法．我们希望本书既能为从事稳定性研究的科学工作者和工程技术人员提供参考，又可作为力学和应用数学研究生的教科书．

一、力学系统稳定性的一般提法

从历史上看，也许 1644 年 Torricelli 提出的重力作用下的物体在重心取最低时才保持稳定的条件，可以看作是关于稳定性最早的原理．1788 年 Lagrange 在他的名著《分析力学》一书中将这个原理一般地提为：“当保守系统处于势能的严格极小状态时，系统处于稳定平衡．”它是关于平衡状态稳定性的最早的一般论述．

关于动力稳定性问题，应当提到的是上世纪末的两件划时代的大事，即动力分叉概念的提出和动力稳定性的严格定义：1885 年 Poincaré 在研究天体演化规律时，用定性的方法预言了它的全局变化和分叉；1892 年 Liapunov 给出了动力稳定性的严格定义，同时还具体提供了判定系统稳定和失稳的两种方法．

到本世纪 50 年代末和 60 年代初 Zubov (1957) 和 Movchan (1960)先后将动力稳定性的概念作了适当的推广，使之能适用于无限自由度即连续系统的情形．

总结起来，关于力学系统稳定性的一般提法可以归结为力学系统平衡的稳定性、有限自由度力学系统的动力稳定性、无限自由度系统或连续系统动力稳定性这样三个层次或

三个发展的不同阶段．应当指出的是，当讨论在有势力场作用下的力学系统的稳定性时，有限自由度系统和无限自由度系统在处理上的差别是不大的，它们在数学上大部分归结为函数和泛函的极值问题．而对于在非保守力作用下的动力系统来说，两者之间的差别就很大了．一般说来，离散系统的稳定性问题涉及到的数学工具是常微分方程，特别是常微分方程的定性理论、极限环的研究等；而连续系统的稳定性问题涉及到的数学工具是非线性偏微分方程、无限自由度动力系统的定性研究以及无限维空间的几何理论等．事实上，无限自由度动力系统的定性理论正是近二十年来为适应这种需要而发展的，而无限维空间的几何理论更是近年才活跃起来的．

二、弹性系统稳定性的历史回顾

弹性系统稳定性问题的研究，一般地说，要比同一层次的力学系统的稳定性研究开展得晚，但比起其他力学分支学科以及物理、化学等其他自然学科中稳定性的研究却要早．

下面我们概略地回顾一下弹性系统稳定性问题的提出背景和理论发展阶段，从中可以看出存在两个方面的历史同步：一方面它与工业发展的不同阶段的实际需要紧密联系；另一方面它又与整个力学和数学以及相关自然科学的理论发展水平相适应．

从 18 世纪初到本世纪 40 年代大约二百年的时间，弹性系统稳定性的研究主要是集中在弹性系统平衡稳定性问题上．弹性系统稳定性问题研究较晚，比 Torricelli 提出的原理将近晚一百年的主要原因是由于弹性系统本身的静力学平衡条件较复杂．从 Galileo 开始注意梁的静力平衡方程到 18 世纪初 James Bernoulli 建立精确的梁的理论，花费了近百年的漫长岁月，而板壳的平衡方程的精确建立和边界条件的正确提法直到上世纪末才最后解决．弹性系统的稳定性只有在静力平衡条件准确无误地研究清楚了之后，才有可能进一步着手进行研究．杆的稳定性研究出现在18世纪三四十年代，1729 年 P. Musschenbrock 用实验方法研究了压杆的稳定性，1744 年 Euler 得到了压杆稳定性的理论解，以及临界后的大挠度弹性线．但在当时，建筑材料主要为木头和石头，对于这些强度较低的材料，必须使用粗短的构件，因而弹性稳定性问题并不是首要的．因此，Euler 的细长压杆稳定性理论在相当长的时期里没有得到实际应用．在 19 世纪后半叶，由于近代工业兴起，建筑业和航海业蓬勃发展，铁路、钢桥开始大量修建，采用了钢铁等高强度材料，压杆屈曲问题才有了实际意义．与此同时，板壳结构也被大量采用．随着工程部门中若干典型事故的出现，例如，1940 年美国 Tacom 吊桥在一阵风中被扭断，1965 年英国渡桥电厂几座双曲型冷却塔在风压下坍陷，以及 19 世纪 70 年代，在西班牙海岸波浪不大的情况下发生的“玛丽”号轮船中部折断事件等等，促进了人们对弹性系统稳定性的研究．尤其是二次世界大战以后，随着航空航天等工业的飞跃发展，复合材料、先进合金材料等更高强度材料的采用，人们对板壳结构稳定性的讨论就更为活跃．弹性系统稳定性方面的许多尖锐难题，也正是在这一时期发展和解决的．

在这一时期，弹性系统平衡状态的稳定性研究大多囿于线性问题范围，它主要是根据线性问题的特征值理论确定结构所能承受的最低临界载荷．而非线性问题则是在工业发展的需要以及相关数学水平的提高后才突现出来的．

对于相对简单的弹性压杆，一旦精确的平衡条件建立，它的平衡问题求解、临界载荷的确定，以及屈曲后行为的解决就变得非常容易．Euler 是将后两个问题同时解决的．对

于板壳问题，情况就要复杂得多. 从它的线性平衡方程的建立到非线性问题的初步提出和解决则花去了多半个世纪,而且至今在理论与实际方面仍然存在一批急待解决的难题.

板壳的非线性问题的研究起步较晚. 本世纪初，Von Karman 才研究出了薄板大挠度方程,随后 Donnell (1932 年)把它推广到薄壳问题. 在此基础上，Karman 与钱学森在 1939 年第一次得到了柱壳在某些载荷下的非线性解,并从位移载荷解曲线上取得了上下临界载荷值. 利用这一结果，初步解释了基于线性问题求特征值的方法所得到的临界载荷远高于实验结果的矛盾.

值得指出的是，1945 年荷兰力学家 Koiter 第一次对结构屈曲后的行为进行的一般性研究,他还对临界状态的类型进行了简单的分类,这是对弹性系统定性分类的开始.

在此阶段,由于计算技术的限制,对弹性系统非线性问题的求解，基本上是用摄动法在少数临界点附近作小参数展开，然后对其邻域中系统的行为进行讨论. 而一般的非线性解法则是在本世纪五六十年代,随着电子计算技术的发展才发展起来.

用动力学观点对弹性系统稳定性进行研究基于两个方面：在理论上，基于对非保守力或随时间周期变化的外力作用下的平衡状态稳定性问题的讨论. 在实际上,基于 40 年代航空中颤振现象的发现以及机械工程、电子工程中各种参数激励的非线性振动现象的发现与研究. 1956 年 Zeigler 列举了一个在随动载荷作用下的压杆，用静力学判据是稳定而按动力学观点则是不稳定的例子,说明了当外力为非保守力时,即使是研究弹性系统的平衡稳定性,也必须从动力学观点来讨论. 何况有一些载荷本身就是时间的变量,更需要考虑其系统的惯性性质. 弹性系统动力稳定性的研究便是在这种背景下展开的.弹性系统的分叉概念在同一时期也得到了发展，人们不仅考虑静分叉问题，也考虑某些动分叉问题;不仅考虑一次分叉问题,也考虑再分叉问题. 应当说，Poincaré 开创的常微分方程定性理论的研究方向对动力系统稳定性与失稳的临界现象、分叉现象的认识起了理论上的指导作用. 吸引子的概念、Hopf 分叉现象的发现、向量场在奇点附近的拓扑分类等的讨论都是这方面的重要成果. 它们都或多或少地被应用于有限自由度弹性系统稳定性的研究中,例如，Zeeman (1977 年)，Thompson (1975 年)等人就相继将 Smale(1967 年)，Thom (1975 年)，Arnold (1975 年) 等人提出和发展的对有限自由度系统进行的奇异性分类的初等突变理论就应用于离散的弹性系统中.

将弹性系统看为无限自由度或连续系统来讨论是近三四十年的事情. 大多数工程中的弹性构件实际上接近于连续体. 在 50 年代以前人们虽也曾直接处理过这类构件的稳定性问题,但在绝大多数情形,人们还是采用直接法或能量法将它简化为少量几个自由度的问题来处理.

60 年代以后，人们将动力稳定性概念用于研究连续的流体、固体的稳定性问题. 国际上出现了一批总结这方面成果的专著与论文，如 Leipholz (1971 年)用推广的 Liapunov 直接法解弹性连续系统的不稳定性的书籍，以及 IUTAM 关于连续力学中的稳定性的会议文集 (1982 年)等. 当然,这方面的工作还仅仅是初步的,极待人们在这一领域继续深入地工作.

三、稳定性问题的数值方法

特别值得一提的是，60 年代以后电子计算机的普遍使用以及电子计算技术的不断更

新对稳定性问题的研究带来的革命性变化，不仅解决了许多人们曾经有过猜测却无力实现的问题，而且还引导人们发现了许多新现象、探索到了新的力学机理，极大地推动了稳定性理论及其应用的发展。例如，40 年代 Von-Karman 和钱学森将非线性理论引入壳体稳定性研究时，就已经意识到结构在加载过程中有不止一个屈曲状态，需要全面进行屈曲后行为的分析，但限于当时的计算条件未能真正实现这一设想。直至 1965 年 Bauer 和 Riess 等才通过数值计算证实了板可以从一个屈曲状态跳跃到另一个不同波型的屈曲状态。随后许多人对各种不同的壳体进行了非线性的屈曲后行为分析。

在这一时期，人们发展了各种离散化方法（有限元法、差分法、边界积分法等），以及各种适用于非线性问题的新算法（同伦算法、伪弧长法、修正牛顿法、拟牛顿法、旋转度法、单纯形搜索法等），使得对非线性问题的解曲线进行大范围求解和追踪成为可能。当然，在多重奇点的确定、多重分支的追踪、再分叉的分支追踪以至非保守系统的分叉数值方法等方面还有待做进一步的研究。这些发展和需要使得稳定性问题的数值计算不仅成为稳定性问题，也成为计算力学中的一个重要组成部分。

由于大范围求解的需要，偏微分方程解的定性研究和无限维空间的引进就成了必要。同时，由于微电子工业、材料工业、生物工程等高技术领域的发展，也使得稳定性问题的种类更加多样化。我们相信，在实际需要的推动下，以及相关学科的支持下，弹性系统稳定性的研究和应用在今后几十年内仍将持续、深入、蓬勃地发展。如果本书能使更多的人对弹性系统稳定性问题感兴趣，我们将感到十分欣慰。

目　　录

第一章　力学系统的稳定性

在这一章中，我们将按一般的提法来讨论力学系统的稳定性．1.1 节用一些例子说明力学系统中不稳定问题的普遍性．1.2 节讨论力学系统的描述问题，特别讨论用有限自由度系统去逼近连续系统的离散化方法．1.3 节讨论力学系统稳定性的概念和判据．1.4 节专门讨论含参数系统的非线性大范围求解的必要性及有关的一些概念．1.5 节讨论带初缺陷系统的稳定性问题，另外还介绍 Koiter 理论以及有关缺陷敏感性的概念．1.6 节从动力系统解的结构来讨论系统的稳定性．我们在这一章里引入了数十个例子，目的是说明有关概念在各种不同情况下的体现．

1.1　例　　子

不稳定现象普遍存在于自然界和科学技术的各个领域．

理论力学、材料力学以及弹性力学等所讨论的绝大部分内容，都是在一定的初始条件或边界条件下求力学系统在某个状态下满足一定方程的解的问题．例如，在端条件下求梁的挠曲线，在边界条件下求弹性体内的应力分布等等．在求解过程中，人们经常会碰到解的唯一性不成立、或者解对初值或某些参数的依赖关系不连续，乃至求得的运动或平衡状态在现实中难以实现等诸问题．这些问题都与稳定性这一概念相联系．下面我们通过一组例子来说明这些情形，以使读者对稳定性问题有一个初步的了解．

1.1.1　在重力场作用下铰支于固定点的刚体

有一在重力场作用下的细长直刚性杆，如图 1.1.1所示．0点为铰支点，取坐标系为 $x0y$，直杆与 y 轴夹角为 θ．显然，$\theta=0$ 与 $\theta=\pi$ 是杆的两个平衡位置．当杆处于 $\theta=0$ 的位置时，如果杆受到微小扰动，即 $\theta_0=0\pm\varepsilon$ 时，杆便离开了平衡位置．但当杆处于 $\theta=\pi$ 的位置时，如果杆受到微小扰动，即 $\theta_0=\pi\pm\varepsilon$ 时，杆则会倾向于回复到原来的位置．我们说，系统的前一个平衡状态是不稳定的，而后一个平衡状态是稳定的．

类似的例子还可以举出很多，例如浮在水中的物体在某些位置会倾翻；光滑大球面顶上的小球总要滑下来等．

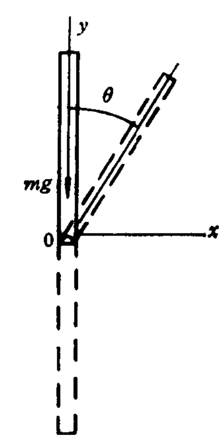

图 1.1.1　铰支杆

1.1.2　压杆稳定性

受轴向压力作用的弹性直杆，如图 1.1.2(a) 所示．从材料力学的简单计算可知，在轴向压力 P 的作用下（作用点通过杆横截面的形心），弹性直杆总是存在着一种简单的变形状态，即存在着轴向应变

的简单压缩变形状态

$$\varepsilon = -\frac{P}{EF}$$

这里 E 为材料的弹性模量，F 为杆的横截面面积．另一方面，弹性直杆在轴压力 P 作用下也可能出现弯曲变形，如图 1.1.2(b) 所示．它出现弯曲变形时，应当满足下述方程：

$$EIy'''' + Py'' = 0 \tag{1.1.1}$$

式中 I 为杆的截面转动惯量，y 为杆的横向挠度．在图 1.1.2 所示的边界条件下，应有 $y(0) = y(l) = 0$，$y''(0) = y''(l) = 0$，这里 l 为杆长．根据方程(1.1.1)和边界条件可以解得，当 $P = \frac{n^2\pi^2 EI}{l^2}$ 时，杆的挠曲线为 $y = c\sin\frac{n\pi x}{l}$ $(n = 1, 2, \cdots)$．$n = 1$ 时，$P = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$ 为最低临界载荷，记为 P_{cr}．

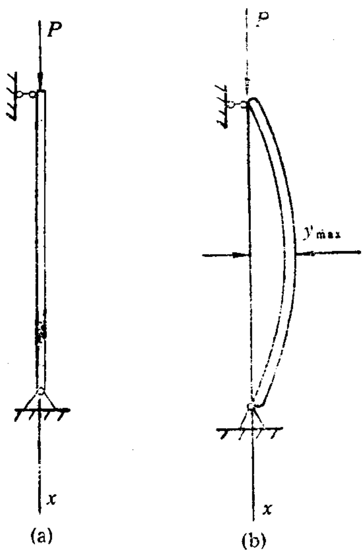

图 1.1.2　两端简支压杆

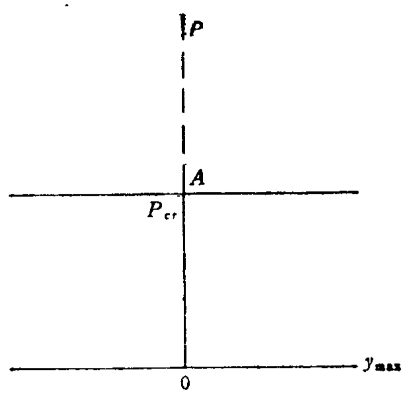

图 1.1.3　载荷-最大挠度关系图

可以注意到，当 $P < P_{cr}$ 时，方程(1.1.1)只有零解，$y \equiv 0$．当 $P = P_{cr}$ 时，即 P 达到最低临界载荷时，$y = c\sin\frac{\pi x}{l}$，且 c 为任何值时都是方程 (1.1.1) 的解．这时，尽管 $y \equiv 0$ 是方程(1.1.1)的解，但杆受到微扰动后极易处于弯曲的状态，因此杆的变形状态随着载荷 P 这个参数的连续变化发生了质的改变．当 $P < P_{cr}$ 时，对简单压缩的变形状态，$y \equiv 0$ 是唯一的解，且是稳定的；而在 $P = P_{cr}$ 的临界状态，解的唯一性被破坏了，简单压缩状态已不再是稳定的了．这种解的唯一性被破坏的现象，有时称为分叉，图 1.1.3 示出了载荷 P 与杆中点挠度 y_{max} 的关系曲线，实线表示稳定状态，虚线表示不稳定状态[1]，A 点 $(0,\ P_{cr})$ 表示分叉点．最早在实验中观察到压杆失稳现象的学者是 P. Musschenbrock(1729 年)，而给出其完整的挠曲线解答的学者是 L. Euler (1744 年)．

同样的现象也出现在其他结构中．例如，直杆的纯扭转问题，当杆端所受的扭矩 $M < M_{cr}$ 时，通常的扭转解是唯一的解，当 M 达到 M_{cr} 时，杆就呈现弯曲状态．薄梁的弯

1) 在本书所有的载荷(或参数)-位移(或其他状态变量)关系曲线图中若不加特别说明，虚线均表示不稳定，实线均表示稳定．

曲问题，柱壳的轴压问题、外压问题、扭转问题以及矩形板或圆板的受压问题等等都会出现类似的现象．工程上把这类失稳现象称为屈曲（buckling）现象．

1.1.3 薄瓦条的弯曲

图 1.1.4(a)所示为一段长的扁圆柱壳形薄瓦条，其端部承受弯矩作用（方向如图中所示）．当弯矩M较小时，薄瓦条的变形是通常梁的弯曲变形．但当M达到 M_{cr} 值时，壳体便突然跳跃到图 1.1.4(b) 所示的状态．这时，原来柱壳的圆弧段近似变为直线段，而原来的直母线却弯曲为曲率相当大的圆弧段了．通常，这类现象被称之为弹跳失稳．工程上称之为塌陷（snapping）．类似的例子还有受外压的弹性薄球盖．通过简单计算可知，球

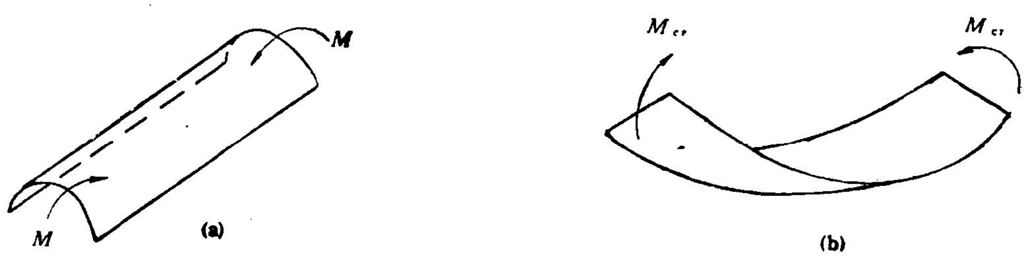

图 1.1.4 两端承受弯矩的薄瓦条

壳在均匀外压P作用下其壳内的变形状态是

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\frac{PR}{2Eh}$$

式中，R为球壳中面的半径；h为壳厚；ε_1，ε_2 是壳中面上任意一点的切平面内两个相互垂直方向上的应变．这个变形状态也是一个简单的受压变形状态．但是当P增大到 P_{cr} 值时球壳的形状就不再是稳定的平衡状态，而会突然变形为下坍形状，且整个过程是跳跃式地进行的，见图 1.1.5.

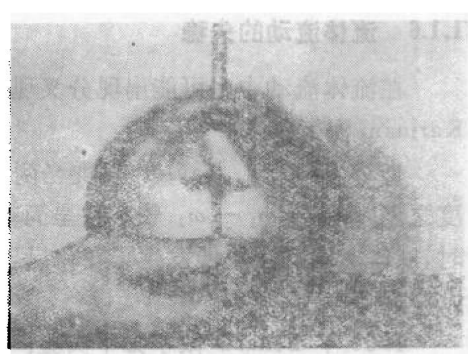

图 1.1.5 球壳的塌陷

1.1.4 颈缩与断裂

在进行材料的简单拉伸试验时，随着拉力的增大，试件将不断均匀地变细．但当拉力P增大到某一值后，试件的某些部位的截面将变得比别的截面更细，即出现颈缩现象．拉力再增大，就会出现断裂现象，如图 1.1.6(a)，(b) 所示．

材料的颈缩或断裂反映了试件的某一特征尺寸对外力的相依关系．外力增大时，这一尺寸急剧减小（或扩大）．从这一观点看，整个断裂力学都可以看为一种特殊形式的稳定性问题．

可以列举很多类似的现象，如含水的物体在失水变干后发皱，土地失水后的龟裂，某

些瓷釉烧结完后出现有规律的裂纹，皱纹漆、锤纹漆等干燥时出现的花纹等等.

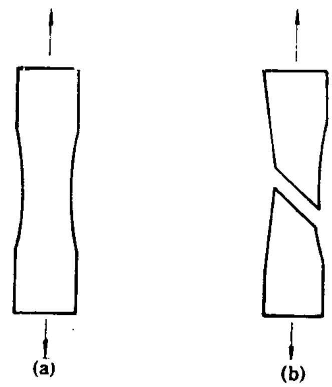

图 1.1.6 颈缩与断裂

1.1.5 参数变化引起的颤振

如图 1.1.7 所示，平板 AB 是 A 端弹性固定的刚性板，AB 处于与它平行的定常匀速层流中，气流的流速

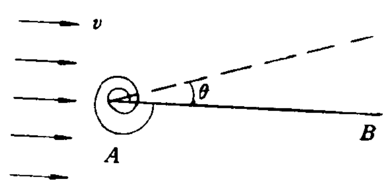

图 1.1.7 流体中的板

v 可以看为问题的一个参数. 显然，在这个系统中，不论 v 的大小，这个定常均匀流总是满足理想流体运动方程的一个解. 从板的角度来看，刚性板的偏转角 $\theta=0$ 总是该系统的一个解. 但是实验和计算结果都表明，当流速 v 达到某个速度 v_{cr} 时，刚性板由于支承端的弹性作用(设弹性反力矩和 θ 成正比)将产生偏转振动. 这就是最简单的颤振现象. 可见，当气流速度达到或超过临界速度 v_{cr} 时，均匀流场将不再是一个稳定状态. 实际的流场将是受刚性板振动干扰后的不均匀和非定常的流场. 这时，刚性板除 $\theta=0$ 之外还有一个振动的状态.

类似这种现象的例子还可以举出很多，如水管由于水流速度引起的颤振，机翼颤振，摩擦引起的噪声，高速旋转弹性杆件的振动，风吹引起树叶的沙沙作响等等. 二胡、提琴、单簧管、双簧管、唢呐等乐器奏出优美的音乐也都基于类似的道理. 这类失稳现象，有时被称为参数振动，它们是和后面要讨论的 Hopf 分叉联系在一起的.

1.1.6 流体流动的失稳

在流体流动中也可能出现分叉现象，其中最著名的例子如 Taylor 涡，Benard 腔及 Karman 涡街.

1923 年 G. I. Taylor 发现当两个同心圆筒旋转运动时，其间的液体在两筒的角速度之差 $\Delta\omega=\omega_1-\omega_2$ 较小时呈简单的纯剪切层流状态. 但当 $\Delta\omega$ 增加到某一值 $\Delta\omega_{cr}$ 时，液体运动的图象便发生了变化，呈现为旋涡环状的流动(见图 1.1.8)，一般称之为 Taylor 涡.

1900 年 Benard 做了如下实验：在温度均匀的水平金属板上盛一薄层液体. 当加热金属板且液体上下表面温差不大时，热量通过热传导方式自下向上传递，液体保持静止. 当温差达到某值时，液体因静平衡失稳而开始流动. 此流动为有规则的层流，流场呈现规则的胞状结构(见图 1.1.9). 每一胞状结构中，流体自中心至边缘形成环流. 这些胞状结构被称之为 Benard 腔.

1912 年 Karman 发现，定常来流在圆柱体后面留下两排周期性的涡旋，这些涡旋互相

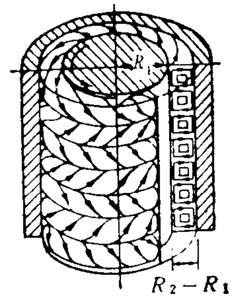

图1.1.8 同心圆筒间的 Taylor 涡

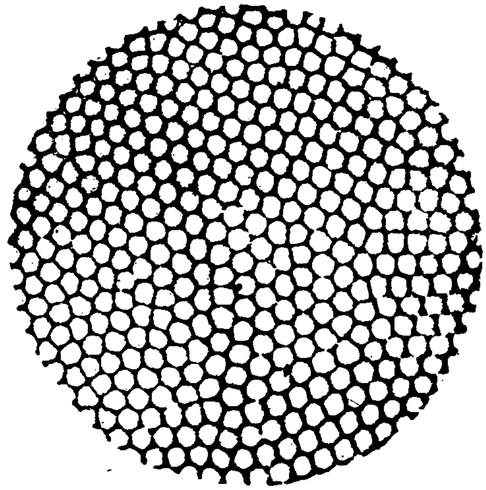

图1.1.9 Benard 用鲸脑油做热对流实验呈现的胞状结构

干扰、互相吸引，形成非线性的所谓涡街，后人又称之为 Karman 涡街．显然，从理论上来说，由于圆柱与流动的流体都具有对称性，因而该流场应当有一个理想的对称解，但实际观察到的却是非对称的运动．这说明在某一参数临界条件下，理想解是不稳定的，也是实现不了的．

图1.1.10 Karman 涡街

从上述例子我们可以看到，不稳定现象在自然界，特别是在力学系统中是普遍存在的（这是我们要着重研究的问题）．这些现象反映了如下一些特点：

（1）在一类力学现象中，我们直接从物体的运动方程求解得到的状态尽管在理论上是存在的，有时却是难于实现的．也就是说，这些状态是不稳定的，实际出现的却是另外的较为稳定的状态．

（2）在这些现象中，状态的变化都与一个或若干个参数有关．这类参数可以是力、速度、温度、几何特征尺寸等几何学的、静力学的或运动学的量．这些参数又因讨论的对象的不同而不同，如在 Euler 压杆问题中我们讨论杆所处状态与杆端施加压力的关系时压力 P 是参数，可以算出临界压力 $P_{cr}=\frac{\pi^2EI}{l^2}$（对两端简支的杆）；但如果我们固定 P 而考虑杆的状态随杆长 l 变化的关系时，又可以选杆长 l 为参数，求出它的临界长度 $l_{cr}=\sqrt{\frac{EI}{P}}\pi$．在这些问题中，当参数取某些值时，理想状态可以实现而且是唯一解；而当参数变化达到某些值时，理想状态便无法实现，这时理想状态称为不稳定的．由稳定状态向不稳定状态转化时所对应的参数值称之为临界值，而参数的临界值应当满足的条件称为临界条件．

归结起来，我们关心的问题是：在一个力学系统中，运动方程所决定的一个状态什么时候是稳定的？什么时候是不稳定的？如何加以判断？更进一步说，要探求在怎样的参数下所讨论的状态是稳定的，而在怎样的参数下所讨论的状态是不稳定的？即要确定系