

高等学校教学用书

水 力 学

冶金工业出版社

高等学校教学用书

水 力 学

〔日〕吉川秀夫 著

西安冶金建筑学院 王恒凯 合译
武永寿

冶金工业出版社

高等学校教学用书

水 力 学

(日) 吉川秀夫 著

西安冶金建筑学院 王恒凯 合译
武永寿

*

冶金工业出版社出版

(北京北河沿大街嵩祝院北巷39号)

新华书店北京发行所发行

冶金工业出版社印刷厂印刷

*

787×1092 1/16 印张 12 字数 281 千字

1986年10月第一版 1986年10月第一次印刷

印数00,001~2,500册

统一书号: 15062·4481 定价1.65元

前 言

水是我们周围环境的组成之一，它在很多方面与我们的生活都有直接或间接的关系。因而，为了使人们的生活变得更好，了解水的运动学性质和水体运动的利用方法等，就显得非常重要了。

本书所讲述的水力学，是一门主要研究水的运动的学科。还有一门与此相近的学科，叫做流体力学。而在我们面临的实际问题中，有很多问题都因为边界条件复杂难以用流体力学去处理。再者，流体力学中还有尚未完全阐明的部分。所以可以说，水力学是一门以水为研究对象，但比流体力学更着重于实用方面的学科。

现代水力学的主要部分是以流体力学为基础的，而随着科学的发展，水力学和流体力学也日益变得难以区分了。但是，水力学却具有这样的特点，即从实用的观点出发，对于流体力学尚不能充分加以阐明的问题，以给出其近似的解作为自己的目的。这种所谓实用性的水力学的基本性质，恐怕将来也不会改变。当然，水力学中也包含着恰当地应用流体力学知识去处理各种实际问题的方法。

据说学习水力学是相当难的，我想这是因为不得不从实际应用的种种观点去解释水的运动，而没有固定和单一的解决方法的缘故。但是，关于水的运动的基本见解本身，还是比较简单的。如能充分理解这一点，相信读者根据初步的物理学和数学知识，克服困难，大体上掌握水力学还是容易的。克服这个困难的过程，对于培养工程技术方面的能力是有益的，对以后参加各种实际工作所要求的工程技术思考能力，将是一种基本的训练。

基于上述宗旨，本书在叙述方面注意尽量通俗易懂，并在文中配备了例题，各章末附有习题。这是考虑到读者可通过这些问题，以自己的思考加深对内容的理解和培养应用的能力，希望读者能有效地加以利用。习题没有给答案，希望读者自己去思索或相互间加以讨论。

本书的第二章至第六章，讲述水力学的基本理论以及比较简单的应用实例。第七章以后，是用第二章至第六章的知识说明至今所研究过的各种实际问题，同时也注意使读者能学到有关的计算方法。至于应用方面的复杂的计算方法，虽然由于电子计算机的发展已不象过去那么重要了，但学习这些处理问题的思路和方法，对于理解水力学的基本理论以及培养应用的能力，仍然是重要的。

我们身边有关水的问题，每天都会出现新的情况，而精通本书所述的比较初步的水力学知识，则是分析和解决这些问题的第一步。

吉川秀夫

昭和51年3月

目 录

第一章 水及其他流体的物理性质

1.1 密度.....	1
1.2 水的饱和蒸汽压.....	2
1.3 表面张力	2
1.4 粘性	4

第二章 流体运动的基本理论

2.1 流线与流管	7
2.2 欧拉运动方程式.....	8
2.3 连续性方程式	9
2.4 流体的变形与旋转.....	11
2.5 理想流体力学	13
2.5.1 理想流体	13
2.5.2 势流	14
2.5.3 二元势流	15

第三章 伯诺里定理及其应用

3.1 伯诺里定理	22
3.2 对恒定流的应用.....	25
3.2.1 水槽出流	25
3.2.2 毕托管	26
3.2.3 文丘里管	27
3.2.4 虹吸管	29
3.3 对非恒定流的应用	30
3.3.1 管中水的振动	30
3.3.2 水槽的非恒定出流	32
3.4 对明渠流的应用.....	32
3.4.1 缓流和急流	32
3.4.2 比能	36
3.4.3 渐变流的水面形状	37

第四章 流体静力学

4.1 静水压力	41
4.2 相对静止流体的压力	44
4.3 作用在面上的静水压力	46
4.3.1 作用在平面上的静水压力	46

4.3.2 作用在曲面上的静水压力	48
4.4 浮体	50
4.4.1 浮力	50
4.4.2 浮体的平衡	51
4.4.3 浮体的稳定	51

第五章 动量定律及其应用

5.1 动量定律 (恒定运动)	57
5.2 恒定流的动量方程式	57
5.3 作用在物体上的流体力	58
5.4 水跃	62
5.5 比力	65
5.6 冲击波	66

第六章 层流和紊流

6.1 粘性流体的运动方程式	73
6.2 层流	75
6.2.1 平行平板间的层流	76
6.2.2 圆管内的层流	77
6.3 紊流的概念	78
6.4 紊流切应力	81
6.5 管路中的紊流	84

第七章 管路恒定流

7.1 管路恒定流的基本方程式	88
7.1.1 管流的连续性方程式	88
7.1.2 管流的运动方程式	88
7.2 管流的摩擦阻力	91
7.2.1 摩擦阻力的水头损失	91
7.2.2 摩擦损失系数	92
7.3 管流的非摩擦水头损失	95
7.3.1 断面变化的水头损失	95
7.3.2 出口的水头损失	97
7.3.3 进口的水头损失	98
7.3.4 弯管和折管的水头损失	98
7.4 单枝管路系统的分析	99
7.5 分枝与合流管	101

第八章 明渠恒定流

8.1 均匀流	107
8.1.1 平均流速公式	108
8.1.2 均匀流的临界坡度	111

8.2 非均匀流(渐变流)的基本方程式	112
8.3 非均匀流的水面形状	114
8.3.1 不变化渠道中的水面形状	114
8.3.2 变坡度渠道的水面形状	116
8.3.3 变宽度渠道的水面形状	117
8.4 非均匀流水面形状的计算方法	117
8.4.1 不变化渠道的计算方法	118
8.4.2 任意断面不规则渠道的计算方法	118
8.5 二层流	120
8.6 有侧向流入渠道的非均匀流	122
第九章 非 恒 定 流	
9.1 明渠非恒定流	127
9.1.1 非恒定流的基本公式	127
9.1.2 非恒定流的近似解法	128
9.1.3 利用特性曲线的解法	129
9.1.4 明渠阶梯波	134
9.2 管路中的水击压力	136
第十章 波 动	
10.1 波的要素和分类	141
10.2 长波	142
10.2.1 微小振幅长波	142
10.2.2 有限振幅长波	146
10.3 浅水波与深水波	148
10.4 群速	150
第十一章 渗 流	
11.1 达西定律	153
11.2 渗流系数	155
11.3 恒定渗流的基本公式	156
11.4 有自由表面的地下水	159
11.5 非恒定渗流	160
11.5.1 非恒定渗流的基本公式	160
11.5.2 一元非恒定流	162
11.5.3 轴对称非恒定流	164
第十二章 泥 砂 输 送	
12.1 输砂	168
12.2 临界推移力	168
12.3 推移质输砂量	170
12.4 悬移质输砂量	174
附录 单位换算表	183
参考文献	184

第一章 水及其他流体的物理性质

1.1 密度

若物体的重量为 W ，质量为 M ，重力加速度为 g ，则 $W=Mg$ 。设此物体的体积为 V ，则其密度 ρ 和容重（单位体积的重量） γ 及它们的关系为：

$$\rho = \frac{M}{V}, \quad \gamma = \frac{W}{V}, \quad \gamma = \rho g \quad (1.1)$$

如用长度 L 、质量 M 、时间 T 的单位系，则 ρ 和 γ 具有因次：

$$[\rho] = [ML^{-3}], \quad [\gamma] = [ML^{-2}T^{-2}] \quad (1.2)$$

工程技术中一般采用长度 L 、重量（或力） F 、时间 T 的单位系（如重力单位系）。在 L 、 F 、 T 单位系中，容重和密度的因次为：

$$[\gamma] = [FL^{-3}], \quad [\rho] = [FL^{-4}T^2]$$

在一个大气压力下，水的密度和容重与温度的关系如表1.1所示。

因水具有弹性，故其体积随压力增大而减小，水的容重与压力的关系如表1.2所示。从此表可以看出，水的压缩率非常小。所以，除水中有压缩波传播等特殊情况外，在普通压力下水是作为非压缩性流体考虑的。即，水的密度恒取 1g/cm^3 ，容重取 1kgf/l 或 1t/m^3 。

表 1.1 水的密度和容重与温度的关系

温 度 $^{\circ}\text{C}$	-10	0	4	10	15	20	25	30	35
密 度 $\text{kgf}\cdot\text{s}^2/\text{m}^4$	101.76	101.96	101.97	101.94	101.88	101.79	101.67	101.53	101.37
容 重 kgf/m^3	997.9	999.8	1000	999.7	999.1	998.2	997.0	995.6	994.0

表 1.2 水的容重与压力的关系

压力 (kgf/cm^2)	1	50	100	200	500
0 $^{\circ}\text{C}$	999.8	1002.3	1004.8	1009.6	1023.1
容重(kgf/m^3) 20 $^{\circ}\text{C}$	998.2	1000.5	1002.7	1007.2	1018.8
50 $^{\circ}\text{C}$	998.0	990.2	992.4	996.5	1008.0

其他物质的密度对纯水（4 $^{\circ}\text{C}$ ，一个大气压）密度之比，叫做比重。

表 1.3 其他液体的容重（1气压，20 $^{\circ}\text{C}$ ）

液 体	丙 酮	苯 胺	酒 精	甲 醇	海 水	汽 油
容 重 (gf/cm^3)	0.791	1.022	0.789	0.793	1.01~1.05	0.66~0.75
液 体	甘 油	重 油	石 油	二硫化碳	苯	水 银
容 重 (gf/cm^3)	1.264	0.85~0.90	0.80~0.83	1.263	0.879	13.546

水之外的其他液体在一个大气压力下的容重，如表1.3所示。一个大气压力下空气的容重和密度列于表1.4中。

表 1.4 一个大气压力下空气的容重和密度

温 度 (°C)	0	10	20	40	60	80	100
容 重 (kgf/m ³)	1.293	1.247	1.205	1.128	1.060	1.009	0.9464
密 度 (kgf·s ² /m ⁴)	0.1319	0.1273	0.1229	0.1151	0.1082	0.1021	0.09657

1.2 水的饱和蒸汽压

液体分子从液体自由表面蒸发时的分压，叫做蒸汽压，它随温度的上升而升高。在一个大气压力下，水在100°C时沸腾；如果压力较低，在100°C以下也会沸腾。温度与水的饱和蒸汽压的关系如表1.5所示。

表 1.5 温度与水的饱和蒸汽压

温 度 (°C)	0	10	20	30	40	60	80	100
饱和蒸汽压(kgf/m ²)	62	125	238	432	752	2031	4829	10332

1.3 表面张力

气体与液体之间，或者不同液体之间，有表面张力的作用。表面张力随温度上升而减小。表面张力强度用单位长度上的力 (gf/cm) 表示，水与空气接触时的表面张力强度如表1.6所示。

表 1.6 水与空气接触的表面张力强度

温 度 (°C)	0	5	10	15	20	25	30
表 面 张 力 (gf/cm)	0.0770	0.0763	0.0756	0.0748	0.0740	0.0732	0.0724

水以外的其他液体的表面张力，如表1.7所示。

表 1.7 各种液体的表面张力强度

液 体	接 触 流 体	表 面 张 力 (gf/cm)
水 银	空 气	0.486
水 银	水	0.383
酒 精	其 蒸 汽	0.0225
甘 油	空 气	0.0636
苯	空 气	0.0295
10% 食 盐 水	空 气	0.0769

液体的表面由于表面张力的作用，好象覆盖了一层具有收缩性的弹性膜一样，其结果是使表面内外产生了压力差 p 。如图1.1所示，在液面上取边长为 ds_1 、 ds_2 的微小面积ABCD，其主曲率半径为 R_1 、 R_2 。设表面张力为 T ，角 AO_1B 和角 BO_2C 分别为 θ_1 和 θ_2 ，

因 θ_1 和 θ_2 是微小角, 故 $ds_1=R_1\theta_1$, $ds_2=R_2\theta_2$ 。

现在考虑沿此曲面中心法线方向的力的平衡, 则有:

$$pR_1\theta_1 \cdot R_2\theta_2 = 2R_1\theta_1 T \sin \frac{\theta_2}{2} + 2R_2\theta_2 T \sin \frac{\theta_1}{2}$$

因 θ_1 , θ_2 是充分小的量, 由上式可得如下关系式:

$$p = T \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (1.3)$$

式(1.3)表示在液面具有某种曲率的情况下, 因表面张力作用而产生的内外压力差。从此式可知, 曲率越大压力差也越大。

当表面呈球形时, $R_1=R_2=R$, 压力差为:

$$p = \frac{2T}{R} \quad (1.4)$$

若将细管直立于液体中, 如液体可将管壁润湿, 则管内液面比外面的液面高; 反之如不能润湿时, 管内液面就低于管外液面。这种现象是表面张力作用的结果, 叫做毛细管现象。此时液面的形状和固体表面与液体表面所成的角度(接触角)有关, 常温下的接触角 θ 值见表1.8所列。

表 1.8 接 触 角

固体——液体——气体	θ
普通玻璃——水——空气	$8^\circ \sim 9^\circ$
细磨玻璃——水——空气	0
普通玻璃——酒精——空气	0
普通玻璃——乙醚——空气	16°
光滑的铁——水——空气	$5^\circ 10'$
铝——水——空气	$8^\circ 11'$
普通玻璃——水银——空气	$130^\circ \sim 150^\circ$

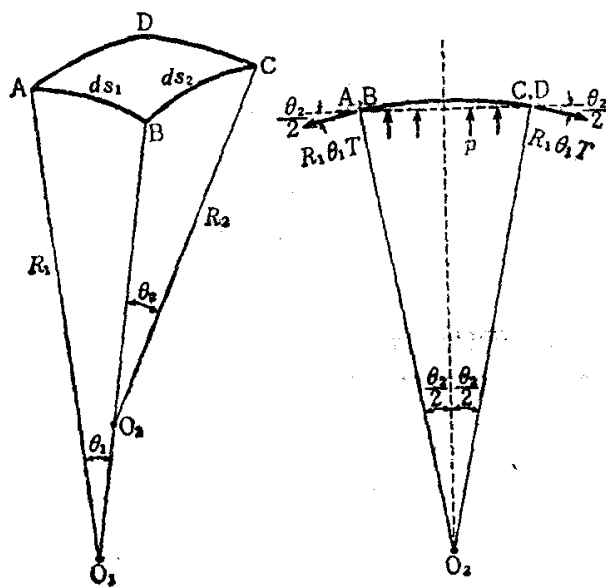


图 1.1

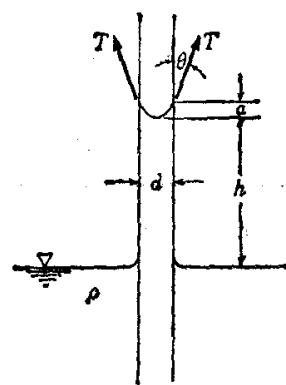


图 1.2

如图1.2所示,液面将上升到液面上下压力差与作用在表面周边上的表面张力处于平衡的状态。所以,若管的直径为 d ,上下液面的铅直距离为 h ,液体密度为 ρ ,则铅直方向力的平衡条件为:

$$\rho g h \frac{\pi d^2}{4} - (\pi d T) \cos \theta = 0$$

从此式可求得毛细管高度 h 为:

$$h = \frac{4T \cos \theta}{\rho g d} = \frac{4T \cos \theta}{\gamma d} \quad (1.5)$$

1.4 粘性

在实际流体中,相互接触的流层间有相对运动时,流体内就作用有摩擦力(阻力)。阻力的大小因流体种类和相对运动大小而变化。这种性质叫做粘性,可以忽略这种阻力的运动叫非粘性运动。

为研究粘性对流体运动的影响,采用如下两个假设。实验证明,此假设对于水、空气和甘油等是正确的。

(1) 在流体与固体壁接触处,流体质点与固体壁之间无相对运动(亦称不滑动条件);

(2) 当流体中两个极为靠近的平行层之间有相对运动时,流层之间作用的摩擦力(也叫剪切力)的强度 τ 可表示为:

$$\tau = \mu \frac{du}{dz} \quad (1.6)$$

式中 u 是运动方向的流动速度, μ 是比例常数,叫做动力粘度, z 的方向与运动方向垂直(参照图1.3)。上面这个假定也叫牛顿(Newton)假说。

由此可知,粘性摩擦力是某个层作用在比它更靠近壁面的邻层上的沿运动方向的牵引力,而对比它更远离壁面的层,则起着阻滞其运动的作用。

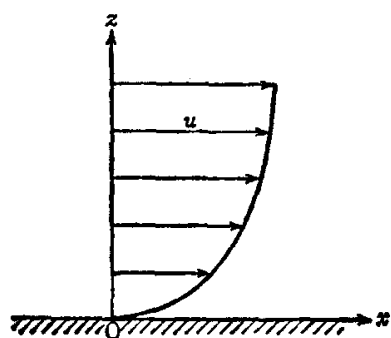


图 1.3

动力粘度 μ 具有 $[ML^{-1}T^{-1}]$ 的因次,在CGS单位制里用泊(poise, P),在重力单位制里用 $gf \cdot s/cm^2$ 。 μ 除以 ρ 叫做运动粘度,用 ν 表示,即

$$\frac{\mu}{\rho} = \nu$$

表 1.9 水和空气的动力粘度及运动粘度 (CGS单位)

温 度 (°C)		-10	0	10	20	30	40	60	80
水	$\mu \times 10^3$	26.0	17.92	13.07	10.02	7.97	6.53	4.67	3.55
	ν		0.0179	0.0131	0.010	0.0080	0.0066	0.0048	0.0037
空 气 (1 气压)	$\mu \times 10^6$	167	171	176	181	186	190	200	209
	ν	0.125	0.132	0.141	0.150	0.159	0.170	0.189	0.209

表 1.10 各种液体的动力粘度 (1气压, 20°C, 单位: P)

液 体		$\mu \times 10^3$
水	银	15.54
丙	酮	3.24
甘	油	14950
蓖 麻	油	9860
橄 榄	油	840
硫	酸	560
苯	胺	43.9

ν 具有 $[L^2 T^{-1}]$ 的因次, 用单位 cm^2/s 时叫斯 (stokes)。

表1.9是在一个大气压力下, 水和空气的动力粘度及运动粘度的值。

表1.10是除水和空气外其他流体的动力粘度值。

习 题

1-1 压力为 p 体积为 V 的流体, 当压力增加 Δp 时体积减小 ΔV , 其体积压缩系数为:

$$\beta = -\frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta p} = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp}$$

试表示其体积弹性系数为:

$$E_v = \frac{1}{\beta} = \rho \frac{dp}{d\rho}$$

并据水的压力与密度关系 (表1.2) 求其 β 和 E_v 值。

1-2 如图1.4所示, 将内径为 $2r_0$ 的管子插入密度为 ρ 的液体中, 并向管内吹入空气。设气泡不离开管

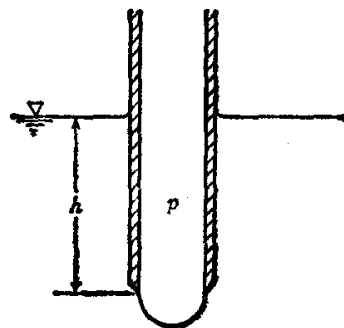


图 1.4

口时管内最大压力为 p , 试求此液体的表面张力。

1-3 若液体中压缩波的传播速度为 c , 流体的体积弹性系数为 E_v , 密度为 ρ , 则

$$c = \sqrt{\frac{E_v}{\rho}}$$

试计算水及海水中压缩波的传播速度。

1-4 试推导求图1.2中的 α 值的公式。

水力学中各主要量的因次

量	因次	
	L-T-M	L-T-F
长	L	L
面	L ²	L ²
容	L ³	L ³
时	T	T
速	LT ⁻¹	LT ⁻¹
加	LT ⁻²	LT ⁻²
流	L ³ T ⁻³	L ³ T ⁻³
速	L ² T ⁻²	L ² T ⁻²
运	L ² T ⁻¹	L ² T ⁻¹
质	M	FT ² L ⁻¹
密	MLT ⁻³	F
容	ML ⁻³	FT ² L ⁻⁴
动	ML ⁻² T ⁻²	FL ⁻³
表	ML ⁻¹ T ⁻¹	FTL ⁻³
弹	MT ⁻²	FL ⁻¹
压	ML ⁻¹ T ⁻²	FL ⁻²
切	ML ⁻¹ T ⁻²	FL ⁻²
动	ML ⁻¹ T ⁻²	FL ⁻²
功	MLT ⁻¹	FT
功	ML ² T ⁻¹	FL
	ML ² T ⁻¹	FLT ⁻¹

第二章 流体运动的基本理论

本章讲述流体运动的基本原理。作为其中一种特殊的但却有助于概括理解各种流体运动的情况，我们将对理想流体运动加以叙述。

2.1 流线与流管

为了便于研究流体运动时产生的种种现象，首先应了解流体的微小部分一称作流体质点一的运动。亦即，若知道了流体中任意位置上流体质点的速度、加速度等，则流体的运动也就清楚了。

在流体运动的情况下，某瞬时考虑在流体中有这样一条曲线：曲线上各流体质点的速度方向与曲线在该点的切线方向完全一致，则此曲线叫做流线（参照图2.1）。与此相对，流体中一个流体质点所经过的路径，叫迹线。在下面所述的恒定运动中，流线和迹线一致。但一般地，流体中任一点的速度矢量随时间而变化，流线也随时间变化，二者并不一致。

流体中任意点的速度矢量如与时间无关而保持恒定，则流线也保持一定的形状。这样的流体运动叫做恒定运动，这种流动叫恒定流。速度矢量若随时间变化，则叫非恒定流。

例题 2-1 试说明任何流体运动中两条不同流线决不相交。

（略解） 若假定两条流线相交，就会出现交点上的流体质点同时具有两个不同速度矢量的不合理现象，所以任意两条流线决不相交。】

如采用 (x, y, z) 坐标系，设流线上任一点 (x, y, z) 速度的三个分量为 (u, v, w) ，则流线方程式可表示为：

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \quad (2.1)$$

某瞬时若在运动流体中画一条封闭曲线，并作出过此曲线上各点的流线，则这些流线组成一个管状面，叫做流管（图2.2）。因为流管的侧面完全由流线构成，所以不能有横穿

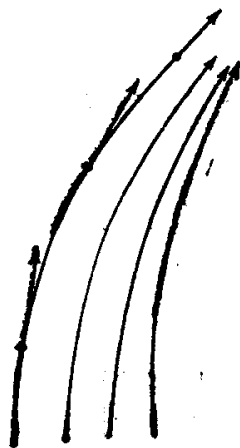


图 2.1 流线

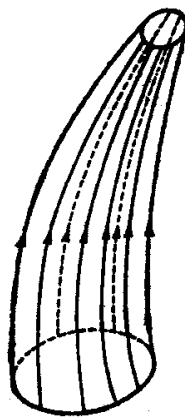


图 2.2 流管

其侧面的流动。若是恒定流，流管就具有一定的形状，即使将流管侧面的一部分或全部用固体壁面替换，其中的流动状态也不会发生变化。

2.2 欧拉运动方程式

在表示流体的运动时, 如将坐标 x, y, z 及时间 t 作为独立变量, 而将速度的三个分量 (在 x, y, z 方向的分量) u, v, w 及压强 p 等作为 x, y, z, t 的函数, 这样的研究方法叫做欧拉 (Euler) 方法。

与上述方法相对, 如同对待质点运动那样, 在流体中选取某一流体质点来研究它是如何运动的, 这种方法叫做拉格朗日 (Lagrange) 方法。

用欧拉方法分析运动时, 因不追踪某一个质点的运动, 而是考虑任意点的力的平衡关系, 故预先求出加速度是必要的。

令流体中任意点 (x, y, z) 的流体速度为 q , 它在 x, y, z 轴方向的分量为 u, v, w , 它们分别都是 x, y, z, t 的函数。

首先考虑 x 方向。当 $u = f(x, y, z, t)$ 是连续函数时, u 的增量 du 为:

$$du = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

因其中 $dx = u dt, dy = v dt, dz = w dt$, 故改写上式并可得 x 方向的加速度:

$$a_x = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

同理可得 y, z 方向的加速度 a_y, a_z 。故直角坐标系的各加速度分量为:

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ a_y &= \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ a_z &= \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

在流体中取一以任意点 $P_0(x, y, z)$ 为中心的微小正立方体, 如图2.3所示。立方体的各棱与坐标轴平行, 长度分别为 dx, dy, dz 。现从力的平衡条件来研究立方体的运动 (此处不考虑平行于立方体表面的力, 实际上这种力会因粘性等产生, 这将放在第六章里讨论)。

设压力为 p , 流体密度为 ρ 。作用于单位质量流体上的外力 (加速度) 的分量为 X, Y, Z , 则 x 轴方向力的平衡式为:

$$\rho dx dy dz a_x = \rho X dx dy dz + p' dy dz - p'' dy dz$$

因压力 p 有关系式:

$$p' = p - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} dx, \quad p'' = p + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} dx$$

故由上式和式 (2.2) 可得:

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ a_y &= \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ a_z &= \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

此式叫做欧拉运动方程式。

按照上述欧拉方法，流体的加速度是即使是恒定运动也要考虑的位置项与非恒定运动时需要考虑的时间项之和。加速度中含有如下运算：

$$\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \equiv \frac{D}{Dt}$$

此运算符通常记作斯托克斯 (Stokes) 符号 $\frac{D}{Dt}$ 。从而，欧拉运动方程式 (2.3) 可以写成如下形式：

$$\left. \begin{aligned} \frac{Du}{Dt} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{Dv}{Dt} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{Dw}{Dt} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

2.3 连续性方程式

在研究流体所作的连续运动时，若在流体中任取一封闭曲面，则其内部流体质量的增

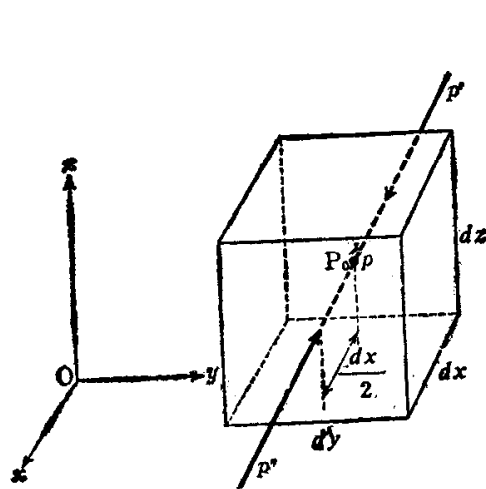


图 2.3

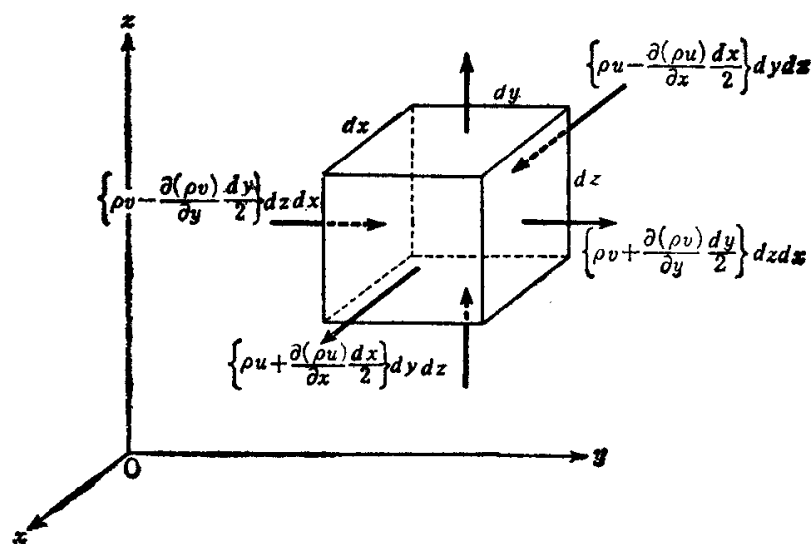


图 2.4

量，应等于通过该曲面流入的质量与流出的质量之差（质量守恒定律）。将此关系用公式表示，就是连续性方程式。

如同图2.3那样，图2.4也是在流体中任取一微小的正立方体，现研究在微小时间 dt 内流入和流出此立方体的质量。

在微小时间 dt 内流入此立方体的流体质量可表示为：

$$\begin{aligned} & \left\{ \rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{dx}{2} \right\} dy dz dt + \left\{ \rho v - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{dy}{2} \right\} dz dx dt \\ & + \left\{ \rho w - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{dz}{2} \right\} dx dy dt \end{aligned}$$

而在微小时间 dt 内流出此立方体的流体质量为：

$$\left\{ \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{dx}{2} \right\} dydzdt + \left\{ \rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{dy}{2} \right\} dzdxdt + \left\{ \rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{dz}{2} \right\} dxdydt$$

故在 dt 时间里流入和流出此微小立方体的流体质量之差为:

$$-\left\{ \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right\} dxdydzdt$$

另一方面, dt 时间里此微小立方体内的流体质量增量是:

$$\left\{ \frac{\partial(\rho dxdydz)}{\partial t} \right\} dt$$

因上述二者应相等, 故可得如下关系式:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (2.5)$$

此式叫做欧拉连续性方程式。

当流体是水时, 因通常把它看作非压缩性流体, ρ 是常数, 故式(2.5)成为:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.6)$$

例题 2-2 试用圆柱坐标及球极坐标表示欧拉运动方程式和连续性方程式。

(略解) 取如图2.5所示的圆柱坐标 (r, θ, z) , 有关系式: $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = z$ 设圆柱坐标的速度分量为 v_r, v_θ, v_z , 单位质量的外力分量为 R, Θ, Z , 则欧拉运动方程式可变换为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} &= R - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} &= \Theta - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

连续性方程式(2.5)则为:

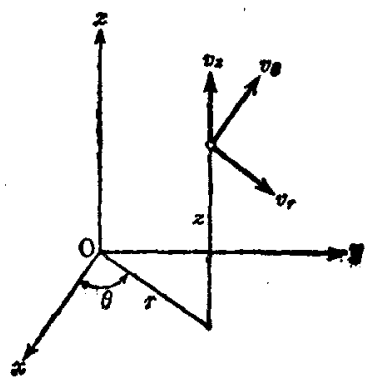


图 2.5 圆柱坐标

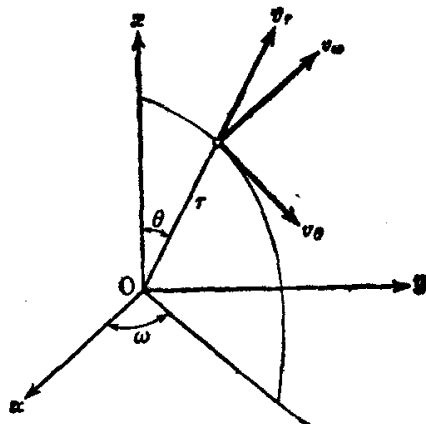


图 2.6 球极坐标