地 震 矩 张 量

及 其 反 演

陈运泰　王培德　吴忠良

国家地震局地球物理研究所
1992 年 11 月　北京

目　录

一. 地震的震源：从双力偶到地震矩张量

对震源物理的研究是当代地震学的一个重要的前沿课题。自本世纪 70 年代后期以来，随着微电子技术的发展，各国地震观测台网相继使用了宽频带、大动态范围、数字记录地震仪，地震记录资料的质量明显改进；同时，计算合成理论地震图的水平亦有所提高。观测技术的进步和解释能力的提高，极大地推动了对震源物理过程研究的进展。

地球物理、大地测量和地质研究都表明浅源地震是由快速扩展的断层错动、即地球介质内部的面上的滑动产生的。震源区内发生的物理过程并非是线弹性过程，但在涉及地震波的辐射问题时，如果以某种方式将震源区运动的非线性排除在外，仍可应用线性的波传播理论。引进等效力，即在地球表面产生的位移与由震源区内的实际物理过程在地球表面产生的位移相同的力，便可做到这点(Aki and Richards, 1980)。天然地震是由于地球介质承受应力的能力骤然降低而自发地发生于地球介质内的一种快速破裂现象，是一种内源。既然如此，就不宜用单力表示它，也不宜用单力偶表示它。在地震学历史上曾以无矩双力偶表示地震的震源(Keilis-Borok, 1957；Honda, 1957)，或以位错表示作为地震震源的地球介质内部的面上的滑动——断层错动(Vvedenskaya, 1956; Steketee, 1958)。从力学观点看，无矩双力偶是一种可以接受的最简单形式的震源，因为这种形式的震源满足作为内源的力学条件，即净力和净力矩都等于零。丸山卓男(Maruyama, 1963)最先指出，各向同性介质中有限尺度的平面断层的滑动在力学上与分布于断层面上的双力偶是严格地等效的。几乎同时，Burridge 和 Knopoff(1964)也发现，对于更一般的情形，即各向异性介质中有限尺度的、不一定是平面的断层的滑动，上述等效性依然成立。

地下核爆炸或化学爆炸引起的体积突然膨胀，以及发生于地球内部的快速扩展的亚稳相变或由相变引起的崩塌(体积突然收缩)，都可激发地震。从最一般的观点出发，各种地震震源可以统一地用弹性多极子即地震矩张量加以表示(Gilbert, 1970, 1973; Backus and Mulcahy, 1976; Backus, 1977a, b)。在震源物理的研究中，迄今主要涉及的是在点源近似的条件下，作为时间函数的二阶地震矩张量。二阶地震矩张量在一级近似上客观地、完整地表示了最一般类型的地震震源的等效力。例如，断层错动(剪切位错)等效于双力偶；在轴向应变存在的情况下，剪切模量的突然变化等效于线性矢量偶极子(Knopoff and Randall, 1970)。总之，地震矩张量是一个普遍概念，它描述了各种型式的震源，剪切位错源(双力偶源)只是其中的一种。用矩张量表示震源，无须对地震破裂过程的细节作任何先验的假定，也不必预先假定断层的存在。

从观测得到的地震图包含有震源、传播路径和地震仪引起的波形畸变（仪器响应）的信息，是这三种效应的综合结果。无论是研究震源物理过程，还是探测地球介质的结构，除了需要对仪器记录产生的畸变进行修正外，还希望能把震源效应和传播路径的效应区分开。用矩张量表示地震震源的特性时，就能将震源效应和传播路径的效应分开，而将资料(记录到的地面运动)、震源和传播路径三者之间的关系归结为一种线性关系。矩张量的引进，可以使确定震源参数的问题线性化：如果已知震源位置和地球介质的结构，由给定的矩张量就可线性地正演出位移场的分布；反之，如果已知震源位置和相应的介质模型下的格林函数，那么由记录资料就可线性地反演出地震矩张量。

地震矩张量反演的一般方法已被成功地运用于许多不同形式的观测资料，如远震体波资料(Fitch *et al*., 1980)、简正振型资料(Gilbert and Dziewonski, 1975)、面波资料(McCowan, 1976)、地下核爆炸的近场宽频带观测资料(Stump and Johnson, 1984)以及天然地震的近震源宽频带观测资料(倪江川等, 1991)。对于天然地震而言，通过地震矩张量反演，不但可以得出它的主要成分——剪切位错源，同时还可得出它所含的其它成分，如膨胀源和补偿线性矢量偶极。对于地下核爆炸而言，通过地震矩张量反演，不但可以得出它的主要成分——膨胀源，还可得出它所含的非各向同性分量。

震源的矩张量表示以及矩张量反演方法是一种具有广阔应用前景的方法。随着对地球介质结构了解的不断增进，计算合成理论地震图能力的提高，以及高质量的数字化地震记录的大量获取，可望通过矩张量的反演进一步阐明地震的震源物理过程。

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

二. 弹性波场的多极子展开

弹性动力学方程的解包括体力、边界值和初值的贡献。可以证明，边界值和初值与体力是等效的。所以，不失一般性，可以将弹性动力学方程的解表示为

$$u_i(\mathbf{r},\ t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t'\iiint_V G_{ij}(\mathbf{r},\ t;\ \mathbf{r}',\ t')f_j(\mathbf{r}',\ t')\mathrm{d}V' \tag{2.1}$$

式中，$u_i(\mathbf{r},\ t)$是 t 时刻 $\mathbf{r}$ 处的位移在 i 方向的分量；$G_{ij}(\mathbf{r},\ t;\ \mathbf{r}',\ t')$是格林函数，它表示 t' 时刻作用于 $\mathbf{r}'$ 处的 j 方向的单位脉冲集中力在 t 时刻、$\mathbf{r}$ 处产生的位移在 i 方向的分量；$f_j(\mathbf{r}',\ t')$是物理上真实的体力和等效的体力的总和。

我们可以把从上述有限的震源体积辐射出的弹性波场围绕震源体内的某一参考点作泰勒展开，级数展开式中的每一项的系数都依赖于时间，它等于震源对该参考点的空间矩。这种级数展开叫做弹性波场的多极子展开，展开式中的相应的系数叫做多极矩。

弹性动力学波场可在球极坐标下按球谐函数作展开；亦可在直角坐标下作多极展开。在直角坐标下，弹性波场的多极展开既可通过将格林函数展开成泰勒级数求得，也可通过将体力展开成广义函数的级数求得。我们将证明，这二种展开是完全等效的。

(一) 体源的多极子展开

若体力不为零的区域只限于 V 内的一个有限的区域 V_0，那么(2.1)的空间积分区域仅限于 V_0。如果我们仅讨论边界条件不依赖于时间的情形，那么在这种情形下，格林函数中的时间原点是可以随意移动的，从而上式可改写为：

$$u_i(\mathbf{r},\ t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t'\iiint_{V_0} G_{ij}(\mathbf{r},\ t-t';\ \mathbf{r}',\ 0)f_j(\mathbf{r}',\ t')\mathrm{d}V' \tag{2.2}$$

如果 V_0 的线性尺度很小，则可将 $G_{ij}(\mathbf{r},\ t-t';\ \mathbf{r}',\ 0)$或 $f_j(\mathbf{r}',\ t')$围绕着 V_0 内的某一参考点 $\mathbf{r}^0$ 展开，这样，如果要计算 $u_i(\mathbf{r},\ t)$时我们就无须知道 V_0 内各点的 G_{ij}，而只须知道 $\mathbf{r}'=\mathbf{r}^0$处的 G_{ij}及其各阶导数。

4. 格林函数的泰勒级数展开

将格林函数在 $\mathbf{r}'=\mathbf{r}^0$ 点展开成泰勒级数:

$$
\begin{aligned}
G_{ij}(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',0) &= G_{ij}(\mathbf{r},t;\mathbf{r}^0,0)+(x_k'-x_k^0)\partial G_{ij}(\mathbf{r},t;\mathbf{r}^0,0)/\partial x_k^0 \\
&+\frac{1}{2!}(x_{k_1}'-x_{k_1}^0)(x_{k_2}'-x_{k_2}^0)\partial^2 G_{ij}(\mathbf{r},t;\mathbf{r}^0,0)/\partial x_{k_1}^0\partial x_{k_2}^0+\cdots \\
&+\frac{1}{n!}(x_{k_1}'-x_{k_1}^0)(x_{k_2}'-x_{k_2}^0)\cdots(x_{k_n}'-x_{k_n}^0)\partial^n G_{ij}(\mathbf{r},t;\mathbf{r}^0,0)/\partial x_{k_1}^0\partial x_{k_2}^0\cdots\partial x_{k_n}^0 \\
&+\cdots
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

将上式代入(2.2)式可得:

$$
\begin{aligned}
u_i(\mathbf{r},t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t'\iiint_{V_0}\Big\{ & G_{ij}(\mathbf{r},t-t';\mathbf{r}^0,0)+(x_k'-x_k^0)\partial G_{ij}(\mathbf{r},t-t';\mathbf{r}^0,0)/\partial x_k^0 \\
&+\frac{1}{2!}(x_{k_1}'-x_{k_1}^0)(x_{k_2}'-x_{k_2}^0)\partial^2 G_{ij}(\mathbf{r},t-t';\mathbf{r}^0,0)/\partial x_{k_1}^0\partial x_{k_2}^0+\cdots \\
&+\frac{1}{n!}(x_{k_1}'-x_{k_1}^0)(x_{k_2}'-x_{k_2}^0)\cdots(x_{k_n}'-x_{k_n}^0)\partial^n G_{ij}(\mathbf{r},t-t';\mathbf{r}^0,0)/\partial x_{k_1}^0\partial x_{k_2}^0\cdots\partial x_{k_n}^0 \\
&+\cdots\Big\}f_j(\mathbf{r}',t')\mathrm{d}V'
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

在上式中 $G_{ij}(\mathbf{r},t-t';\mathbf{r}^0,0)$及其各阶导数与积分变量 $\mathbf{r}'$ 无关，我们可将它们移至体积分号之外:

$$
\begin{aligned}
u_i(\mathbf{r},t) &= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t'\,G_{ij}(\mathbf{r},t-t';\mathbf{r}^0,0)\iiint_{V_0}f_j(\mathbf{r}',t')\mathrm{d}V' \\
&+\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t'\,\partial G_{ij}(\mathbf{r},t-t';\mathbf{r}^0,0)/\partial x_k^0\iiint_{V_0}(x_k'-x_k^0)f_j(\mathbf{r}',t')\mathrm{d}V' \\
&+\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t'\frac{1}{2!}\partial^2 G_{ij}(\mathbf{r},t-t';\mathbf{r}^0,0)/\partial x_{k_1}^0\partial x_{k_2}^0\iiint_{V_0}(x_{k_1}'-x_{k_1}^0)(x_{k_2}'-x_{k_2}^0)f_j(\mathbf{r}',t')\mathrm{d}V' \\
&+\cdots \\
&+\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t'\frac{1}{n!}\partial^n G_{ij}(\mathbf{r},t-t';\mathbf{r}^0,0)/\partial x_{k_1}^0\partial x_{k_2}^0\cdots\partial x_{k_n}^0\iiint_{V_0}(x_{k_1}'-x_{k_1}^0)(x_{k_2}'-x_{k_2}^0) \\
&\cdots(x_{k_n}'-x_{k_n}^0)f_j(\mathbf{r}',t')\mathrm{d}V'+\cdots
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

在上式中的体积分是体力 f_j 的各个阶的空间矩，我们把这些体积分叫做震源(体力)f_j 的多极矩，把上式叫做弹性动力学波场 $u_i(\mathbf{r},t)$的多极子展开。

在多极子展开式中的第一项，即最低阶项是零阶矩，它表示的是在整个体积 V_0 内的总的体力:

$$F_j(\mathbf{r}^0, t') = \iiint\limits_{V_0} f_j(\mathbf{r}', t')\mathrm{d}V' \tag{2.6}$$

零阶矩与参考点 $\mathbf{r}^0$ 的选取无关。

多极子展开式中的第二项是一阶矩，我们称之为矩张量：

$$M_{jk}(\mathbf{r}^0, t') = \iiint\limits_{V_0} (x_k' - x_k^0) f_j(\mathbf{r}', t')\mathrm{d}V' \tag{2.7}$$

类似地，我们可以定义高阶矩。一般形式的 n 阶矩定义为：

$$P_{jk_1k_2\cdots k_n}(\mathbf{r}^0, t') = \iiint\limits_{V_0} (x_{k_1}' - x_{k_1}^0)(x_{k_2}' - x_{k_2}^0)\cdots(x_{k_n}' - x_{k_n}^0) f_j(\mathbf{r}', t')\mathrm{d}V' \tag{2.8}$$

根据这些矩，可将 $u_i(\mathbf{r}, t)$表示成：

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t' \Big\{ & G_{ij}(\mathbf{r}, t-t'; \mathbf{r}^0, 0) F_j(\mathbf{r}^0, t') \\ & + \partial G_{ij}(\mathbf{r}, t-t'; \mathbf{r}^0, 0)/\partial x_k^0 \; M_{jk}(\mathbf{r}^0, t') + \cdots \\ & + \frac{1}{n!} \partial^n G_{ij}(\mathbf{r}, t-t'; \mathbf{r}^0, 0)/\partial x_{k_1}^0 \partial x_{k_2}^0 \cdots \partial x_{k_n}^0 \; P_{jk_1k_2\cdots k_n}(\mathbf{r}^0, t') + \cdots \end{aligned} \tag{2.9}$$

2. 多极矩的物理意义

多极矩的物理意义可以通过考虑各种形式的点源予以理解。例如，考虑一作用于 $\mathbf{r}' = \mathbf{r}^0$ 点的集中力

$$f_j(\mathbf{r}', t') = F_j(\mathbf{r}^0, t')\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}^0) \tag{2.10}$$

式中$\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}^0)$为三维的狄拉克$\delta$-函数。这个集中力所产生的位移可由上式代入(2.2)求得：

$$u_i(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{ij}(\mathbf{r}, t-t'; \mathbf{r}', 0) F_j(\mathbf{r}^0, t')\mathrm{d}t' \tag{2.11}$$

上式与弹性波场的多极子展开式(2.9)中的零阶矩的项完全一样。这说明，零阶矩引起的弹性波场与作用于 $\mathbf{r}^0$ 点的集中力完全等效。

对于一阶矩的物理意义可做类似的解释。为此考虑一个作用于 $\mathbf{r}'=\mathbf{r}^0$ 点的集中力，其空间函数关系由δ-函数的导数表示：

$$f_j(\mathbf{r}', t') = -M_{jk}(\mathbf{r}^0, t')\frac{\partial\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}^0)}{\partial x'_k} \tag{2.12}$$

将上式代入(2.2)式可得这个集中力产生的位移：

$$u_i(\mathbf{r}, t) = -\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t' M_{jk}(\mathbf{r}^0, t') \iiint\limits_{V_0} G_{ij}(\mathbf{r}, t\text{-}t'; \mathbf{r}', 0)\frac{\partial\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}^0)}{\partial x'_k}\ \mathrm{d}V'$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} M_{jk}(\mathbf{r}^0, t')\ \partial G_{ij}(\mathbf{r}, t\text{-}t'; \mathbf{r}^0, 0)/\partial x_k^0\ \mathrm{d}t' \tag{2.13}$$

上式与弹性波场的多极子展开式(2.9)中的一阶矩的项完全一样。这就是说，一阶矩或者说矩张量引起的弹性波场与作用于 $\mathbf{r}^0$ 点的空间函数关系是δ-函数的一阶导数的集中力是完全等效的。

与零阶矩和一阶矩类似，高阶的多极矩相应于作用于 $\mathbf{r}^0$ 点的、空间函数关系是δ-函数的高阶导数的集中力。如(2.13)所示，一阶矩(矩张量)当 $j=k$ 时的矩张量震源是沿 j 方向作用和展布的一对无矩偶极；当 $j\neq k$ 时则为沿 j 方向作用、但沿 k 方向展布的一对单力偶。M_{jk} 的 9 个分量叫做应变核，它是一个二阶张量。与 M_{jk} 的每个分量相应的等效力如图 1 所示。

3. 体力的奇异展开

现在换另一种展开法，不对格林函数展开，而对体力展开，也就是把体力展开成作用于 $\mathbf{r}'=\mathbf{r}^0$ 的集中力及其各阶导数。体力 $f_j(\mathbf{r}', t')$ 可以表示成δ-函数的积分：

$$f_j(\mathbf{r}', t') = \iiint\limits_{V_0} f_j(\mathbf{r}, t')\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r})\mathrm{d}V \tag{2.14}$$

$$= \iiint\limits_{V_0} f_j(\mathbf{r}, t')\delta(x_1'-x_1)\delta(x_2'-x_2)\delta(x_3'-x_3)\mathrm{d}V \tag{2.15}$$

将$\delta(x_k'-x_k)$在$x_k=x_k^0$点作泰勒展开：

$$
\begin{aligned}
\delta(x_k'-x_k) = {} & \delta(x_k'-x_k^0)+(x_k-x_k^0)\partial\delta(x_k'-x_k^0)/\partial x_k^0 \\
& + \frac{1}{2!}(x_k-x_k^0)^2\partial^2\delta(x_k'-x_k^0)/\partial x_k^{0\,2} + \cdots \\
& + \frac{1}{n!}(x_k-x_k^0)^n\ \partial^n\delta(x_k'-x_k^0)/\partial x_k^{0\,n} + \cdots
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

不难看出，

$$
\partial^n\delta(x_k'-x_k^0)/\partial x_k^{0\,n} = (-1)^n\partial^n\delta(x_k'-x_k^0)/\partial x_k'^{\,n}
\tag{2.17}
$$

将上式代入(2.16)式可得：

$$
\begin{aligned}
\delta(x_k'-x_k) = {} & \delta(x_k'-x_k^0)-(x_k-x_k^0)\partial\delta(x_k'-x_k^0)/\partial x_k' \\
& + \frac{1}{2!}(x_k-x_k^0)^2\partial^2\delta(x_k'-x_k^0)/\partial x_k'^{\,2} - \cdots + \cdots \\
& +(-1)^n\frac{1}{n!}(x_k-x_k^0)^n\ \partial^n\delta(x_k'-x_k^0)/\partial x_k'^{\,n} + \cdots
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

将上式代入(2.15)式，我们得到：

$$
\begin{aligned}
f_j(\mathbf{r}',t') = {} & \delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}^0)\iiint_{V_0} f_j(\mathbf{r},t')\mathrm{d}V \\
& -\partial\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}^0)/\partial x_k'\iiint_{V_0}(x_k-x_k^0)f_j(\mathbf{r},t')\mathrm{d}V \\
& + \frac{1}{2!}\partial^2\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}^0)/\partial x_{k_1}'\partial x_{k_2}'\iiint_{V_0}(x_{k_1}-x_{k_1}^0)(x_{k_2}-x_{k_2}^0)f_j(\mathbf{r},t')\mathrm{d}V \\
& - \cdots + \cdots \\
& + (-1)^n\frac{1}{n!}\partial^n\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}^0)/\partial x_{k_1}'\partial x_{k_2}'\cdots\partial x_{k_n}'\iiint_{V_0}(x_{k_1}-x_{k_1}^0)(x_{k_2}-x_{k_2}^0) \\
& \cdots(x_{k_n}-x_{k_n}^0)f_j(\mathbf{r},t')\mathrm{d}V
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

当我们把上式代入(2.2)式后便可得到如(2.5)式所示的多极子展开式。这就是说，若把体力按上式作奇异展开，亦可得到与按(2.3)式对格林函数作泰勒展开得到的同样的结果。

(二) 多极矩在坐标系旋转情况下的变换

在某一直角坐标系中的多极矩与經旋转后的坐标系中的多极矩通过矩阵变换相联系。我们将指出，在这种情形下，n 阶多极矩的坐标变换如同直角坐标中的 n+1 阶张量。

令 x_i，$i=1, 2, 3$ 为某一直角坐标系，$\mathbf{e}_i$ 是沿 x_i 轴的单位矢量，设 x_i'，$i'=1', 2', 3'$ 为与 x_i 同原点的另一直角坐标系，$\mathbf{e}_i'$ 是沿 x_i' 轴的单位矢量，则在 x_i 坐标系中任一矢量 $\mathbf{a}=(a_1, a_2, a_3)$ 的坐标通过下式变换到 x_i' 坐标系中的坐标 $\mathbf{a}=(a_1', a_2', a_3')$

$$a_i' = \gamma_{ij} a_j \tag{2.20}$$

式中 γ_{ij} 是方向余弦：

$$\gamma_{ij} = \mathbf{e}_i' \cdot \mathbf{e}_j \tag{2.21}$$

对零阶矩(总的合力)，根据(2.6)式，在新的坐标系中

$$F_j'(\mathbf{r}^0, t') = \iiint_{V_0} f_j'(\mathbf{r}', t')\mathrm{d}V' \tag{2.22}$$

将 f_j' 以原坐标系表示：

$$F_j'(\mathbf{r}^0, t') = \iiint_{V_0} \gamma_{jp} f_p(\mathbf{r}', t')\mathrm{d}V' \tag{2.23}$$

旋转并不涉及体积元的形变，故上式的积分变量 $\mathbf{r}'$ 可换为 $\mathbf{r}$，于是

$$\begin{aligned} F_j'(\mathbf{r}^0, t') &= \gamma_{jp} \iiint_{V_0} f_p(\mathbf{r}, t')\mathrm{d}V \\ &= \gamma_{jp} F_p(\mathbf{r}^0, t') \end{aligned} \tag{2.24}$$

所以，每一个时刻 t' 的零阶矩的变换如同矢量(一阶张量)的变换一样。

在新的坐标系中矩张量即一阶矩为

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

$$M_{jk}'(r^0, t') = \iiint\limits_{V_0} (x_k' - x_k^{0\prime}) f_j'(r', t') dV'$$

$$= \iiint\limits_{V_0} (x_k' - x_k^{0\prime}) \gamma_{jp} f_p(r', t') dV'$$

$$= \iiint\limits_{V_0} (\gamma_{kq} x_q - \gamma_{kq} x_q^0) \gamma_{jp} f_p(r', t') dV'$$

$$= \gamma_{jp} \gamma_{kq} \iiint\limits_{V_0} (x_q - x_q^0) f_p(r', t') dV'$$

$$= \gamma_{jp} \gamma_{kq} M_{pq}(r^0, t') \tag{2.25}$$

所以，在每一时刻 t' 的一阶矩即矩张量的变换如同二阶张量的变换一样。

对于高阶的多极矩，不难得出其变换关系为：

$$P'_{jk_1k_2\cdots k_n}(r^0, t') = \gamma_{jp} \gamma_{k_1q_1} \gamma_{k_2q_2} \cdots \gamma_{k_nq_n} P_{pq_1q_2\cdots q_n}(r^0, t') \tag{2.26}$$

所以 n 阶多极矩的变换有如 $(n+1)$ 阶张量。

(三) 参考点变动情况下的多极矩的变换

除了零阶矩外，当参考点发生变动时，多极矩一般与参考点有关。设参考点原先位于 r^0，后变至 r'，我们从(2.6)式看出零阶矩与参考点的选取无关，而从(2.7)式可以看出：

$$M_{jk}(r', t') = \iiint\limits_{V_0} (x_k' - x_k^1) f_j(r', t') dV'$$

$$= \iiint\limits_{V_0} (x_k' - x_k^0 + x_k^0 - x_k^1) f_j(r', t') dV'$$

$$= M_{jk}(r^0, t') + (x_k^0 - x_k^1) F_j(r^0, t') \tag{2.27}$$

上式表明，只有当 $F_j(r^0, t') = 0$ 时，$M_{jk}(r^0, t')$ 才与参考点的选取无关。

对于二阶矩 $P_{jk_1k_2}(r', t')$ 可作类似分析：

$$P_{jk_1k_2}(r', t') = \iiint\limits_{V_0} (x_{k_1}' - x_{k_1}^1)(x_{k_2}' - x_{k_2}^1) f_j(r', t') dV'$$

$$= \iiint\limits_{V_0} (x_{k_1}' - x_{k_1}^0 + x_{k_1}^0 - x_{k_1}^1)(x_{k_2}' - x_{k_2}^0 + x_{k_2}^0 - x_{k_2}^1) f_j(r', t') dV'$$

$$=P_{jk_1k_2}(\mathbf{r}^0,t')+(x^0_{k_2}-x^1_{k_2})M_{jk_1}(\mathbf{r}^0,t')$$
$$+(x^0_{k_1}-x^1_{k_1})M_{jk_2}(\mathbf{r}^0,t')$$
$$+(x^0_{k_1}-x^1_{k_1})(x^0_{k_2}-x^1_{k_2})F_j(\mathbf{r}^0,t') \tag{2.28}$$

只有当零阶矩和一阶矩全为零时，$P_{jk_1k_2}$才与参考点的选取无关。

对于高阶的多极矩可作类似的推导，结果是

$$P_{jk_1k_2\cdots k_n}(\mathbf{r}',t')=P_{jk_1k_2\cdots k_n}(\mathbf{r}^0,t'),$$

$$\text{若}\ P_{jk_1k_2\cdots k_m}(\mathbf{r}^0,t')=0,\qquad m=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1 \tag{2.29}$$

根据以上分析，可以得出下述结论：最低阶的、非零的多极矩与参考点的选取无关，但阶数高于此阶数的多极矩则与参考点的选取有关。

(四) 多极矩的相对幅度

弹性波场的多极子展开式中最重要的一点是在什么条件下可以截断多极子展开。由(2.9)式可以看出，n 阶多极矩对位移的贡献

$$\sim \frac{1}{n!}\ \left|G_{ij}\right|(\frac{2\pi}{\lambda})^n\cdot 3^n\cdot L^n\cdot\left|f_j\right| = \frac{1}{n!}\ (\frac{6\pi L}{\lambda})^n\left|G_{ij}\right|\cdot\left|f_j\right| \tag{2.30}$$

式中，$(2\pi/\lambda)^n$ 因子是由于对 x_{k_1}，x_{k_2}，$\cdots$，x_{k_n} 求偏导数得出的，λ是所涉及的最小波长；3^n 因子是由于 k_1，k_2，$\cdots$，k_n 每一个都取 1, 2, 3；L 是参考点至 V_0 内任何点的最大距离即震源体的线性尺度。由上式可见，当λ〉〉L 时，也即震源较之波长小得多时，只需保留多极子展开中的头一、两项。特别是对于地震震源来说，必须满足内源的条件，所以 $F_j=0$，在展开式中只需保留一阶矩即矩张量的项。并且，对于地震震源来说，还必须满足作为内源的另一个条件即总力矩为零(角动量守恒)的条件：

$$\iiint_{V_0}(x'_j-x_j^{\circ})f_k(\mathbf{r}',t')\mathrm{d}V'-\iiint_{V_0}(x'_k-x_k^{\circ})f_j(\mathbf{r}',t')\mathrm{d}V'=0 \tag{2.31}$$

即 M_{jk}是一个对称的二阶张量：

$$M_{jk}=M_{kj} \tag{2.33}$$

三.地震矩张量

前面曾经说过，天然地震是由于地球介质承受应力的能力骤然降低而产生的，它是自然地发生于地球介质内的一种快速破裂现象。所以，天然地震的震源是一种内源。既然如此,就不宜用单力表示它，也不宜用单力偶表示它。传统上，在地震学中是以无矩双力偶或位错来表示地震的震源的。位错元与无矩双力偶在力学上是严格地等效的。从力学观点看，位错源或与之等效的无矩双力偶是一种可以接受的最简单形式的震源，因为这种形式的震源满足作为内源的力学条件，即净力和净力矩都等于零。

地震也可以是由地下核爆炸或化学爆炸所激发的，并且还可以是由快速相变所产生的。从最一般的观点看，可以把地震的震源描写为偏离了弹性应变的体积源。地球介质内发生的热膨胀、相变以及塑性形变等等都可以导致在某一体积 V 内出现无应力应变(stress-free strain)，也就是"假的"应变("transformation" strain)。我们把这个偏离弹性应变的体积叫做地震的震源体，也就是地震体源。若以 $\mathbf{E}^T$ 表示体积 V 内的无应力应变，以 $\mathbf{E}$ 表示总应变，那么介质中的弹性应变就是($\mathbf{E}-\mathbf{E}^T$)，而弹性应力 $\mathbf{T}$ 与应变的关系遵从广义虎克定律:

$$\mathbf{T}=\mathbf{C}:(\mathbf{E}-\mathbf{E}^T) \tag{3.1}$$

式中，$\mathbf{C}$ 是弹性模量张量。以分量形式表示，则为:

$$\tau_{jk}=C_{jkpq}(\epsilon_{pq}-\epsilon^T{}_{pq}) \tag{3.2}$$

将(3.1)式代入体力 $f=0$ 的弹性动力学运动方程可得:

$$\nabla\cdot\left[\mathbf{C}:\mathbf{E}(\mathbf{u})\right]+\mathbf{f}^T(\mathbf{r},\ t)=\rho(\mathbf{r})\frac{\partial^2\mathbf{u}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} \tag{3.3}$$

式中

$$\mathbf{f}^T(\mathbf{r},t)=-\nabla\cdot(\mathbf{C}:\mathbf{E}^T) \tag{3.4}$$

这说明，分布于体积 V 内的无应力应变在力学上与体力 $\mathbf{f}^T$ 是等效的。若以 $\mathbf{m}$ 表示与非弹性应变 $\mathbf{E}^T$ 通过线弹性的本构关系联系起来的非弹性应力张量，

$$\mathbf{m}=\mathbf{C}:\mathbf{E}^T \tag{3.5}$$

那么与上式所定义的非弹性应力张量在体积 V 内的分布等效的体力分布便是：

$$\mathbf{f}^{\Gamma}(\mathbf{r},\ t)=-\nabla\cdot\mathbf{m}(\mathbf{r},\ t) \tag{3.6}$$

$\mathbf{m}(\mathbf{r},\ t)$叫做地震矩密度张量，也叫做应力过量(stress glut)。

在体积 V 的表面 S 的内侧，与上述非弹性应力张量相联系的应力是 $\mathbf{m}\cdot\mathbf{n}$，这里 $\mathbf{n}$ 是 S 的外法向，所以，沿着 $\mathbf{n}$ 方向，应力跃变为$-\mathbf{m}\cdot\mathbf{n}$.

由表示定理可得，当初始位移 $\mathbf{u}(\mathbf{r},\ 0)=0$ 和初始速度 $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{r},\ 0)=0$ 时，由非弹性应力张量 $\mathbf{m}$ 所引起的位移可以由等效的体力 $\mathbf{f}^{\Gamma}$ 和作用于 S 上的应力跃变 $-\mathbf{m}\cdot\mathbf{n}$ 的贡献之和求得：

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(\mathbf{r},\ t)\ =\ &\int_0^t dt'\iiint_V \mathbf{G}(\mathbf{r},\ t;\ \mathbf{r}',\ t')\cdot\mathbf{f}^{\Gamma}(\mathbf{r}',\ t')dV'\\ &-\int_0^t dt'\oiint_S \mathbf{G}(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t')\cdot\{-\mathbf{m}(\mathbf{r}',t')\cdot\mathbf{n}\}dS'\end{aligned} \tag{3.7}$$

将(2.6)式代入上式右边第一项，然后对上式右边第一项分部积分，即得：

$$\mathbf{u}(\mathbf{r},\ t)\ =\ \int_0^t dt'\iiint_V \mathbf{m}(\mathbf{r}',\ t'):\nabla\mathbf{G}^{\mathrm{T}}(\mathbf{r},\ t;\ \mathbf{r}',\ t')dV' \tag{3.8}$$

上式对于任何一种具有内源性质的震源都成立；并且，对于任何一种地球介质的模型，只要能计算出相应的格林张量 $\mathbf{G}$，都可由上式计算 $\mathbf{u}$。用分量形式表示，就是：

$$u_i(\mathbf{r},\ t)\ =\ \int_0^t dt'\iiint_V \frac{\partial G_{ij}(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t')}{\partial x'_k}\ m_{jk}(\mathbf{r}',\ t')dV' \tag{3.9}$$

由角动量守恒定理可以证明，$\mathbf{m}$ 是一个对称的二阶张量；也就是说，$\mathbf{m}$ 具有应力张量所具有的一切性质。

矩张量是震源的位置和时间的广义函数。例如，一个剪切断层可以表示为断层面上的矩张量的一种分布。

四. 点矩张量

当所论及的波长远大于震源的尺度时，可以把震源视为点源。在更一般的情况下，与质心的概念类似，点源表示了一种“矩心”。点矩张量震源可以表示为

$$\mathbf{m}(\mathbf{r},\ t)=\mathbf{M}(t)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{4.1}$$

式中，$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$是狄拉克$\delta$-函数，$\mathbf{M}(t)$是这个点源的地震矩张量。和 $\mathbf{m}$ 一样，$\mathbf{M}$ 也具有应力张量所具有的一切性质，如对称性，等等。

将上式代入(3.8)式，可得：

$$\mathbf{u}(\mathbf{r},\ t)\ =\ \int_0^t \mathbf{M}(t'):\nabla\mathbf{G}^{\mathrm{T}}(\mathbf{r},\ t;\ \mathbf{r}',\ t')dt' \tag{4.2}$$

以分量形式表示，则为：

$$u_i(\mathbf{r},\ t)\ =\ \int_0^t \frac{\partial G_{ij}(\mathbf{r},\ t;\ \mathbf{r}',\ t')}{\partial x'_k}\ M_{jk}(t')dt' \tag{4.3}$$

在均匀、各向同性和完全弹性的无限介质中，点矩张量震源所辐射的远场体波可以求得，结果的形式与位错点源所辐射的远场体波表示式完全一样，即：

$$u_i(\mathbf{r},\ t)=\frac{\gamma_i\gamma_j\gamma_k}{4\pi\rho\alpha^3R}\dot{M}_{jk}(t-\frac{R}{\alpha})\ -\ \frac{(\gamma_i\gamma_j-\delta_{ij})\gamma_k}{4\pi\rho\beta^3R}\ \dot{M}_{jk}(t-\frac{R}{\beta}) \tag{4.4}$$

只不过上式中的 $M_{jk}(t)$表示的是一般形式的点源的地震矩张量，不言而喻，位错点源的相应的公式可以视为上式的特殊情形。

在以震源为原点的球极坐标$(R,\ \theta,\ \phi)$中，一般形式的点矩张量辐射的远场体波可以表示为一种优美简洁的形式：

$$u_R^{\mathrm{P}}(\mathbf{r},\ t)=\frac{1}{4\pi\rho\alpha^3R}\ \dot{M}_{RR}(t-\frac{R}{\alpha}) \tag{4.5}$$

$$u_\theta^S(\mathbf{r},\ t)=\frac{1}{4\pi\rho\beta^3 R}\ \dot{M}_{\theta R}(t-\frac{R}{\beta}) \tag{4.6}$$

$$u_\phi^S(\mathbf{r},\ t)=\frac{1}{4\pi\rho\beta^3 R}\ \dot{M}_{\phi R}(t-\frac{R}{\beta}) \tag{4.7}$$

式中，M_{RR}，$M_{\theta R}$，$M_{\phi R}$ 是地震矩张量 $\mathbf{M}(t)$在球极坐标(R，θ，φ)中的三个分量；也可以说，向量（M_{RR}，$M_{\theta R}$，$M_{\phi R}$）是球极坐标中的地震矩张量的径向分量。这是因为.($\mathbf{M}\cdot\mathbf{e}_R$)是 $\mathbf{M}$ 的径向分量,我们可将其类比于作用于法向为 $\mathbf{e}_R$ 的平面上的应力；M_{RR} 是($\mathbf{M}\cdot\mathbf{e}_R$)在径向的分量，且以 P 波速度α传播，我们可将其类比于作用于法向为 $\mathbf{e}_R$ 的平面上的应力在 $\mathbf{e}_R$ 方向的分量；$M_{\theta R}$和 $M_{\phi R}$表示($\mathbf{M}\cdot\mathbf{e}_R$)在切向的两个互相垂直的分量,它们均以 S 波速度β传播， 我们可将它们类比于上述应力在 $\mathbf{e}_\theta$ 和 $\mathbf{e}_\phi$ 方向的分量。于是:

$$M_{RR}=\mathbf{e}_R\cdot\mathbf{M}\cdot\mathbf{e}_R \tag{4.8}$$

$$M_{\theta R}=\mathbf{e}_\theta\cdot\mathbf{M}\cdot\mathbf{e}_R \tag{4.9}$$

$$M_{\phi R}=\mathbf{e}_\phi\cdot\mathbf{M}\cdot\mathbf{e}_R \tag{4.10}$$

正如(4.4)式和(4.5)-(4.7)式所表示的,点矩张量震源所辐射的远场体波正比于矩张量的时间微商即矩张量的变化率。这意味着，如果矩张量表示的是一种很缓慢的局部性的非弹性应力的话，则该矩张量实际上不会辐射出地震波。只有矩张量的快速变化才会辐射出强烈的地震波。大多数地震是矩张量在几秒钟之内急遽地增大的过程；换句话说，大多数地震是上升时间仅有几钞钟的快速变化过程。所以，如果所论及的地震波周期远大于矩张量的上升时间，那么可以用

$$\mathbf{M}(t)=\mathbf{M}H(t) \tag{4.11}$$

和

$$\dot{\mathbf{M}}(t)=\mathbf{M}\delta(t) \tag{4.12}$$

近似地表示矩张量及其变化率。这就是说，除了特别大的地震以外，对于周期很长的地震波而言，大多数的地震象是持续时间很短暂的脉冲源。现在许多人在用数字化的地震资料确定地震的矩张量，正是基于这个前提。要确定对称的矩张量的六个分

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com