

复合材料细观力学

杜善义 王彪 编著

科学出版社



复合材料细观力学

杜善义 王彪 编著

科学出版社

1998

内 容 简 介

本书是有关复合材料细观理论的专著,是在作者与合作者多年研究工作成果的基础上参考国内、外有关研究文献编写而成。

本书主要内容涉及:复合材料的有效性能、连续纤维和短纤维复合材料细观强度理论、纤维增强复合材料细观损伤及断裂模型、脆性材料增韧、复合材料细观压缩失稳、压电复合材料细观力学、复合材料细观计算力学和复合材料细观实验技术等。每章后均列有参考文献供读者查阅。

本书可供从事复合材料研究和设计人员、复合材料力学工作者参考,也可作为有关专业研究生的教材或教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

复合材料细观力学/杜善义,王彪编著. —北京:科学出版社,1997

ISBN 7-03-006182-9

I. 复… I. ①杜… ②王… III. 复合材料-材料力学
N. TB33

中国版本图书馆CIP数据核字(97)第15771号

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

新蕾印刷厂 印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1998年3月第 一 版 开本:850×1168 1/32

1998年3月第一次印刷 印张:11 1/2

印数:1— 2500 字数:300 000

定价:21.00 元

前 言

复合材料作为先进材料有许多传统材料所无法比拟的优越性,它的研究和应用得到迅速发展。从航空航天、国防推广到民用产业,从主要是结构材料转到既是结构又兼有某种功能的综合性材料,是材料、工程和力学工作者十分感兴趣的研究领域。

我们知道,复合材料本身有强烈的结构特征,它是一种多相体(基体、增强或增韧相、界面相等)材料。因而其性能和损伤破坏规律取决于其组分材料性质,但同时也取决于其细观结构特征,这些特征包括增强相(例如纤维)的体积份数、分布规律、形状以及界面相的性质等。要想揭示复合材料细观特征对其性能的影响,细观力学大有用武之地,这就提出了一个十分有趣、引人入胜的课题,即如何用细观力学的理论和方法去预报和分析其性能、揭示其损伤和破坏的本质。这里有两层重要意义,其一是,为结构设计选材和材料以及结构的安全分析提供理论依据和分析方法;其二则是针对复合材料也是一种结构的特点,用细观力学理论优化性能以至于达到设计复合材料的目。

近十年来,哈尔滨工业大学复合材料研究所的研究人员(包括部分博士研究生)对本领域进行了较为系统的研究,国内外诸多研究者对此也均作出了贡献,考虑到目前国内外尚无复合材料细观力学方面的专著,故决定完成这部汇总我们和国内外本方面研究成果的专著。细观力学理论的研究至少有 40 多年的历史,有一些像 Eshelby 理论等成熟理论,然而这些理论的模型是针对一些简单或理想问题,有一定局限性。因此,对复合材料而言,必须对这些理论进行改进、完善或在这些理论基础上探索新的理论和方法。本书所涉及的复合材料细观理论内容较丰富,不仅有刚度的预报,也有强度和断裂分析,而且有细观计算和实验方法内容,为了使读者

查阅和引用方便,每章后面均列出了与该章内容有关的参考文献。

作者希望并且相信,本书不只是作为一种在复合材料细观方面填补国内空白的专著,而且能够成为从事复合材料研制和应用人员、设计人员、复合材料力学工作者以及有关专业研究生的参考书。

作者特别感谢梁军和刘金喜博士对本书的贡献,他们分别撰写了第二章和第八章,同时为其它章节提供了大量参考资料。同时,作者十分感谢王殿富、韩杰才、吴林志、李文芳等教授在本书写作过程中提供的有益帮助,作者还特别感谢清华大学杨卫教授为本书有关章节所提供的宝贵研究资料,没有他们的帮助,本书是很难完成的。

由于作者水平有限,又无本方面专著可借鉴,不当之处在所难免,希望读者不吝指正。

作者

1997年4月

目 录

前言	v
第一章 绪 论	1
§ 1.1 复合材料细观力学研究概况	1
§ 1.2 复合材料细观力学的研究任务及研究方法	3
§ 1.3 本书内容安排	4
第二章 复合材料的有效性能	5
§ 2.1 复合材料的有效弹性模量	6
§ 2.2 Eshelby 等效夹杂理论	8
§ 2.2.1 Eshelby 相变问题	8
§ 2.2.2 等效夹杂原理	12
§ 2.3 复合材料等效弹性模量的自治理论	15
§ 2.4 有效弹性模量的微分法	24
§ 2.5 预报有效弹性模量的 Mori-Tanaka 方法	28
§ 2.6 复合材料有效弹性模量的上、下限	42
§ 2.6.1 Voigt 和 Reuss 的上、下限	42
§ 2.6.2 Hashin 和 Shtrikman 的上、下限	44
§ 2.7 复合材料的热膨胀系数预报	51
参考文献	55
第三章 连续纤维复合材料细观强度理论	59
§ 3.1 复合材料中的应力集中	60
§ 3.1.1 单根纤维破坏导致的应力集中	60
§ 3.1.2 多根纤维破坏导致的应力集中	67
§ 3.1.3 应力集中的近似计算方法	74
§ 3.1.4 动态应力集中因子	81
§ 3.2 单根纤维强度分布	83
§ 3.3 纤维束的强度分布	86
§ 3.4 单向纤维增强复合材料强度预报	97

§ 3.4.1	均匀载荷分担模型	100
§ 3.4.2	局部载荷分担模型	100
	参考文献	114
第四章	短纤维复合材料细观强度理论	118
§ 4.1	短纤维承载分析	118
§ 4.1.1	弹性应力传递	119
§ 4.1.2	单向短纤维增强金属基复合材料	124
§ 4.1.3	短纤维增强树脂基复合材料	126
§ 4.1.4	短纤维增强陶瓷、水泥等材料	130
§ 4.1.5	随机方位的短纤维增强复合材料	131
§ 4.1.6	纤维之间的相互作用	137
§ 4.2	单向增强短纤维复合材料强度模型	142
§ 4.3	随机短纤维增强复合材料	152
§ 4.4	方位完全随机短纤维复合材料强度问题	157
	参考文献	159
第五章	纤维增强复合材料细观损伤及断裂模型	161
§ 5.1	复合材料细观损伤模型	161
§ 5.1.1	十字叠层的层合板横向层开裂模型	161
§ 5.1.2	复合材料层合板的脱层损伤	175
§ 5.2	脆性基体复合材料断裂模型	199
§ 5.2.1	脆性基体稳态开裂应力	199
§ 5.2.2	确定基体开裂应力的桥联模型	215
§ 5.3	复合材料断裂的统计细观力学模型	227
	参考文献	235
第六章	脆性材料增韧增强模型	238
§ 6.1	相变增韧模型	239
§ 6.2	微裂纹增韧模型	247
§ 6.3	偏转增韧	250
	参考文献	250
第七章	复合材料的细观压缩失稳	251
§ 7.1	单向复合材料细观压缩失稳研究概况	251
§ 7.2	平面弹塑性失稳理论	253

§ 7.3	贯穿型失稳及折曲带的形成	255
§ 7.4	表面失稳与扩展折曲带	259
§ 7.5	压缩失稳模式的缺陷敏感性	268
§ 7.6	水平破坏带的扩展	271
	参考文献	271
第八章	压电复合材料的细观力学模型	273
§ 8.1	压电材料的基本方程	274
§ 8.2	压电介质的 Stroh 方法	277
§ 8.3	含椭圆夹杂压电材料的机电耦合场分析	281
§ 8.3.1	椭圆夹杂	281
§ 8.3.2	裂 纹	287
§ 8.4	含椭球形夹杂压电材料的弹性场和电场	288
§ 8.5	压电复合材料的有效性能预报	296
§ 8.5.1	预报有效电弹性能的 Dilute 方法和 Mori-Tanaka 方法	297
§ 8.5.2	典型数值结果	300
附录 A	横观各向同性压电材料的压电方程(x_3 为极化方向)	304
附录 B	$N^i(i=1,2,3)$ 的非零元素(基体横观各向同性压电材料)	304
	参考文献	307
第九章	复合材料细观计算力学	310
§ 9.1	有限元方法	310
§ 9.2	复合材料损伤破坏过程的 Monte-Carlo 模拟	324
§ 9.3	复合材料断裂过程模拟的格构模型	332
	参考文献	340
第十章	复合材料细观实验技术	343
§ 10.1	单根纤维强度分布的实验测试技术	343
§ 10.2	纤维与基体界面性能测试技术	346
§ 10.2.1	压头顶出方法	347
§ 10.2.2	埋藏纤维拨出方法(pull-out)	349
§ 10.2.3	单根纤维碎断测量方法	351
§ 10.2.4	实验测试方案的合理性研究	352

§ 10.3 复合材料层合板层间断裂韧性测定方法	354
§ 10.3.1 双悬臂梁(DCB)弯曲实验方法	354
§ 10.3.2 单边切口挠曲(ENF)试验方法	355
§ 10.3.3 混合型脱层测试方法	356
参考文献	358

第一章 绪 论

§ 1.1 复合材料细观力学研究概况

复合材料是由两种或两种以上组分材料所组成的新材料。根据不同的工程需要,人们可以方便地选取不同的组分材料,采用最适合的复合材料细观结构,优化材料的性能。由于它具有高比强、高比模等许多优越于传统金属材料的性能,在航空航天、建筑、交通、机械、化工设备等许多领域都得到了愈来愈广泛的应用。甚至已成为许多高科技领域的支撑材料。复合材料细观力学的核心任务是建立复合材料宏观性能同其组分性能及其细观结构之间的定量关系,并揭示复合材料结构在一定工况下的响应规律及其本质。为复合材料的优化设计、性能评价提供必要的理论依据及手段。复合材料细观力学最早期的工作可以认为起源于非均匀介质有效性能的预报。可以追溯到19世纪爱因斯坦关于由两种不同介电性能的电介质组成的复合电介质的等效介电常数的预报问题。这类研究的基本问题可归结如下:尽管研究的材料在细观或微观层次上是不均匀的,但总是可以设想存在一有效介质,该有效介质具有与实际非均匀材料同样的响应规律,即具有同样的宏观性能。那么,根据不同的非均匀材料预报它们的等效宏观性能就构成了细观力学最早期的研究工作。尽管预报多晶金属材料的有效性能也曾促进了非均匀材料有效性能预报理论的发展,但客观地说,则是由于60年代以来先进复合材料的发展及广泛应用,人们迫切需要有一个理论来确定两种或多种材料构成的复合材料如何能达到最好的刚度、热物理特性等宏观性能,这些工程需要才真正地促进了复合材料有效性能预报理论研究的发展。这一领域的研究方法及其体系已经相当完备,在人们的头脑中留下了深刻的印象,甚至很多人

认为复合材料细观力学的研究等同于复合材料有效性能的预报。有效性能一般指材料的平均性能,尽管它们也依赖于材料的细观结构,但对其细观结构细节并不太敏感,因此,许多预报复合材料有效性能的工作仅仅包含了纤维体积含量参数作为表征材料细观结构的参数。由于这实际上未充分考虑材料的细观特征,虽然预报方法简单,但未揭示材料性能和破坏的本质。

随着复合材料的发展及广泛应用,人们愈来愈迫切地要求建立更合理完善的理论来预报复合材料的强度、断裂韧性等有关性能。复合材料的强度预报比复合材料有效性能预报要复杂得多。这主要由于复合材料的强度取决于十分复杂的损伤演化过程,包括:基体开裂,界面脱胶及纤维断裂等许多现象。作为揭示材料细观损伤演化过程的基础,Hedgepeth 提出的剪滞法模型占据了十分重要的位置。应用此模型可分析复合材料内部一断裂纤维周围的应力分布。因为能够得到由于部分纤维的破坏对其它未断裂纤维产生的效果,这就可以揭示复合材料的损伤演化规律。剪滞法模型是一简单的近似模型,后来又有大量针对类似问题的研究工作出现。然而,到目前为止,这种载荷传递规律的研究工作还远远未能达到令人满意的程度。最早建立的复合材料细观强度模型可以认为是纤维束强度模型。由于纤维强度的统计分散性,纤维束的破坏也涉及到纤维逐次破坏的损伤过程,但由于存在有未断裂纤维将平均承担总的外加载荷这一简单的载荷传递规律,而使得细观力学的分析工作较为简单。

复合材料细观力学高速发展的另一动力来源于 80 年代中期以来陶瓷等脆性基体复合材料得到人们的广泛关注。陶瓷材料以其耐高温、耐磨、耐腐蚀而著称,但由于其断裂韧性较低的脆性性质限制了它们的广泛应用。随着纤维及晶须增韧陶瓷基复合材料的研制成功,人们发现,通过一些途径可增加陶瓷材料的断裂韧性,而增韧效果同纤维与基体界面性能等细观结构参数密切相关。这样,揭示脆性基体复合材料的增韧机制,寻找具有最佳增韧效果的微结构组合,激发了许多力学工作者同材料科学工作者合作寻

找正确的答案,这使得复合材料细观力学学科得到了进一步的发展。

对复合材料有效刚度而言,尽管有许多问题,例如解析解以及多向编织材料的复杂结构等尚未圆满解决,但从应用和工程角度,从理论和方法上较为成熟。然而,强度、损伤和断裂等性能研究,比其有效模量研究更复杂些,因此,虽然人们投入了相当大的精力对复合材料损伤破坏规律及强度、断裂韧性等性能进行研究,但远未达到令人满意的程度。研究的难点在于复合材料破坏过程的随机性及复杂性。为了取得较大的进展,应该对经典力学的研究方法思路有所突破。目前复合材料发展的一个重要趋势是结构与功能材料一体化。由于多场的耦合作用给细观力学的建模工作带来了较大的困难,同时,该领域的发展又迫切需要复合材料细观力学的指导以使得材料的设计及应用水平有所提高。

§ 1.2 复合材料细观力学的研究任务及研究方法

复合材料细观力学研究的目的在于建立复合材料的宏观性能同其组分材料性能及细观结构之间的定量关系。它要揭示不同的材料组合具有不同宏观性能的内在机制。并回答诸如:为什么该种复合材料具有如此高的强度、刚度、断裂韧性等此类问题。同时,它主要的研究背景还在于,根据工程需要选取合适的组分材料,设计最优的复合材料结构。对于传统金属材料来说,可以针对不同的材料测得其宏观材料性能,并列表以供选择使用。而对于复合材料来说,其组分材料、含量、细观结构等参数稍有变化将产生具有不同宏观性能的不同材料,因此,试图通过实验测得所有材料组合的性能是不现实的。从这一角度看,复合材料细观力学是有明确的工程应用背景,是复合材料发展的重要理论基础。

除了预报复合材料有效性能的细观力学理论体系较为完善外,复合材料的强度、断裂韧性等性能预报的细观力学方法相当广泛,还未形成一完备的理论体系。但在建立正确的细观力学模型

时,应遵循如下原则:首先应针对所研究的材料进行大量的定性或半定量的宏观性能及细观机制实验工作,以保证对材料在环境载荷作用下的响应有一清晰的认识,并弄清不同的组分材料及细观结构在材料响应中所起的作用。在此基础上,建立预报材料宏观性能的细观力学模型。应该注意的是,组分材料的性能,如纤维的强度,往往具有较大的统计分散性。正是由于这种分散性导致了材料破坏过程十分复杂,已经断裂的纤维无疑会影响到尚未断裂纤维的完整性,这种相互作用是复合材料细观强度模型的复杂所在。如果能够考虑到组分材料的性能及细观结构的随机性以及它们之间的破坏相关性建立这一耗散结构的统计模型,相信可以正确预报材料的宏观性能,揭示复合材料细观结构的演化规律,正如利用统计力学可以揭示临界现象的基本规律一样。

§ 1.3 本书内容安排

本书第一章是绪论。第二章介绍预报复合材料有效性能的细观力学模型。第三章将详细介绍连续纤维复合材料的细观强度模型。在第四章中,将重点引入预报短纤维复合材料强度性能的细观力学理论。第五章的主要内容是讨论纤维增强复合材料的细观损伤和断裂模型。第六章将着重介绍脆性材料的增韧增强模型。第七章对复合材料压缩失稳问题的细观力学研究工作进行扼要总结。第八章将介绍压电复合材料的细观力学模型。第九章对复合材料细观计算力学进行扼要总结。最后,第十章将简单介绍细观实验技术。

第二章 复合材料的有效性能

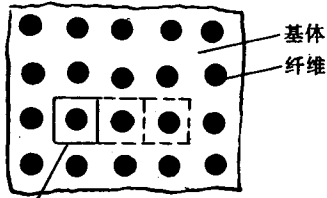
众所周知,单一材料通常难以很好满足工程应用的要求,现在材料工程提供了将两种或两种以上的材料进行复合的工艺手段,这样我们就有可能根据具体的工程应用要求来设计复合材料。在实践中,通过改变复合材料的组分与其几何分布形态就可以改变它的宏观性能。复合材料力学的任务之一就是建立合理的细观力学模型,分析与计算复合材料各组成相的力学性能,几何形状和分布参数与复合材料宏观力学性能之间的关系,从而为复合材料的设计提供理论依据,优化其力学性能。

一般来说,复合材料的基本力学性能可分为两方面,即局部性能和宏观有效性能。对于前一个问题。其关键之处在于如何求得复合材料内部的弹性场,而对于后一个问题,则包含两方面内容,一是刚度预报问题,二是强度预报问题。范赋群等^[1]对复合材料性能提出了混合效应和协同效应的观点,认为混合效应与材料刚度问题密切相关,是个平均效应,而协同效应与材料强度、破坏等现象密切相关,是个非平均效应。本章我们将重点讨论复合材料的刚度问题,强度问题的研究在下面几章中详细介绍。

影响复合材料有效弹性模量的因素可分为两类,一类是复合材料中每一组分材料的弹性常数。另一类是复合材料内部的微结构特征,它包括夹杂(纤维、颗粒、晶须、空洞、裂纹等)的形状、几何尺寸、在基体中的分布和夹杂之间的相互作用。目前,考虑这两类因素的影响,研究复合材料有效性能的细观力学方法很多,大体上较为成熟的理论有:Eshelby^[2,3]等效夹杂理论,自洽理论^[4,5],Mori-Tanaka 方法^[6],微分介质方法^[7],以及利用变分原理求上、下限方法^[8,9]等,下面将详尽介绍这些计算复合材料有效性能的分析方法。

§ 2.1 复合材料的有效弹性模量

复合材料通常是由许多极细小的增强相与基体复合而成,在



代表性体积单元

图 2.1 代表性体积单元

微观尺度上,它具有分区均匀的弹性性质。然而在宏观尺度上,复合材料在结构分析中的作用可以用一与其具有相同弹性性能的等效介质来取代,这一等效介质的弹性模量也被称为复合材料的有效弹性模量。通常在复合材料内部定义代表性体积单元,如图 2.1,这一比

组分材料尺寸大,比宏观材料尺寸小的体积单元,在外载作用下,其应变及响应等同于等效介质的应变及响应,据此,可以求得其有效弹性模量。

为定义复合材料的等效弹性模量,现考虑如下两类均匀边界条件:

$$u_i(s) = \epsilon_{ij}^0 x_j \quad (2.1)$$

$$T_i(s) = \sigma_{ij}^0 n_j \quad (2.2)$$

这里 $u_i(s)$ 和 $T_i(s)$ 为边界 S 上的位移矢量与面力矢量, ϵ_{ij}^0 与 σ_{ij}^0 是常应变张量与常应力张量。在均匀边界条件作用下,除了边界点附近可能有扰动存在,统计均匀的复合材料应力场与应变场也是统计均匀的。由于边界附近点所占的体积与整个复合材料体积相比很小,我们可以认为所有的场量在复合材料的代表性单元内体积平均值就等于它们在复合材料内的体积平均值。

复合材料的等效弹性常数张量 $C_{ij\mu}^*$ 与等效柔度张量 $S_{ij\mu}^*$ 分别定义为

$$\bar{\sigma}_{ij} = C_{ij\mu}^* \bar{\epsilon}_{\mu} \quad (2.3)$$

与

$$\bar{\epsilon}_{ij} = S_{ijkl}^* \bar{\sigma}_{kl} \quad (2.4)$$

其中 $\bar{\sigma}_{ij}$ 与 $\bar{\epsilon}_{ij}$ 为代表性单元内应力与应变的体积平均值。

在给定边界条件(2.1)与(2.2)情况下,利用散度定理易证明:

$$\begin{aligned} v\bar{\epsilon}_{ij} &= \int_v \epsilon_{ij} dv = \frac{1}{2} \int_s (u_i n_j + u_j n_i) ds \\ &= \frac{1}{2} \int_s (\epsilon_{ia}^0 x_a n_j + \epsilon_{ja}^0 x_a n_i) ds \\ &= \frac{1}{2} \int_v [(\epsilon_{ia}^0 x_a)_{,j} + (\epsilon_{ja}^0 x_a)_{,i}] dv \\ &= \frac{1}{2} \int_v (\epsilon_{ia}^0 x_{a,j} + \epsilon_{ja}^0 x_{a,i}) dv \\ &= \int_v \epsilon_{ij}^0 dv = \epsilon_{ij}^0 v \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} v\bar{\sigma}_{ij} &= \int_v \sigma_{ij} dv = \frac{1}{2} \int_s (T_i x_j + T_j x_i) ds \\ &= \frac{1}{2} \int_s (\sigma_{ia}^0 n_a x_j + \sigma_{ja}^0 n_a x_i) ds \\ &= \frac{1}{2} (\sigma_{ia}^0 \int_v x_{j,a} dv + \sigma_{ja}^0 \int_v x_{i,a} dv) \\ &= \frac{1}{2} (\sigma_{ij}^0 + \sigma_{ji}^0) v = \sigma_{ij}^0 v \end{aligned} \quad (2.6)$$

这样,我们就有

$$\begin{aligned} C_{ijkl}^* \epsilon_{kl}^0 &= c_0 \bar{\sigma}_{ij}^{(0)} + \sum_{r=1}^n c_r \bar{\sigma}_{ij}^{(r)} \\ &= C_{ijkl}^{(0)} \epsilon_{kl}^0 + \sum_{r=1}^n c_r (C_{ijkl}^{(r)} - C_{ijkl}^{(0)}) \bar{\epsilon}_{kl}^{(r)} \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} S_{ijkl}^* \sigma_{kl}^0 &= c_0 \bar{\epsilon}_{ij}^{(0)} + \sum_{r=1}^n c_r \bar{\epsilon}_{ij}^{(r)} \\ &= S_{ijkl}^{(0)} \sigma_{kl}^0 + \sum_{r=1}^n c_r (S_{ijkl}^{(r)} - S_{ijkl}^{(0)}) \bar{\sigma}_{kl}^{(r)} \end{aligned} \quad (2.8)$$

式中上标(0)代表复合材料的基体相,(r)代表复合材料的第r类增强相, c_0 与 c_r 分别为基体相与第r增强相的体积比率,它们满足

$$c_0 + \sum_{r=1}^n c_r = 1.$$

式(2.7)与式(2.8)表明,为确定复合材料的有效弹性性质,需要先求得各增强相的平均应变 $\bar{\epsilon}_{ij}^{(r)}$ 或平均应力 $\bar{\sigma}_{ij}^{(r)}$ 。一般来说这是一项非常困难的任务,它依赖于复合材料的所有微结构细节和每相材料的物理特性,其求解只能在一定的近似假定下进行。当然,在一些极其理想的情况下,复合材料有效性能的解析解是可以求出的,如 Hashin [11], Lee 和 Westman [12]。

同样,根据式(2.3)与(2.4)的定义以及散度定理可以证明,在满足边界条件(2.1)与(2.2)的情况下,复合材料内部代表性单元的应变能与余应变能可以分别表示为

$$U = \frac{1}{2} \int_v \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dv = \frac{1}{2} C_{ijkl}^* \epsilon_{ij}^0 \epsilon_{kl}^0 v \quad (2.9)$$

$$U_c = \frac{1}{2} \int_v \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dv = \frac{1}{2} S_{ijkl}^* \sigma_{ij}^0 \sigma_{kl}^0 v \quad (2.10)$$

§ 2.2 Eshelby 等效夹杂理论

从前面的分析知道,复合材料等效弹性模量的计算可以归结为在均匀边界条件下求其内部各离散相的应力与应变的平均值问题。复合材料的增强相可以看作为嵌入弹性基体的夹杂。因此,1957年英国著名科学家 Eshelby 在英国皇家学会会刊中发表了关于无限大体内含有椭球夹杂弹性场问题的文章^[2,3],作者针对含本征应变的椭球颗粒,给出了椭球内外弹性场的一般解,并利用应力等效的方法(后来发展为等效夹杂理论)得到了非均匀椭球颗粒的内外弹性场。他的一个重要结论是当本征应变均匀时(对本征应变颗粒)或外载均匀时(对非均匀颗粒),椭球颗粒内部的弹性场也是均匀的,并可用椭圆积分的形式表示出来,这个解后来就成为等效弹性模量计算的基础。本节将扼要介绍 Eshelby 的工作。

§ 2.2.1 Eshelby 相变问题

设想在一个均匀各向同性的无限大弹性体内有一局部区域 Ω ,其材料由于某种原因(例如相变),在无约束的情况下将产生一