高等学校试用教材

常微分方程

中山大学数学力学系常微分方程组编

人民教育出版社

高等学校试用教材

常微分方程

中山大学数学力学系常微分方程组编

人民教育出版社

高等学校试用教材
常 微 分 方 程
中山大学数学力学系常微分方程组编
*
人民教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
人民教育出版社印刷厂印装
*
开本 787×1092 1/32 印张 10 8/16 字数 250,000
1978 年 12 月第 1 版 1982 年 3 月北京第 5 次印刷
印数 145,501—156,800
书号 13012·0263 定价 0.77 元

编者说明

本书是在中山大学数学力学系原《常微分方程讲义》基础上，参考国内外一些同类的教材，经过加工和补充编写成为本书．全稿是在许淞庆教授主持下，由王高雄、周之铭、朱思铭、王寿松四位同志分工编写，经过反复讨论、多次修改完成．由于时间匆促，更受科学水平和教学经验的限制，一定存在不少缺点，甚至还有错误之处．恳切希望同志们提出批评和指正．

关于全书各章的主要内容，请参阅各章后面的“学习要点”．下面就我们在编写过程中的几点考虑作些说明．

一、考虑到《常微分方程》不但是数学的基础课，同时也是常微分方程学科本身近代发展方向的重要基础．本书除讲述常微分方程的最基本的从而是比较经典性的传统内容外，在第六章着重介绍微分方程的重要分支——稳定性理论的一般概念和重要结果，其中包括李雅普诺夫第二方法的主要定理及一类控制系统的绝对稳定性问题．同时在第五章讲述线性方程组时，采用了矩阵和向量等工具．为进一步学习这门学科准备某些必要的基础．

二、在编写过程中，力图做到“由浅入深，循序渐进”和“少而精”；注意突出重点，力求论证详细明了，便于自学．在基本定理的证明中，反复运用皮卡逐步逼近法，希望读者不但了解定理内容，同时要掌握这一证明方法．此外，每章还附“学习要点”，对该章内容加以总结，帮助读者掌握各部分基本内容．我们略去一阶偏微分方程部分，对于奇解则只是简单地介绍它的概念和求法．

三、在加强基本理论教学的同时，注意运算技能的培养和训练．书中各部分内容均配有典型例子，并加以说明．此外，各章、节还配有相当数量的习题，希望通过做习题这个环节，来帮助培

养、提高解题能力和技巧.

四、高阶线性方程和线性方程组完全可以统一起来处理，采用矩阵和向量等工具，使叙述上显得十分方便. 但是，我们认为在常系数高阶线性方程的具体求解过程上，不采用先过渡到方程组的办法，而直接应用本书第四章介绍的方法，可能更为简便些.

基于上述的考虑，我们将上述内容分别设章编写：先讲高阶线性方程，后讲一阶线性方程组. 在第五章中，关于常系数线性方程组的基解矩阵的计算，我们避免了化矩阵为约当型的麻烦，但却不能不用到关于空间的分解等较深的代数知识. 有较好的线性代数基础的读者，可以先学习第五章，而将第四章 § 4.1 的结果作为有关定理的直接推论. 因此，使用本书时，对第四章和第五章的有关内容，可以灵活处理，根据实际情况进行调整.

五、在内容安排上，我们既考虑到大纲中关于学时的要求，又不完全受其限制. 书中某些章节，特别第六章的内容是供选讲用的. 这一章的主要定理都给出了证明，有些用小字排印，那是为学有余力的读者而写的. 这些内容讲多讲少请任课教师酌定.

六、最后，鉴于工程技术方面对拉普拉斯变换法的需要，除在第四章和第五章的有关部分加以应用外，还在书末配置附录Ⅰ，介绍拉普拉斯变换的基本概念和主要性质. 此外，考虑到微分方程边值问题的实际意义，在附录Ⅱ中作为参考资料来介绍.

书末附有各章节习题答案，供读者参考.

本书由南京大学主审，复旦大学、武汉大学、兰州大学参加审查. 审稿同志提出许多宝贵意见. 这些意见对本书的定稿工作很有帮助. 本书修改后，又经主审人何崇佑同志认真复审. 在此，我们谨向这些同志表示谢意.

编者于广州中山大学

一九七八年七月

目　录

第一章　绪论……1

§1.1　微分方程:物理过程的数学模型……1

§1.2　基本概念……9

第二章　一阶微分方程的初等解法……15

§2.1　变量分离方程与变量变换……15

2.1.1　变量分离方程……15

2.1.2　可化为变量分离方程的类型……18

2.1.3　应用举例……23

§2.2　线性方程与常数变易法……28

§2.3　恰当方程与积分因子……34

2.3.1　恰当方程……34

2.3.2　积分因子……39

§2.4　一阶隐方程与参数表示……45

2.4.1　可以解出y(或x)的方程……46

2.4.2　不显含y(或x)的方程……50

本章学习要点……53

第三章　一阶微分方程的解的存在定理……59

§3.1　解的存在唯一性定理与逐步逼近法……60

3.1.1　存在唯一性定理……60

3.1.2　近似计算和误差估计……70

§3.2　解的延拓……73

§3.3　解对初值的连续性和可微性定理……75

§3.4　奇解……82

3.4.1　包络和奇解……82

3.4.2　克莱罗方程……85

本章学习要点……89

第四章　高阶微分方程……90

§4.1　线性微分方程的一般理论……90

4.1.1　引言……90

4.1.2　齐线性方程的解的性质与结构……91

4.1.3　非齐线性方程与常数变易法……96

§4.2　常系数线性方程的解法……102
4.2.1　复值函数与复值解……102
4.2.2　常系数齐线性方程和欧拉方程……105
4.2.3　非齐线性方程·比较系数法与拉普拉斯变换法……113
4.2.4　质点振动……123
§4.3　高阶方程的降阶和幂级数解法……133
4.3.1　可降阶的一些方程类型……134
4.3.2　二阶线性方程的幂级数解法……141
4.3.3　第二宇宙速度计算……150
本章学习要点……153
第五章　线性微分方程组……155
§5.1　存在唯一性定理……155
5.1.1　记号和定义……155
5.1.2　存在唯一性定理……163
§5.2　线性微分方程组的一般理论……171
5.2.1　齐线性微分方程组……171
5.2.2　非齐线性微分方程组……179
§5.3　常系数线性微分方程组……188
5.3.1　矩阵指数 exp$\boldsymbol{A}$ 的定义和性质……188
5.3.2　基解矩阵的计算公式……192
5.3.3　拉普拉斯变换的应用……209
本章学习要点……218
第六章　非线性微分方程和稳定性……220
§6.1　引言……220
§6.2　相平面……228
§6.3　按线性近似决定微分方程组的稳定性……241
§6.4　李雅普诺夫第二方法……247
§6.5　周期解和极限圈……258
§6.6　二次型 V 函数的构造与控制系统的绝对稳定性……267
本章学习要点……281
附录 I　拉普拉斯变换……282
附录 II　边值问题……294
习题答案……315

第一章　绪　论

数学分析中所研究的函数，是反映客观现实世界运动过程中量与量之间的一种关系．但在大量的实际问题中遇到稍为复杂的一些运动过程时，反映运动规律的量与量之间的关系(即函数)往往不能直接写出来，却比较容易地建立这些变量和它们的导数(或微分)间的关系式．这种联系着自变量、未知函数及它的导数(或微分)的关系式，数学上称之为**微分方程**，当然其中未知函数的导数或微分是不可缺少的．本章将通过几个具体的例子，粗略地介绍常微分方程的一些物理背景和方程的建立问题，并讲述一些最基本的概念．

§1.1　微分方程：物理过程的数学模型

让我们先从一个具体的例子谈起．

例 1　物体冷却过程的数学模型

将某物体放置于空气中，在时刻 $t=0$ 时，测量得它的温度为 $u_0=150°\mathrm{C}$，10 分钟后测量得温度为 $u_1=100°\mathrm{C}$．我们要求决定此物体的温度 u 和时间 t 的关系，并计算 20 分钟后物体的温度．这里我们假定空气的温度保持为 $u_a=24°\mathrm{C}$．

解　为了解决上述问题，需要了解有关热力学的一些基本规律．例如，热量总是从温度高的物体向温度低的物体传导的；在一定的温度范围内(其中包括了上述问题的温度在内)，一个物体的温度变化速度与这一物体的温度和其所在的介质的温度的差值成比例．这是已为实验证明了的**牛顿(Newton)冷却定律**．

设物体在时刻 t 的温度为 $u=u(t)$，则温度的变化速度以 $\frac{du}{dt}$ 来表示. 注意到热量总是从温度高的物体向温度低的物体传导的，而 $u_0>u_a$，所以温差 $u-u_a$ 恒正，又因物体将随时间而逐渐冷却，故温度变化速度 $\frac{du}{dt}$ 恒负，因此由牛顿冷却定律得到

$$\frac{du}{dt}=-k(u-u_a) \tag{1.1}$$

这里 $k>0$ 是比例常数. 方程(1.1)就是物体冷却过程的数学模型，它含有未知函数 u 及它的一阶导数 $\frac{du}{dt}$，这样的方程，我们称为**一阶微分方程.**

为了决定物体的温度 u 和时间 t 的关系，我们要从方程(1.1)中"解出" u. 注意到 u_a 是常数，且 $u-u_a>0$，可将(1.1)改写成

$$\frac{d(u-u_a)}{u-u_a}=-kdt \tag{1.2}$$

这样，变量 u 和 t 被"分离"开来了. 两边积分，得到

$$\ln(u-u_a)=-kt+\tilde{c} \tag{1.3}$$

这里 $\tilde{c}$ 是"任意常数". 根据对数的定义，得到

$$u-u_a=\mathrm{e}^{-kt+\tilde{c}}$$

由此，令 $\mathrm{e}^{\tilde{c}}=c$，即得

$$u=u_a+c\mathrm{e}^{-kt} \tag{1.4}$$

根据"初始条件"：

$$当\ t=0\ 时，\quad u=u_0 \tag{1.5}$$

容易确定"任意常数" c 的数值. 为此目的，以 $t=0$ 和 $u=u_0$ 代入(1.4)，得到

$$c=u_0-u_a$$

由此

$$u = u_a + (u_0 - u_a)e^{-kt} \tag{1.6}$$

如果 k 的数值确定了，(1.6) 就完全决定了温度 u 与时间 t 的关系.

根据条件 $t = 10$①, $u = u_1$, 得到

$$u_1 = u_a + (u_0 - u_a)e^{-10k}$$

由此，

$$k = \frac{1}{10}\ln\frac{u_0 - u_a}{u_1 - u_a}$$

用给定的 $u_0 = 150$, $u_1 = 100$ 和 $u_a = 24$ 代入，得到

$$k = \frac{1}{10}\ln\frac{150-24}{100-24} = \frac{1}{10}\ln 1.66 \approx 0.051$$

从而

$$u = 24 + 126e^{-0.051t} \tag{1.7}$$

这样，根据方程(1.7)，就可以计算出任何时刻 t 物体的温度 u 的数值了. 例如 20 分钟后物体的温度就是 $u_2 = 64$°C. 方程(1.7)还告诉我们，当 $t \to +\infty$ 时，$u \to 24$°C，这可以解释为：经过一段时间后，物体的温度和空气的温度将会没有什么差别了. 事实上，经过 2 小时后，物体的温度已变为 24.3°C，也就是说，与空气的温度已相当接近了. 而经过 3 小时后，物体的温度为 24.01°C，我们的一些测量仪器已测不出它与空气的温度的差别了. 在实用上，人们认为这时物体的冷却过程已基本结束. 所以，经过一段时间后(比如 3 小时后)，可以认为物体的温度和空气的温度并没有什么差别了.

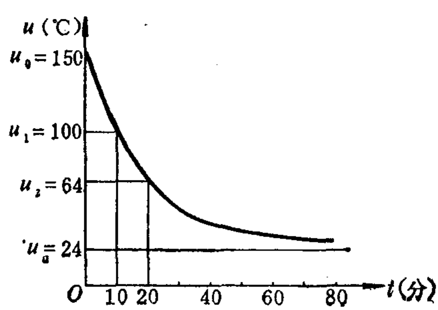

图 (1.1)

微分方程的“解”可以用图形表示出来，这往往给我们一个简明直观的了解. 图

① 为书写方便起见，在运算过程中，我们略去各量的量纲.

(1.1)就是“解”(1.7)的图形.

我们从例1中可以大体看出用微分方程解决实际问题的基本步骤：(1)建立起实际问题的数学模型，也就是建立反映这个实际问题的微分方程；(2)求解这个微分方程；(3)用所得的数学结果解释实际问题，从而预测到某些物理过程的特定性质，以便达到能动地改造世界，解决实际问题的目的.

建立起实际问题的数学模型一般是比较困难的，因为这需要对这个类型实际问题的自然规律有一个清晰的了解(例如，例1中就要了解热力学中的牛顿冷却定律)，同时也需要有一定的数学知识. 为了要建立起实际问题的数学模型，读者一定要学习有关的自然科学和工程技术的专业知识. 微分方程往往可以看作是各种不同物理现象的数学模型. 我们在建立微分方程的时候，只能考虑影响这个物理现象的一些主要因素，而把其他一些次要因素忽略掉. 如果的确考虑到了那些最主要的因素，那么，我们所得到的微分方程，它的解和所考虑的物理现象就是比较接近的. 这时，我们得到的数学模型是有用的；否则，我们还应该考虑其他的一些因素，以便建立起更为合理的数学模型.

我们再举例说明如何建立微分方程的问题，至于如何求解这些微分方程，则留待以后各章再讨论.

例2 R-L 电路

如图(1.2)的 R-L 电路，它包含电感 L，电阻 R 和电源 E，设 $t=0$ 时，电路中没有电流. 我们要求建立：当开关 K 合上后，电流 I 应该满足的微分方程. 这里假设 R、L、E 都是常数.

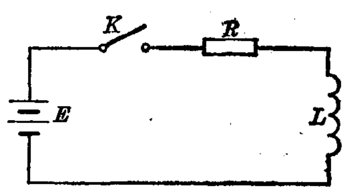

图 (1.2)

解 为了建立电路的微分方程，我们引用关于电路的基尔霍

夫(Kirchhoff)第二定律：在闭合回路中，所有支路上的电压的代数和等于零.

注意到，经过电阻 R 的电压降为 RI，而经过电感 L 的电压降为 $L\frac{dI}{dt}$，由基尔霍夫第二定律得到

$$E-L\frac{dI}{dt}-RI=0$$

即

$$\frac{dI}{dt}+\frac{R}{L}I=\frac{E}{L} \tag{1.8}$$

求出的 $I=I(t)$ 应满足条件：

$$\text{当 } t=0 \text{ 时，} I=0 \tag{1.9}$$

现在我们假定在 $t=t_0$ 时，$I=I_0$，电源 E 突然短路，因而 E 变为零，此后亦保持为零. 这时电流 I 满足方程

$$\frac{dI}{dt}+\frac{R}{L}I=0 \tag{1.10}$$

及条件：

$$\text{当 } t=t_0 \text{ 时，} I=I_0 \tag{1.11}$$

例 3 R-L-C 电路

如图(1.3)所示的 R-L-C 电路，它包括电感 L、电阻 R 和电容 C. 我们设 R、L、C 均为常数，电源 $e(t)$ 是时间 t 的已知函数. 我们要求建立：当开关 K 合上时，电流 I 应该满足的微分方程.

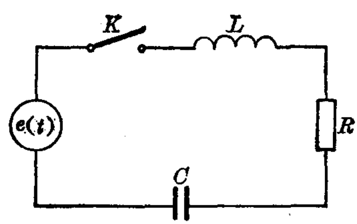

图 (1.3)

解 注意到，经过电感 L、电阻 R 和电容 C 的电压降分别为：$L\frac{dI}{dt}$、RI 和 $\frac{Q}{C}$，其中 Q 为电量，因此，由基尔霍夫第二定律得到

$$e(t)=L\frac{dI}{dt}+RI+\frac{Q}{C} \tag{1.12}$$

因为 $I=\frac{dQ}{dt}$，微分(1.12)得到

$$\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dI}{dt}+\frac{I}{LC}=\frac{1}{L}\frac{de(t)}{dt} \tag{1.13}$$

这就是电流 I 应该满足的微分方程. 如果 $e(t)=$ 常数，得到

$$\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dI}{dt}+\frac{I}{LC}= =0 \tag{1.14}$$

如果又有 $R=0$，则得到

$$\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{I}{LC}=0 \tag{1.15}$$

例 4　数学摆

数学摆是系于一根长度为 l 的线上而质量为 m 的质点 M，在重力作用下，它在垂直于地面的平面上沿圆周运动，如图(1.4)所示. 我们要确定摆的运动方程.

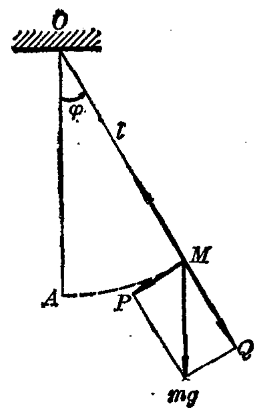

图　(1.4)

解　设取反时针运动的方向作为计算摆与铅垂线所成的角 φ 的正方向. 质点 M 沿圆周的切向速度 v 可以表为 $v=l\frac{d\varphi}{dt}$. 作用于质点 M 的重力 mg 将摆拉回平衡位置 A. 把重力 mg 分解为两个分量 $\overrightarrow{MQ}$ 和 $\overrightarrow{MP}$，第一个分量 $\overrightarrow{MQ}$ 沿着半径 OM 的方向，与线的拉力相抵消，它不会引起质点 M 的速度 v 的数值的改变. 第二个分量 $\overrightarrow{MP}$ 沿着圆周的切线方向，它引起质点 M 的速度 v 的数值的改变. 因为 $\overrightarrow{MP}$ 总是使质点 M 向着平衡位置 A 的方向运动，即当

角 φ 为正时，向减小 φ 的方向运动；当角 φ 为负时，向增大 φ 的方向运动，所以 $\overrightarrow{MP}$ 的数值等于 $-mg\sin\varphi$. 因此，摆的运动方程是

$$m\frac{dv}{dt}=-mg\sin\varphi \tag{1.16}$$

即

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-\frac{g}{l}\sin\varphi \tag{1.17}$$

如果只研究摆的微小振动，即当 φ 比较小时的情况，我们可以取 $\sin\varphi$ 的近似值 φ 代入方程(1.17)，这样，就得到微小振动时摆的运动方程

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{g}{l}\varphi=0 \tag{1.18}$$

如果我们假设摆是在一个粘性的介质中摆动，那么，沿着摆的运动方向就存在一个与速度 v 成比例的阻力. 如果阻力系数是 μ，则摆的运动方程变为

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{\mu}{m}\frac{d\varphi}{dt}+\frac{g}{l}\varphi=0 \tag{1.19}$$

如果沿着摆的运动方向有一个外力 $F(t)$ 作用于它，这时，摆的运动方程变为

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{\mu}{m}\frac{d\varphi}{dt}+\frac{g}{l}\varphi=\frac{1}{ml}F(t) \tag{1.20}$$

当要确定摆的某一个特定的运动时，我们应该给出摆的初始状态：

$$\text{当 } t=0 \text{ 时，} \varphi=\varphi_0,\quad \frac{d\varphi}{dt}=\omega_0 \tag{1.21}$$

这里 φ_0 代表摆的初始位置，ω_0 代表摆的初始角速度.

从以上所举的几个例子中不难发现，完全无关的、本质上不同的物理现象有时可以由同类型的微分方程来描述. 例如，反映物体冷却过程的方程

$$\frac{du}{dt}=-k(u-u_a) \tag{1.1}$$

和反映 R-L 电路中电流变化规律的方程

$$\frac{dI}{dt}+\frac{R}{L}I=\frac{E}{L} \tag{1.8}$$

都可以写成

$$\frac{dy}{dt}+K^2y=B \tag{1.22}$$

这里 K、B 是常数．而 R-L-C 电路的方程

$$\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dI}{dt}+\frac{I}{LC}=\frac{1}{L}\frac{de(t)}{dt} \tag{1.13}$$

和数学摆的强迫微小振动的方程

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{\mu}{m}\frac{d\varphi}{dt}+\frac{g}{l}\varphi=\frac{1}{ml}F(t) \tag{1.20}$$

都具有同一形式

$$\frac{d^2y}{dt^2}+b\frac{dy}{dt}+cy=f(t) \tag{1.23}$$

这里 b、c 是常数．又 L-C 电路方程

$$\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{I}{LC}=0 \tag{1.15}$$

和阻力系数 $\mu=0$ 的数学摆的自由微小振动方程

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{g}{l}\varphi=0 \tag{1.18}$$

均属于同样的数学模型

$$\frac{d^2y}{dt^2}+k^2y=0 \tag{1.24}$$

这里 k 是常数．

不同的物理现象可以具有相同的数学模型这一事实，正是现代许多应用数学工作者和工程人员应用模拟方法解决物理或工程问题的理论根据．例如，利用电路来模拟某些力学系统或机械系

统等等在现时已相当普遍.

以上我们只举出了常微分方程的一些物理背景，其实在自然科学和技术科学的其他领域中，例如化学、生物学、自动控制、电子技术等等，都提出了大量的微分方程问题. 同样在社会科学的一些领域里也存在着微分方程的问题. 因此社会的生产实践是常微分方程理论的取之不尽的基本源泉. 此外，常微分方程与数学的其他分支的关系也是非常密切的，它们往往互相联系、互相促进，例如几何学就是常微分方程理论的丰富的源泉之一和有力工具. 考虑到常微分方程是一门与实际联系比较密切的数学课程，我们自然应该注意它的实际背景与应用；而作为一门数学基础课程，我们又应该把重点放在应用数学方法研究微分方程本身的问题上. 因此，读者不应该忽视本课程中所举出的实际例子以及有关的习题，并从中注意培养解决实际问题的初步能力. 但是，按照课程的要求，我们要把主要的注意力集中到弄清常微分方程的一些基本理论和掌握各种类型方程的求解方法这两方面来，这是本课程的重点，也是我们解决实际问题的必要工具.

§1.2 基本概念

1） 常微分方程和偏微分方程

我们已经知道微分方程就是联系着自变量、未知函数以及它的导数的关系式. 如果在微分方程中，自变量的个数只有一个，我们称这种微分方程为**常微分方程**；自变量的个数为两个或两个以上的微分方程称为**偏微分方程**.

方程

$$\frac{d^2y}{dt^2}+b\frac{dy}{dt}+cy=f(t) \tag{1.23}$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+t\frac{dy}{dt}+y=0 \tag{1.25}$$

就是常微分方程的例子，这里 y 是未知函数，t 是自变量.

方程

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=0 \tag{1.26}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=4\frac{\partial T}{\partial t} \tag{1.27}$$

就是偏微分方程的例子，这里 T 是未知函数，x、y、z、t 都是自变量. 方程(1.26)含有三个自变量，而方程(1.27)含有两个自变量.

微分方程中出现的未知函数最高阶导数的阶数称为微分方程的**阶数**. 例如，方程(1.23)是二阶常微分方程，而方程 (1.26) 与 (1.27)都是二阶偏微分方程. 一般的 n 阶常微分方程具有形式

$$F\left(x,y,\frac{dy}{dx},\cdots,\frac{d^n y}{dx^n}\right)=0 \tag{1.28}$$

这里 $F\left(x,y,\frac{dy}{dx},\cdots,\frac{d^n y}{dx^n}\right)$ 是 x、y、$\frac{dy}{dx}$、$\cdots$、$\frac{d^n y}{dx^n}$ 的已知函数，而且一定含有 $\frac{d^n y}{dx^n}$；y 是未知函数，x 是自变量.

我们学习的这门课程是常微分方程. 今后，我们把常微分方程简称为“微分方程”，有时更简称为“方程”.

2) 线性和非线性

如果方程(1.28)的左端为 y 及 $\frac{dy}{dx},\cdots,\frac{d^n y}{dx^n}$ 的一次有理整式，则称(1.28)为 **n 阶线性微分方程**. 例如，方程(1.23)是二阶线性微分方程. 一般 n 阶线性微分方程具有形式

$$\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=f(x) \tag{1.29}$$

这里 $a_1(x),\cdots,a_n(x)$，$f(x)$ 是 x 的已知函数.