高等学校教材

河工模型试验

清华大学 惠遇甲 王桂仙 合编

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

高等学校教材 河工模型试验 中国水利水电出版社

高等学校教材

河工模型试验

清华大学 惠遇甲 王桂仙 合编

中国水利水电出版社

内 容 提 要

本书除系统介绍河工模型试验的基本理论外，还总结了中华人民共和国成立以来我国各种河工模型的实践经验，特别是在长江、黄河等江河开发中大型枢纽河段的泥沙淤积与河床演变的研究经验。内容包括：量纲分析、模型试验的理论基础、定床河工模型、动床河工模型、各种河工模型的特点与实践、模型沙的选配与性能、量测仪器与设备以及模型的制作和试验成果的整理等。

本书供港口、航道与治河工程专业本科生阅读，并可供其他水利、水电、地理、环保等专业的学生、研究生和科技人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

河工模型试验/惠遇甲，王桂仙合编．—北京：中国水利水电出版社，1999

高等学校教材

ISBN 7-80124-984-4

Ⅰ．河…　Ⅱ．①惠…　②王…　Ⅲ．河工模型试验-高等学校-教材

Ⅳ．TV131.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第 11337 号

书　　名	高等学校教材　**河工模型试验**
作　　者	清华大学　惠遇甲　王桂仙　合编
出　　版	中国水利水电出版社（北京市三里河路 6 号　100044） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：sale@waterpub.com.cn 电话：(010) 63202266（总机）、68331835（发行部）
发　　行	新华书店北京发行所
经　　售	全国各地新华书店
排　　版	中国水利水电出版社微机排版中心
印　　刷	北京京丰印刷厂
规　　格	787×1092 毫米　16 开本　9.75 印张　220 千字
版　　次	1999 年 10 月第一版　1999 年 10 月北京第一次印刷
印　　数	0001—1000册
定　　价	**9.90** 元

前　　言

河工模型试验是水利科学研究中的一项重要研究方法和专门技术，应用甚广，特别是在研究河流泥沙和河道整治方面发挥着重要作用。

近年来，随着水资源的开发利用，在长江、黄河等江河上修建了大量的水利枢纽，进行了大规模的河道整治。在河流动力学、水资源开发理论发展的同时，河工、港工和水工等模型试验的研究中，无论是模型设计理论还是试验技术方面，都取得了很大的成就和积累了丰富的经验，并具有自己的特点。本书在河工模型相似原理的基础上，结合我国的实践经验，介绍了模型设计理论，论述了定床水流模型和动床泥沙模型的设计原理与方法，并总结了各类河工模型试验的特点与经验。希望能从理论和实践相结合的角度上，反映我国的实际情况，并吸收国际上的成就和经验，尽力提高这本教材的水平。

本书是在第一作者教学讲义❶ 的基础上，结合作者们的教学和生产经验，尤其是近年来我国的研究成果重新改写的。

本书内容包括：第一章绪论；第二章量纲分析；第三章模型试验的理论基础；第四章定床河工模型；第五章动床河工模型；第六章各种河工模型的特点与实践；第七章模型沙的选配与性能；第八章河工模型试验的设备和量测仪器；第九章模型的制作验证和试验成果的整理。前七章由惠遇甲编写，第八、九章由王桂仙编写，全书由惠遇甲统稿。

本书承蒙武汉水利电力大学谢鉴衡教授审阅，并提出许多宝贵意见，谨致诚挚的谢意。

由于作者水平和经验所限，敬希读者对错误及不足之处提出批评指正，以便修改。

作　者

1998.4

---

❶ 惠遇甲，《河工模型试验》讲义，清华大学水利系泥沙研究室，1979。

目　　录

第一章　绪　　论

第一节　河工模型试验的意义

模型试验是科学试验中一项重要的研究方法与专门技术，应用甚广。

河工模型试验是运用河流动力学知识，根据水流和泥沙运动的力学相似原理，模制与原型相似的边界条件和动力学条件，研究河流在天然河流情况下或在有水工建筑物的情况下水流结构、河床演变过程和工程方案效果的一种方法。

由于河床演变过程的复杂性，有许多河床演变问题还不能用分析计算方法完善地加以解决，而可以采用模型试验的方法来研究。

因为河工模型试验可以在一定的空间与时间范围内，能够重演天然河流的某些演变过程或预报修建工程后的发展趋势，因此，一个世纪以来，这种解决工程问题的手段越来越多地被加以利用，模型试验的理论与技术也得到了一定的发展。例如，在进行天然河流和水库上下游河床的冲淤变化问题、河道整治建筑物或桥墩附近的局部冲刷问题、海岸港口或河口整治的泥沙问题、水力枢纽和电站机组的泥沙防护问题、渠系的泥沙问题等方面的研究时，都可借助于河工模型试验这种物理模型的研究方法。近年来，根据数理方程利用数学模型使用电子计算机进行计算的方法，在河流问题的研究中获得了广泛的应用与发展，具有迅速、准确、能节约大量人力、物力与时间的显著优点。但如果在河槽形态的发展中不能适当的简化以及问题的三维性质占有十分重要的地位时，或在试验范围内水流通过重要的水工建筑物的情况下，难以用数理方程表达时，目前，数学模型仍然不能代替物理模型。在许多情况下，常采用数学模型与物理模型相结合的研究方式，以求得问题的解决。例如，在长江葛洲坝和三峡枢纽工程的泥沙问题的研究中，就大量地采用了这种方法。

河工模型试验的研究成果，对于制订正确的河流规划和工程设计提供依据方面能起到很重要的影响，因而在国民经济建设中具有一定的作用。从全世界范围来看，自牛顿发表相似理论后，1870 年弗劳德（W. Froude）进行船舶模型试验并提出弗劳德模型相似律，1885 年雷诺（O. Reynolds）进行 Mersey 河模型试验，1898 年恩格斯（H. Engels）在德国建立第一个河流水力学试验室，并于 20 世纪 30 年代接受我国的委托进行了黄河的动床泥沙模型试验。半个多世纪以来，水力模拟迅速地得到发展，并成为解决各种水利工程问题的普遍公认的一种有效工具。近几十年来，河工模型试验的理论与实践已获得了广泛的发展与显著的提高。随着我国水利事业的蓬勃发展，在开发长江、黄河等水利资源的各项工程中进行了许多试验研究工作，对于经济建设起到了重要作用。某些研究成果，在学科上已处于国际先进水平。全国各地已设立了许多水工试验研究机构，河工模型试验技术已被广泛采用，并已获得许多重要的成果和取得效益。当然，模型试验的理论与技术还有不够成熟之处，还不能完全满足生产建设的要求，但随着经济建设的带动和河流动力学的发展，河工模型试验的理论与实践，一定会迅速地发展与提高。

第二节　河工模型试验的种类

河工模型试验按所研究问题的要求可分为定床（固定河床）模型试验和动床（活动的可冲刷河床）模型试验两种。河床在水流作用下不发生变形的模型称为定床模型，河床在水流作用下发生变形的模型称为动床模型。采用定床模型的条件是河床变形不显著或虽有变形而对所要研究的问题影响不大，如研究河道分洪、蓄洪问题时可采用之。当河道变形显著时就要采用动床模型，如研究河道建筑物的局部冲刷问题时可采用之。但由于动床模型试验的理论和技术尚未臻完善，实际上在许多情况下，还只能把河底做成可冲的而岸边做成固定的。研究问题时还有很大的局限性。许多与江河的河床演变有关的问题仍多采用定床或定床与动床相结合的模型试验，有时并采用与数学模型相结合的方法。

河工模型按其几何相似的程度，不论是定床或动床，均可分为正态与变态两种。正态模型是完全遵守几何相似的模型。模型如果能够采用正态当然是最理想。但一般河工模型由于试验场地面积和水流形态的限制，不得不进行变态才能进行试验。因此常将垂直方向的比尺加大，以增加模型的水深和流速，这种模型称为变态模型。通常河工变态模型的水平方向的两个比尺采用一个数值，而垂直方向的比尺则采用另一个数值，水平比尺与垂直比尺的比值称为变态率。当模型需要变态时，须经慎重研究而后确定。

近年来在动床模型试验中还提出了一种自然河工模型试验的方法。这种试验方法主要是定性地模拟河床的演变过程，可用以研究河流上水文泥沙条件发生较大改变时河床演变的发展趋势。这种方法的实践经验还不够多。

除上述水流的河工模型试验方法外，近年来还发展了一种气流模型试验方法。模型多做成定床的，设备简易，能较快地得到定性成果，但精度较差，在规划阶段或初步设计阶段有时采用之。

第三节　河工模型试验的工作内容

每一项河工模型的试验研究任务，按进度一般大致分为下述几个阶段。每阶段的工作内容要点略述如下。

一、试验规划与模型设计阶段

首先要根据工程规划所提出的试验研究任务，进行调查研究、现场查勘、搜集地形图、水道测量图、工程布置图、水文、泥沙和地质资料以及工程设计及附图、本河段的航空或卫星遥感照片、河道的历史变迁、存在的问题及其性质等有关资料，加以详尽的分析研究。

然后按照任务的要求和问题的性质，结合试验场地及供水量的限制、量测设备以及可能利用的模型沙的性能等因素，确定采用定床或动床、正态或变态模型，根据模型相似律的要求，进行模型设计，确定模型比尺、总体布置以及工程方案试验等。

在规划试验和模型设计过程中，常需进行模型沙的选择及性能试验，以供模型设计之用。

还要对模型的规划、设计与制造、仪器设备的准备，以及试验操作等方面所需的时间

与经费进行估计，作出计划。

二、模型制造和量测设备准备阶段

当选定模型比尺及范围，准备了必要的器材后，即可按照几何比尺根据河道断面和地形要求、建筑物的形式和尺寸，准备模型地形断面板、制造和安装模型。模型制造时要防止河槽漏水和沉陷。模型制成后要进行地形的校核，必要时须加修改。

在模型制造的同时，应该进行试验设备的准备和安装工作。试验设备主要有：①水沙循环系统，包括蓄水池、水泵、供水管道、配沙和加沙设备、沉沙池、回水渠等设备；②量水设备，常用的有量水堰、文德里或电磁流量计、孔口箱等。

除上述设备外，还要准备或试制量测仪器，包括测定水位、流速、流向、压力、含沙量、淤积厚度及断面仪等方面的测验仪器。随着科研的发展，现在更加广泛地采用电测仪器，并力求量测自动化。同时还需要准备量测仪表的率定设备。

三、试验的进行阶段

首先要进行模型的验证试验。先要根据实测水位资料对模型进行水位是否相应的率定，常采用加糙或减糙的办法对模型加以修改校正。还要根据天然实测的流速分布、含沙量分布、河床冲淤形态及过程等资料，在模型中对水流运动和泥沙冲淤变化的相似进行验证试验，以判断模型设计的正确程度和模型沙的适应性能。通过验证试验，有时还要调整输沙率比尺或流量持续时间比尺等。

然后再进行正式试验。根据工程规划的各种方案，对于不同水文年系列的河床冲淤变化进行试验。以适应预报河床演变和工程措施效果的需要。

四、试验资料的分析与总结

试验资料的整理与分析，是模型试验工作的重要内容。试验资料的整理与分析应该是边试验边整理，务必及时进行，以便发现问题，及时研究，指导工作。当然，试验结束后要对全部资料进行全面的整理分析，进行全面总结，得出结论，并编写试验研究报告，绘制附图，务期能对工程的规划设计工作和工程方案措施提供必要和充分的科学论据。

第四节　试验计划的实施

上节已叙述了每阶段模型试验任务的工作内容。但要使试验计划得以实现，还须注意下面几个工作环节。

在制订试验计划时，要贯彻实事求是，精益求精的方针和勤俭办科研的精神。计划中除包括试验工作内容及进度外，同时还要有试验各个阶段的经费及器材购置计划。

在参加试验的人力组织方面，要求认真负责，加强组织纪律性。有时由于任务的性质，还可以组织各有关单位的协作，要搞好团结协作。

在物质条件方面。要充分利用原有试验室的场地设备，有时需要建筑些临时性厂房与增添一些必需的设备，试制一些电测仪器。为了完成这些工作需要有一定的加工力量（设备与人力)。量测仪器应力求现代化和自动化，以提高量测精度，节约人力。有时还需要解决水质的处理与电力供应的问题。在北方还有一个防寒问题。

在试验工作中要特别注意模型制造和量测的精度。进行试验工作要有充分的准备与严

密的组织安排。

在进行试验研究过程中要经常检查任务执行情况，及时总结，交流经验。

主 要 参 考 文 献

1 谢鉴衡主编．河流模拟．北京：水利电力出版社，1990

2 水利水电科学研究院，南京水利科学研究院．水工模型试验．第二版．北京：水利电力出版社，1985

3 李昌华，金德春．河工模型试验．北京：人民交通出版社，1981

4 H. 科巴斯主编．水力模拟．清华大学水利系泥沙研究室译．北京：清华大学出版社，1988

5 中华人民共和国行业标准 SL101—94. 河工模型试验规程．1995

6 И И Леви. Моделирование Гидравлических Явлении. Госэнергоиздат，1960

7 M S Yalin. Theory of Hydraulic Models. Macmillan，1971

8 J J Franco. Guidelines for the Design. Adjustment and Operation of Models for the study of River Sedimentation Problems. Waterways Experiment Station. Corps of Engineers，1978

第二章 量 纲 分 析

在进行科学研究时，自然界中很多复杂物理现象的各物理量间相互关系的规律性，例如流动现象，有的尚不能单纯用理论分析的方法进行研究，但可从定性或半定量的方法入手。量纲分析就是这类方法之一。通过定性的思考或半定量的试验，力求先对问题的性质，求解的概貌取得一个总体的理解和估计。从总体上作了定性思考之后，才有可能抓住问题的本质。这种分析问题的能力，要依靠一定的物理直觉和洞察力以及相当的经验，虽然有一定的难度，但应培养这种能力。量纲分析法就是依据流动过程函数式的量纲和谐和齐次的性质，正确地规划试验和处理试验的结果，以求得流动现象中诸变量的函数关系的方法。所谓“量纲”，是指表征物理量类别的量，如长度、速度、力等。量纲分析法不仅是一种建立物理方程的手段，对于流体运动来说，在一定意义上讲，可以视为沟通流体力学和模型实验的理论与实践间的桥梁，它可使试验成果反映出理论的性质，具有指导试验工作的作用。

利用量纲分析法还可以检验已有的经验公式的合理性。此外，利用物理量间的量纲关系，还能用以进行不同量度单位（如国际单位制、英制）的转换。

第一节 量 纲 与 单 位

要想量度某物理“量”时，一般是把这个“量”和它同一“类”的而且是预先选定了的量度单位的量相比较。例如要量度某一物体的“长度”，就必须用预先选定的“米”作为单位来量度。所以说，“单位”是表征物理量数量的量。用它可以表示同类物理量的大小为其若干倍。而如前述，量纲则是表征物理量类别的量，例如上述“长度”或其他的物理“量”，如时间、质量、力等都是表示物理量的类别的，称之为量纲（或称因次、尺度、维），可用符号 [ ] 或不加符号表示，如长度的量纲可用 [L] 或 L 表示，物理量的“量纲”是用“单位”来量度的。

物理量的量纲可分为两类，一是基本量纲，二是导出量纲。力学中的基本量纲有三个，基本量纲也分两种，一是物理量纲，即质量、长度和时间，常用符号为 M、L 和 T，多称 MLT 系统。二是工程量纲，即力、长度和时间，常用符号为 F、L 和 T，多称 FLT 系统。基本量纲彼此独立，不能相互代替。导出量纲是用基本量纲的不同组合形式来表示的。例如速度的量纲 LT^{-1} 便是导出量纲，属于导出量纲的还有加速度、面积、体积、流量、密度等。

单位和量纲是相应的。单位也有基本单位和导出单位之分。公制的基本单位也有两种。一是国际单位，即千克 (kg)、米 (m)、秒 (s)，它相应于基本量纲的质量、长度和时间，国际单位是我国国家标准规定要采用的；二是工程单位，即公斤 (kg)、米 (m)、秒 (s)；这里，公斤是看作力的单位的，而不是质量单位。它对应于 FLT 系统，1 公斤力定义为 1 公斤质量在它的引力作用下的重量，即 1 公斤力是 981 达因。而力的国际单位是牛顿 (N)，$1N=1kgm/s^2$。因为单位与量纲是相应的，所以导出单位可以从导出量纲得出，只是 M、L、T

换以千克、米和秒。例如运动粘滞系数 ν 的单位，根据

$$[\nu]=\frac{\mu}{\rho}=\frac{ML^{-1}T^{-1}}{ML^{-3}}=L^{2}T^{-1}$$

可知其单位为米^2/秒。

流动现象中常用的物理量的量纲及其单位见表 2-1。

表 2-1　　流动现象中常用的物理量的量纲及其单位

项目	物理量（符号）	量方程式	量纲		国际单位		备注
			MLT 系统	FLT 系统	名称	符号	
几何量	长度（L）		L	L	米	m	任一物理量如采用同一单位制，则 MLT 与 FLT 两种量纲系统的单位相同
	面积（A）	$A=L^2$	L^2	L^2	平方米	m^2	
	体积（V）	$V=L^3$	L^3	L^3	立方米	m^3	
运动学量	时间（t）		T	T	秒	s	
	速度（v）	$v=dl/dt$	LT^{-1}	LT^{-1}	米每秒	m/s	
	加速度（a）	$a=\frac{dv}{dt}$	LT^{-2}	LT^{-2}	米每二次方秒	m/s^2	
	流量（Q）	$Q=Av$	L^3T^{-1}	L^3T^{-1}	立方米每秒	m^3/s	
	单宽流量（q）	$q=lv$	L^2T^{-1}	L^2T^{-1}	二次方米每秒	m^2/s	
	运动粘滞系数（ν）	$\nu=\frac{\mu}{\rho}$	L^2T^{-1}	L^2T^{-1}	二次方米每秒	m^2/s	
动力学量	质量（m）		M	$FL^{-1}T^2$	千克（公斤）	kg	
	密度（ρ）	$\rho=m/V$	ML^{-3}	$FL^{-4}T^2$	千克每立方米	kg/m^3	即体积质量
	力（F）	$F=md^2l/dl^2$	MLT^{-2}	F	牛［顿］	N	$1N=1kg\cdot m/s^2$
	重量（W）	$w=mg$	MLT^{-2}	FL^{-3}	牛［顿］	N	
	动力粘滞系数（μ）	$\tau=\mu\frac{dv}{dz}$	$ML^{-1}T^{-1}$	$FL^{-2}T$	帕［斯卡］秒	Pa·s	
	压力压强（p）	F/A	$ML^{-1}T^{-2}$	FL^{-2}	帕［斯卡］	Pa	$1Pa=1N/m^2$
	剪切应力（τ）	F/A	$ML^{-1}T^{-2}$	FL^{-2}	帕［斯卡］	Pa	
	动量（M）	$M=mv$	MLT^{-1}	FT	千克米每秒	kg·m/s	
	能（E）	$E=FL$	ML^2T^{-2}	FL	焦［耳］	J	$1J=1N\cdot m=1W\cdot s$
	动能（E_k）	$E_k=\frac{1}{2}mv^2$	ML^2T^{-2}	FL	焦［耳］	J	
	势能 E_p	$E_p=mgh$	ML^2T^{-2}	FL	焦［耳］	J	
	功率（P）	dE/dt	ML^2T^{-3}	FLT^{-1}	瓦［特］	W	$1W=1J/s$
	矩（M）	$M=FL$	ML^2T^{-2}	FL	牛［顿］米	N·m	
	表面张力（σ）	$\sigma=\frac{F}{L}$	MT^{-2}	FL^{-1}	牛［顿］每米	N/m	

单位与量纲虽然是相应的，但每一种量纲只是代表一种不同类别的量，而每种不同类别的量均可用不同的基本单位来表示。用一种单位所量出的某量纲的具体数值，如欲转换成用另一种单位所量度的具体数值，则须将具体数值乘以一单位与另一单位的转换系数。例如国际单位的长度单位定为米（m），利用它来量度某一长度为3 m，如改用英制的长度单位英

尺（ft）来表示，因为1米＝3.281英尺，则为 3 m＝3×（3.281）ft＝9.483 ft，这个例子中 3.281 就是单位转换系数。

对于一种导出量纲的单位转换，可假定一种量度单位体系的三个基本单位是 e_1, e_2, e_3，而另外一种体系的三个基本单位是 e'_1，e'_2，e'_3，则两种单位之间的关系为

$$
\begin{aligned}
e_1 &= Ae'_1 \\
e_2 &= Be'_2 \\
e_3 &= Ce'_3
\end{aligned}
\tag{2-1}
$$

式中 A，B，C 分别为各单位相互转换的系数，若某一物理量的量纲为 $[\mathrm{M^aL^bT^c}]$，用某一基本单位系 $[e_1，e_2，e_3]$ 来量度得出其导出单位为 $[e_1^a，e_2^b，e_3^c]$ 和具体数值为 x，而用另一基本单位系量度时导出单位为 $[e'^a_1，e'^b_2，e'^c_3]$ 和另一具体数值 x'，根据式（2-1），可求得 x 和 x'间的关系为

$$
\begin{aligned}
x[e_1^a,e_2^b,e_3^c] &= x[(Ae'_1)^a(Be'_2)^b(Ce'_3)^c] \\
&= xA^aB^bC^c[e'^a_1e'^b_2e'^c_3] \\
&= xK[e'^a_1e'^b_2e'^c_3]
\end{aligned}
$$

从上式中显然可知

$$
x' = xA^aB^bC^c = xK, K = A^aB^bC^c \tag{2-2}
$$

在决定了基本量纲和导出量纲之后，便可以决定由基本量纲和导出量纲组合而成的组合量的量纲。这些量纲量在流体力学和模型试验中表现为各种系数和相似准数（或称特征数、判据，如 Re，Fr，Eu 等）的形式。在反映各种物理现象物理量间相互关系经验公式的系数中有些是有量纲的，但也有很多是没有量纲的，如流量系数和各种相似准数等。没有量纲的量是没有单位的，也就是说这些无量纲的值与选择的单位没有关系。例如 $Fr=\frac{v^2}{gh}=1$，不论用公制或英制去量度 Fr 值都是不变的。量纲与单位不同之处在于，尽管物理量可采用种种不同的单位，但无量纲值则恒定不变。

无量纲量其值不随单位而改变的性质，在流体力学和河工模型试验中具有非常重要的意义，正是由于有些量不因单位的改变而改变，才使河工模型试验有了理论上的依据。而受单位制影响的有量纲量不能作为反映客观规律的独立因素，只有无量纲量才能起到这个作用。

综上所述，本节可得如下结论：

(1) 物理量的量纲与单位是相应的，物理量的量纲是通过单位来表现的。同一的量纲可以用不同的单位来表示，但单位的相互变化还是遵循物理过程中量纲的相互关系。

(2) 有量纲的物理量有单位，无量纲的物理量无单位。有量纲的物理量的具体数值要随所采用的基本单位而改变，而无量纲值则不随选用的单位而改变。

(3) 流动现象的物理方程的两边量纲相同，如 $\tau = \mu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$，因为导出量纲是由基本量纲表示的，所以它们的形式不随选用的基本单位不同而有所改变。例如，描述某种流动现象的方程式

$$
y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)
$$

若用新的单位量度，其形式亦不改变，即

$$y' = f(x'_1, x'_2, \cdots, x'_n)$$

这种流动现象方程式不因选用单位而改变其形式的性质称为量纲和谐性。这种性质是量纲分析的基础。

第二节　流动现象方程式的量纲和谐性

一个物理过程方程式不但表明这个过程的物理“量”之间的关系，而且还表明它们的量纲之间的关系。从方程式 $\tau = \mu \dfrac{du}{dy}$ 看，可以理解等式两边量纲是相同的，即量纲是和谐的。可是复杂的水流现象远不是一些具体形式的微分方程式或成指数关系的量纲关系式所能包括的。

对于一般流动现象来说，如果不知它们的量和量纲之间的具体关系，则难于定出具体方程式。对于这些现象，只能一般地令其各物理量之间有函数关系，即以下式表示：

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) \tag{2-3}$$

上式中所包括的变量数和类别在问题的本质未揭示以前应是一个假定。上二式中 $y, x_1, x_2, \cdots, x_n$ 代表各种量纲的物理量。其中可能有些是变数，有些是常数，f 是未定函数。

分析许多技术问题时，在判定其物理过程后常把未知函数表示为各物理量指数相乘积的形式：

$$y = k x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \tag{2-4}$$

上式中 k 为某比例常数，而指数 α_1，α_2，…，α_n 都是未定数。式（2-3）和式（2-4）都是包含着未知数的方程式，必须用试验或理论分析的方法才能最后求出其具体解答。但是式（2-3）这样形式也还不能包括一切物理过程。

如前所述，物理过程方程式是不随选用的单位而改变其形式的。现在，假定某过程的方程式就是（2-3）式，来讨论为了满足“不随选用的单位而改变其形式”的条件，函数式（2-3）所应满足的具体条件。

假定式（2-3）中各变量的量纲为

$$\mathrm{M}^{a_i}\mathrm{L}^{b_i}\mathrm{T}^{c_i}$$

式中 $i=1$，2，…，n。量纲的方次可列成下表：

	y	x_1	x_2	…	x_n
M	a	a_1	a_2	…	a_n
L	b	b_1	b_2	…	b_n
T	c	c_1	c_2	…	c_n

如式（2-2）所示，由于单位变换的结果各变量与变量之间存在有如下关系：

$$\left.\begin{aligned} y' &= yA^aB^bC^c = yK \\ x'_1 &= x_1A^{a_1}B^{b_1}C^{c_1} = x_1K_1 \\ x'_2 &= x_2A^{a_2}B^{b_2}C^{c_2} = x_2K_2 \\ &\cdots \\ x'_n &= x_nA^{a_n}B^{b_n}C^{c_n} = x_nK_n \end{aligned}\right\} \tag{2-5}$$

式中 $K=A^aB^bC^c$，$K_i=A^{a_i}B^{b_i}C^{c_i}$（$i=1$，2，…，$n$）

将式（2-5）代入式（2-3），可得

$$y' = yK = Kf(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

如果换了基本单位而不变方程式的形式，则应有

$$y' = f(x'_1, x'_2, \cdots, x'_n) = f(K_1x_1, K_2x_2, \cdots, K_nx_n) \tag{2-6}$$

式（2-6）就是为了使函数式“不随选用的单位而改变其形式”的具体条件。式（2-6）说明，y 的单位转换系数对原函数的乘积就等于将函数右边的各独立变数乘以相应的量纲转换系数 K_i。这种性质就是量纲分析中的齐次性，而具有齐次性的方程式称为齐次方程式。

量纲分析的基本假定就基于一切物理过程（包括流体运动）的方程式都应满足齐次性的条件。若某些物理过程的方程式都具有量纲和谐的性质，则这些方程式也一定具有齐次性质，因为方程式的齐次性就是在方程式的量纲和谐性的基础上得来的。

综上所述，物理过程方程式的量纲应不随选用单位而改变其形式，这就是它的量纲和谐性。而具有这种性质的方程式必须又是齐次式，因为方程式的量纲和谐性和齐次性是密切相关的。任意的物理过程方程式不一定都是量纲和谐的，但量纲和谐式必然是齐次式。

第三节　量纲分析的普遍理论——π 定理

量纲分析中应用最普遍的定理是布金汉（E. Buckingham）所提出的“π 定理”。这个定理可叙述如下：

假设量纲和谐的方程式中有 n 个物理量，其中有 k 个基本量纲，则这个函数关系式可用 $n-k$ 个无量纲量所组成的关系式来表示。

这个定理可证明如下：

设有包括 n 个物理量的函数式，其形式为

$$x = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{2-7}$$

假定具有基本量纲的量为 k 个，即 x_1，x_2，…，x_k，所余下的量为导出量纲量 x_{k+1}，x_{k+2}，…，x_n，基本量纲的量可表示为

$$[x_1] = A_1, [x_2] = A_2, \cdots, [x_k] = A_k$$

其余各个导出量纲量将具有如下形式：

$$[x] = A_1^{m_1}A_2^{m_2}\cdots A_k^{m_k}$$
$$[x_{k+1}] = A_1^{p_1}A_2^{p_2}\cdots A_k^{p_k}$$
$$\cdots$$
$$[x_{n-1}] = A_1^{q_1}A_2^{q_2}\cdots A_k^{q_k}$$

现将基本单位的量纲量 x_1，x_2，…，x_k 的量度单位分别改为$\frac{1}{\theta_1}$，$\frac{1}{\theta_2}$，$\frac{1}{\theta_k}$，则在新的单位制中这些基本量纲量和导出量纲量 x，x_{k+1}，x_{k+2}，…，x_{n-1}将分别等于

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= \theta_1 x_1, & x' &= \theta_1^{m_1}\theta_2^{m_2}\cdots\theta_k^{m_k}x \\ x'_2 &= \theta_2 x_2, & x'_{k+1} &= \theta_1^{p_1}\theta_2^{p_2}\cdots\theta_k^{p_k}x_{k+1} \\ &\cdots \\ x'_k &= \theta_k x_k, & x'_{n-1} &= \theta_1^{q_1}\theta_2^{q_2}\cdots\theta_k^{q_k}x_{n-1} \end{aligned}\right\} \tag{2-8}$$

利用新的单位制，式（2-7）将具有以下形式

$$
\begin{aligned}
x' &= \theta_1^{m_1}\theta_2^{m_2}\cdots\theta_k^{m_k}x \\
&= \theta_1^{m_1}\theta_2^{m_2}\cdots\theta_k^{m_k}f(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}) \\
&= f(\underbrace{\theta_1x_1}_{x'_1},\underbrace{\theta_2x_2}_{x'_2},\cdots,\underbrace{\theta_kx_k}_{x'_k},\underbrace{\theta_1^{p_1}\theta_2^{p_2},\cdots,\theta_k^{p_k}x_{k+1}}_{x'_{k+1}},\cdots,\underbrace{\theta_1^{q_1}\theta_2^{q_2}\cdots\theta_k^{q_k}x_{n-1}}_{x'_{n-1}}
\end{aligned}
\tag{2-9}
$$

为了减少函数 f 中的变数的数目，假定

$$\theta_1=\frac{1}{x_1},\theta_2=\frac{1}{x_2},\cdots,\theta_k=\frac{1}{x_k}$$

则式（2-9）中前 k 个变量都变为常值 1。这样

$$x'_1=\theta_1x_1=1,x'_2=\theta_2x_2=1,\cdots,x'_k=\theta_kx_k=1$$

式（2-9）中 x'，x'_{k+1}，…都是无量纲的量，如用 π 表示之，并令

$$x'=\pi,x'_{k+1}=\pi_1,\cdots,x'_{n+1}=\pi_{n-1-k}$$

则可得

$$
\left.
\begin{aligned}
\pi &= \frac{x}{x_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdots x_k^{m_k}} \\
\pi_1 &= \frac{x_{k+1}}{x_1^{p_1}x_2^{p_2}\cdots x_k^{p_k}} \\
\pi_{n-1-k} &= \frac{x_{n-1}}{x_1^{q_1}x_2^{q_2}\cdots x_k^{q_k}}
\end{aligned}
\right\}
\tag{2-10}
$$

上列式中 π 值都是无量纲的，因为分子分母的量纲相等。从而方程（2-9）可以写成

$$\pi=f(\underbrace{1,1,\cdots}_{k个},\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_{n-1}) \tag{2-11}$$

这就是所谓 π 定理。可见，n 个有量纲量 x_1，x_2，…，x_n 之间的关系式可以转化为由 $n-k$ 个无量纲量 π_1，…，π_{n-k}之间的关系。不难看出，$k<n$，而 π 的数目等于 $n-k$ 个，不能多于 $n-k$。在力学问题中，k 的数量最大等于 3，如多于 3，就要引入附加的物理常数，结果会使 $n-k$ 的数目保持不变。根据物理方程的定义，它的形式应不随选取单位而改变。在 n 个不同量纲的变量中有 k 个变量因此消去，因为 k 个独立变量不但成为无量纲量，而是具体数值也等于 1。

π 定理表明，有量纲量之间的各种物理关系都可以表述为无量纲量之间的关系。实质上，量纲分析在研究流体力学问题方面所以富有成果，其根源就在于此。

π 定理在流体力学和模型试验中有广泛的应用。在流体力学中应用 π 定理可以使许多公式从纯经验的圈子中解放出来。在模型试验中，常用 π 定理决定相似准数。模型试验的依据便是在两种水流现象中准数保持相同值。

第四节　π 定 理 的 应 用

【例 2-1】　泥沙颗粒在静水中的沉降速度。

令水的密度为 ρ，粘滞系数为 μ，重力加速度为 g，泥沙粒径为 d，泥沙密度为 ρ_s，泥沙颗粒在静水中等速下降时的沉降速度为 ω，则泥沙颗粒沉降现象的函数式可以写为

$$f(\omega,\mu,g,d,\rho,\rho_S)=0 \tag{2-12}$$

在这6个物理量中，有不同量纲的变量有5个（ω，μ，g，d，ρ）相同量纲的变量有1个，即ρ_S。如选d，μ，g这3个变量为基本变量，它们包括3个基本量纲，即M，L，T，而且是独立的，所以$k=3$，则根据π定理可得$n-k=6-3=3$个无量纲数。

d，μ和g的量纲分别为$[\mathrm{L}]$，$[\mathrm{ML^{-1}T^{-1}}]$和$[\mathrm{LT^{-2}}]$。ω，ρ，ρ_S的量纲则为$[\mathrm{LT^{-1}}]$，$[\mathrm{ML^{-3}}]$和$[\mathrm{ML^{-3}}]$。

根据式（2-10）可以写出三个π量如下：

$$\pi=\frac{\omega}{d^{m_1}\mu^{m_2}g^{m_3}}$$

$$\pi_1=\frac{\rho}{d^{p_1}\mu^{p_2}g^{p_3}}$$

$$\pi_2=\frac{\rho_S}{d^{q_1}\mu^{q_2}g^{q_3}}$$

现求上式中的指数m、p和q。

$$[\pi]=\frac{\mathrm{LT^{-1}}}{(\mathrm{L})^{m_1}(\mathrm{ML^{-1}T^{-1}})^{m_2}(\mathrm{LT^{-2}})^{m_3}}=\mathrm{M^0L^0T^0}$$

M：$$-m_2=0$$

L：$$1-m_1+m_2-m_3=0$$

T：$$-1+m_2+2m_3=0$$

解上列三式，得$m_1=\dfrac{1}{2}$，$m_2=0$，$m_3=\dfrac{1}{2}$。

得无量纲量π为

$$\pi=\frac{\omega}{d^{1/2}g^{1/2}}$$

用同样方法，求指数p：

$$\pi_1=\frac{\mathrm{ML^{-3}}}{(\mathrm{L})^{p_1}(\mathrm{ML^{-1}T^{-1}})^{p_2}(\mathrm{LT^{-2}})^{p_3}}=\mathrm{M^0L^0T^0}$$

M：$$1-p_2=0$$

L：$$-3-p_1+p_2-p_3=0$$

T：$$p_2+2p_3=0$$

解之得，得 $$p_1=-\frac{3}{2},\quad p_2=1,\quad p_3=-\frac{1}{2}$$

所以 $$\pi_1=\frac{\rho}{d^{-\frac{3}{2}}\mu g^{-\frac{1}{2}}}=\frac{d^{3/2}g^{1/2}}{\nu}$$

同理，可求得 $$\pi_2=\frac{\rho_S}{d^{-\frac{3}{2}}\mu g^{-\frac{1}{2}}}=\frac{\rho_S}{\rho}$$

因此，式（2-12）可写成

$$f(\pi,\pi_1,\pi_2)=f\left(\frac{\omega}{g^{1/2}d^{1/2}},\frac{g^{1/2}d^{3/2}}{\nu},\frac{\rho_S}{\rho}\right)=0 \tag{2-13}$$