离散数学

黄振杰 编著

厦门大学出版社

离 散 数 学

黄振杰　编著

厦门大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

离散数学/黄振杰编著. —厦门:厦门大学出版社,2000.8
ISBN 7-5615-1641-X

Ⅰ.离…　Ⅱ.黄…　Ⅲ.离散数学　Ⅳ.0158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 35944 号

厦门大学出版社出版发行
(地址:厦门大学　邮编:361005)
http://www.xmupress.com
xmup @ public.xm.fj.cn
三明日报印刷厂印刷
(地址:三明市新市南路 166 号　邮编:365001)
2000 年 8 月第 1 版　2000 年 12 月第 2 次印刷
开本:787×1092　1/16　印张:16.5
字数:369 千字　印数:2 001—5 000 册
定价:29.00 元

内容提要

本书作为数学专业学生编写的离散数学教材，其主要内容包括：集合论基础、组合数学基础、图论初步、数理逻辑基础和代数结构等五大部分. 本书突出离散数学的经典内容，简要说明了离散数学的发展动态，对基本理论有严格推理，对较难的定理的证明则作了简略.

本书可作为数学专业的离散数学教材，也可作为相近专业的离散数学选用教材.

前　言

离散数学是现代数学的一个重要分支，其理论和方法在数学的其他分支以及计算机科学、信息科学、物理学、化学和生物学等众多学科中起重要作用，可以说离散数学是一把开启现代科学之门的金钥匙，因此离散数学被国家教育部列为数学与应用数学专业的主要课程.

本书是为数学专业学生编写的离散数学教材，其主要内容包括：集合论基础、组合数学基础、图论初步、数理逻辑基础和代数结构等五大部分. 集合论部分主要介绍集合的基本概念、二元关系、映射和无限集；组合数学部分主要介绍排列与组合、容斥原理、鸽巢原理、生成函数和递归关系；图论初步部分主要介绍图的基本概念、图的重要不变量、基本图类和有向图；数理逻辑部分主要介绍命题逻辑和一阶谓词逻辑；代数系统部分主要介绍群、环、域、格与布尔代数.

本书是在多轮试用的讲义的基础上修订而成的，力求突出离散数学的经典内容，并简要介绍离散数学的发展动态，着重介绍各组成部分的基础理论和基本方法，对基本理论进行严格推理，对较难的定理的证明则作了简略. 作者在编写过程中力图做到以下几点：

1. 在保证数学严谨性的前提下，尽可能使叙述通俗流畅；
2. 在讲解知识的同时，注意介绍相关的数学思想和方法；
3. 加强知识应用环节，注重与中学数学，特别是竞赛数学的联系；
4. 保持离散数学与计算机科学原有的紧密联系.

同时，为了使读者对离散数学各部分内容的历史及作用有一定的了解，本书作者在每篇的开始都对各部分内容作了简短的介绍. “离散”是离散数学的特点之一，书中涉及了众多的概念，为了便于读者查阅，特在书末作了名词索引.

本书得到漳州师范学院出版基金的资助，作者感谢漳州师范学院领导及同事们对出版本书的大力支持和帮助；感谢厦门大学出版社对本书的出版所给予的大力支持，感谢陈进才编辑卓有成效的工作.

尽管尽了很大的努力，错误之处仍在所难免，作者敬请读者将批评指正的意见告知作者，以便将来进一步完善.

黄振杰

2000 年 6 月

目 录

第一篇 集合论初步

集合论是用公理化或朴素直观的方法研究集合性质的一个数学分支. 整个纯粹数学的各分支几乎都可建立在满足各种不同条件的集合之上, 都可以在集合论的范围内形式地加以定义; 集合论的许多基本思想、方法、定理、符号已广泛地渗透到数学的各个领域; 许多涉及数学基础的根本性问题都可以归结为集合论的问题, 因此法国布尔巴基学派把集合论称为"数学的基础结构". 19 世纪, 集合论的创始人康托尔提出了基数、序数的概念以及连续统假设等, 为集合论奠定了基础. 随后, 集合悖论的相继发现, 特别是罗素悖论的产生, 使人们对数学理论的正确性产生了怀疑, 形成了数学上最严重的一次危机. 为了消除这些矛盾, 蔡梅罗在 1908 年把集合加以公理化, 后来形成了今天称之为 ZFC 的公理系, 排除了这些悖论. 可是根据哥德尔的不完备定理, 集合公理系的相容性问题在本系统内是无法解决的, 如何解决这一问题, 至今仍是数学研究最根本、最核心的问题之一.

第1章 集合及运算

§1.1 集合及其表示

集合是现代数学的一个重要概念，也是最基本的概念. 由于它是最基本的概念之一，因此很难用更原始的概念加以严格定义，除非用公理化的方法. 一般地，人们把具有某种特定性质的对象的全体称为**集合**，组成集合的那些对象称为该集合的**元素**. 例如，某个班级的全体学生就可构成一个集合，而这个班级的每一名学生，都是这个集合的一个元素. 又如某图书馆里的所有数学书构成一个集合；全体非负整数构成一个集合；四个数 1, 2.1, 3, −4 构成一个集合等等. 集合常用大写英文字母表示，如 A, B, C 等，元素则用小写英文字母表示，如 a, b, c 等.

集合一般有两种表示法：列举法和描述法.

把属于集合的元素以某种方式列举出来，写在花括号{ }里，这种表示集合的方法称为**列举法**. 例如，由四个数 1, 2.1, 3, −4 构成的集合表示为$\{1, 2.1, 3, -4\}$；全体非负整数构成的集合表示为$\{0, 1, 2, 3,\cdots\}$. 后一个集合中有省略号，它表示集合中某些元素未明显地列举出来，这种写法要求列举足够多的元素，并显示出规律以使人们能了解哪些元素属于集合，这一点是重要的.

把属于某个集合的元素所具有的特定性质 P 描述出来，写在花括号{ }里记为$\{x \mid P(x)\}$，这种表示集合的方法称为**描述法**. 例如，全体中国人构成的集合可表示为$\{x \mid x$ 是中国人$\}$；不等式$3x+2<0$的解集可表示为$\{x \mid 3x+2<0\}$.

集合由其元素完全确定，集合中的元素是**不考虑次序**的，而且也应是**互不相同**的.

人们常用记号“$\in$”表示“属于”，用记号“$\notin$”表示“不属于”，a 是集合 A 的元素，就称 a **属于** A，记为 $a\in A$. a 不是集合 A 的元素，就称 a **不属于** A，记为 $a\notin A$. 例如，$1\in\{1, 2.1, 3, -4\}$，$2\notin\{1, 2.1, 3, -4\}$；$-1\in\{x \mid 3x+2<0\}$，$2\notin\{x \mid 3x+2<0\}$.

在数学中考虑最多的是由数构成的集合，叫做**数集**. 我们将用 $\boldsymbol{N}$ 表示**自然数集**，用 $\boldsymbol{Z}$ 表示**整数集**，用 $\boldsymbol{Q}$ 表示**有理数集**，用 $\boldsymbol{R}$ 表示**实数集**，用 $\boldsymbol{C}$ 表示**复数集**. 我们还用 $\boldsymbol{Z}^+$ 表示正整数集，用 $\boldsymbol{Q}^+$ 表示正有理数集，用 $\boldsymbol{R}^+$ 表示正实数集.

在现代数学中，往往把表示“没有”的 0 也归属自然数，因此，自然数集 $\boldsymbol{N}=\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$.

不含任何元素的集合称为**空集**，记为$\varnothing$. 至少有一个元素的集合称为**非空集**. 由有限个元素构成的集合称为**有限集**. 由无限多个元素构成的集合称为**无限集**. 例如$\{x \mid x^2+1=0, x\in R\}$就是空集，但$\{\varnothing\}$不是空集，它是由单个元素$\varnothing$组成的集合. $\{1, 2.1, 3, -4\}$是有限集，$\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$是无限集.

在研究某个问题时，该问题所涉及的所有对象构成一个集合称为**全集**，记为Ω. **全集是相对的**. 比如，如果在自然数范围内考虑，自然数集是全集，如果在实数范围内考虑，自然数集就不是全集了，此时，实数集是全集. 全集并不一定包含一切对象与事物，它只包含与讨论的问题有关的所有对象. 全集的不同对集合是有影响的，如集合$\{x \mid x^2+1=0\}$在全集为实数集时是空集，而在全集为复数集时就非空，此时它有两个元素 i 和$-i$.

为了更直观地理解集合的包含关系以及集合的运算，人们常用一个矩形区域表示全集，用矩形区域中的圆形区域表示集合，用点表示集合的元素，这种示意图通常称为**文氏图**(Venn Diagrams)，如图 1.1.1 所示.

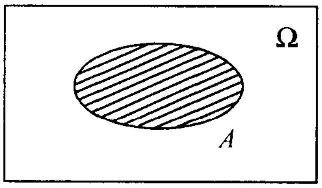


图 1.1.1

习题 1.1

1.1.1　列举下列集合的元素：

(1) 不超过 31 的所有素数的集合；

(2) $\{x \mid x$ 是实数且满足 $x^2+x-12=0\}$；

(3) 由 mathematics 的字母组成的集合.

1.1.2　用描述法表示下列集合：

(1) 10 的所有整数因子；

(2) 直角坐标系中单位圆内外的点集；

(3) 能被 5 整除的整数集.

§ 1.2　集合的关系与运算

一. 集合的包含与相等

集合的包含概念是集合之间的一种重要的关系.

定义 1.2.1 设 A, B 为两个集合，如果 A 的每一个元素都属于 B，则称 A 是 B 的**子集**，记为 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$，也称 B **包含** A；若 A 是 B 的子集，而且 B 至少有一个元素不属于 A，则称 A 为 B 的**真子集**或 B **真包含** A，记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.

例 1.2.1 $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$.

根据子集的定义，**任何集合都是自己的子集**，即 $A \subseteq A$. 同时还规定，**空集是任何集合 A 的子集**，即 $\varnothing \subseteq A$. 而且**空集是任何非空集合的真子集**.

定义 1.2.2 设 A, B 为两个集合，若 $A \subseteq B$ 且 $A \supseteq B$，则称 A 与 B **相等**，记为 $A = B$.

例 1.2.2 $\{1, 2, 3, 4\} = \{4, 3, 2, 1\}$.

易知

定理 1.2.1 若 $A \subseteq B$，但 $A \neq B$，则 $A \subset B$.

二.集合的运算

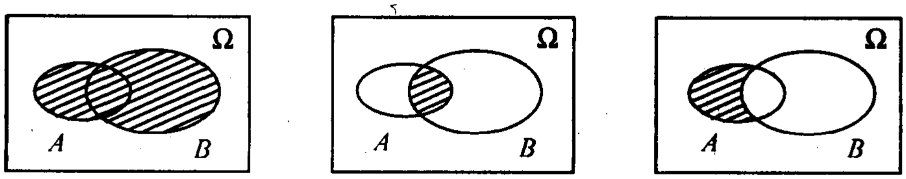
设 A, B 为两个集合，那么由它们可以构造出新的集合.

定义 1.2.3 给定两个集合 A, B，那么 A 与 B 的**并**，记为 $A \cup B$，是指由所有属于 A 或属于 B 的元素所构成的集合. 即 $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$.

定义 1.2.4 给定两个集合 A, B，那么 A 与 B 的**交**，记为 $A \cap B$，是指由所有既属于 A 又属于 B 的元素所构成的集合. 即 $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$.

定义 1.2.5 给定两个集合 A, B，那么 A 与 B 的**差**，记为 $A - B$，是指由所有属于 A 但不属于 B 的元素所构成的集合. 即 $A - B = \{x \mid x \in A \text{ 但 } x \notin B\}$. 也把 A 与 B 的差称为 B 关于 A 的**相对补**.

以上三个运算的文氏图见图 1.2.2.



并　　　交　　　差

图 1.2.2

注：一般情况下，A 与 B 的差不等于 B 与 A 的差.

例 1.2.3 设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$，$B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$，则

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\},$$
$$A \cap B = \{4, 5\},$$
$$A - B = \{1, 2, 3\},$$
$$B - A = \{6, 7, 8\}.$$

显然这里的 $A - B$ 不等于 $B - A$.

定义 1.2.6　设Ω为全集，A为任一集合，那么A的**补**，记为$\overline{A}$，是指所有属于Ω但不属于A的元素所构成的集合．即$\overline{A}=\Omega-A$．其文氏图见图 1.2.3.

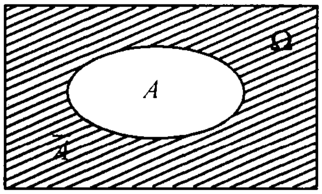
例 1.2.4　设全集为$\Omega=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，$A=\{1,3,5,7,9\}$，那么$A$的补集为$\overline{A}=\{0,2,4,6,8\}$.

集合的并与交可以推广到无限的情形：

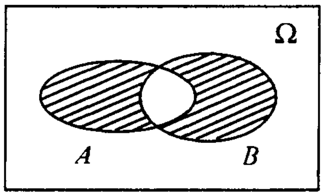
我们把由集合组成的集合称为**集族**．设集族$S=\{A_\alpha|\ \alpha\in I\}$，其中$I$为指标集，$\alpha$取遍$I$，$A_\alpha$为集合．在集族$S$上可以定义任意多个集合的并与交.

定义 1.2.7　由至少属于某个$A_\alpha(\alpha\in I)$的元素所构成的集合，称为集族$\{A_\alpha\}$当α取遍I时的**并**，记为$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$.

定义 1.2.8　由属于每个$A_\alpha(\alpha\in I)$的元素所构成的集合，称为集族$\{A_\alpha\}$当α取遍I时的**交**，记为$\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha$.



补



对称差

图 1.2.3

常用的集合运算还有对称差：

定义 1.2.9　给定两个集合A，B，那么A与B的**对称差**，记为$A\oplus B$，是指由所有属于A或属于B但不同时属于A和B的元素所构成的集合．即$A\oplus B=\{x\,|\,x\in A\bigcup B$但$x\notin A\bigcap B\}$．其文氏图见图 1.2.3.

例 1.2.5　设$A=\{1,2,3,4,5,6\}$，$B=\{4,5,6,7,8,9\}$，则A与B的对称差

$$A\oplus B=\{1,2,3,7,8,9\}.$$

三．若干性质

1. 并、交、补的性质

不难证明集合的并、交、补运算具有如下性质：

定理 1.2.2　设A,B,C为任意集合，Ω为全集，则有

(1)　零一律　　$A\bigcup\varnothing=A$，　$A\bigcap\varnothing=\varnothing$，

　　　　　　　$A\bigcap\Omega=A$，　$A\bigcup\Omega=\Omega$；

(2)　互补律　　$A\bigcup\overline{A}=\Omega$，

$A\cap\overline{A}=\varnothing$;

(3) 幂等律 $A\cup A=A$,

$A\cap A=A$;

(4) 交换律 $A\cup B=B\cup A$,

$A\cap B=B\cap A$;

(5) 结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(6) 分配律 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup B)$;

(7) 吸收律 $A\cup(A\cap B)=A$,

$A\cap(A\cup B)=A$;

(8) 德·摩根律 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$,

$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

定理中各个定律都有两个等式，这两个等式之间存在着**对偶关系**，即把其中一式的“$\cup$”改为“$\cap$”,“$\cap$”改为“$\cup$”,“Ω”改为“$\varnothing$”,“$\varnothing$”改为“Ω”便得另一式.下面的定理也有对偶性，它是分配律的推广.

定理 1.2.3 设 $A, A_\alpha(\alpha\in I)$均为集合，则

$$A\cap(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in I}(A\cap A_\alpha),$$

$$A\cup(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in I}(A\cup A_\alpha).$$

2. 包含的性质

关于集合的包含关系有如下性质:

定理 1.2.4 设 A, B, C 为任意集合，则有

(1) $A\subseteq A\cup B$;

(2) $A\cap B\subseteq A$;

(3) $A\subseteq B$ 当且仅当 $A\cup B=B$;

(4) $A\subseteq B$ 当且仅当 $A\cap B=A$;

(5) $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C$,则$A\subseteq C$.

本定理的证明留给读者.

3. 差和补的性质:

集合的差与补是两个相近的运算，它们有如下性质:

定理 1.2.5 设 A, B, C 为任意集合，则有

(1) $A-B=A\cap\overline{B}$;

(2) $A-B=A-(A\cap B)$;

(3) 若 $A\subseteq B$，则 $\overline{B}\subseteq\overline{A}$；

(4) $A\cup(B-A)=A\cup B$；

(5) $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$.

证明　本定理的结论可以容易用文氏图加以验证．当然，严格证明也不难，这里只证明交对差的分配律(5)，其余留给读者．

任意 $x\in A\cap(B-C)$ 有 $x\in A$ 且 $x\in B-C$，即 $x\in A$ 且 $x\in B$ 但 $x\notin C$，所以 $x\in A\cap B$ 但 $x\notin A\cap C$，从而 $x\in(A\cap B)-(A\cap C)$，因此

$$A\cap(B-C)\subseteq(A\cap B)-(A\cap C).$$

反之，任意 $x\in(A\cap B)-(A\cap C)$ 有 $x\in A\cap B$ 但 $x\notin A\cap C$，即 $x\in A$ 且 $x\in B$ 但 $x\notin A\cap C$，由德·摩根律 $x\notin A\cap C$ 等价于 $x\in\overline{A}$ 或 $x\in\overline{C}$，因为 $x\in A$ 是确定的，所以只有 $x\in\overline{C}$ 了，这样就有 $x\in A$ 且 $x\in B$ 但 $x\notin C$，从而 $x\in A\cap(B-C)$，因此

$$A\cap(B-C)\supseteq(A\cap B)-(A\cap C).$$

总之 $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$.

注：交对差具有分配律，但并对差不具有分配律．

例 1.2.6　设 $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{3,4,5,6,7,8\}$, $C=\{4,6,8,10\}$，则

$$A\cup(B-C)=\{1,2,3,4,5\}\cup\{3,5,7\}=\{1,2,3,4,5,7\},$$

$$(A\cup B)-(A\cup C)=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}-\{1,2,3,4,5,6,8,10\}=\{7\}.$$

显然 $A\cup(B-C)\neq(A\cup B)-(A\cup C)$.

关于差，即相对补，也有类似的德·摩根律．

定理 1.2.6　对于集合 A,B,C 有

$$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C),$$

$$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C).$$

定理 1.2.6 的推广便是

定理 1.2.7　设 A, A_α $(\alpha\in I)$均为集合，则

$$A-\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha=\bigcap_{\alpha\in I}(A-A_\alpha),$$

$$A-\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha=\bigcup_{\alpha\in I}(A-A_\alpha).$$

4. 对称差的性质

最后是几个关于对称差的性质．

由对称差的定义容易推出

定理 1.2.8　$A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)$,

$$A\oplus B=A\cup B-A\cap B.$$

定理第一式是“对称差”这个名称的直接来源．

对称差还有如下性质：

定理 1.2.9　设 A,B,C 为任意集合，则有

(1) $A\oplus B=B\oplus A$；

(2) $A\oplus\varnothing=A$;

(3) $A\oplus A=\varnothing$;

(4) $A\oplus B=(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})$;

(5) $(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$.

证明 本定理的(1), (2), (3)是显然的, 这里仅就(4), (5)两式给出证明.

(4)式的证明

$A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)$

$\quad=(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})$.

(5)式的证明

一方面

$(A\oplus B)\oplus C$

$=((A\oplus B)\cap\overline{C})\cup(\overline{(A\oplus B)}\cap C)$

$=(((A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B))\cap\overline{C})\cup(\overline{((A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B))}\cap C)$

$=(((A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B))\cap\overline{C})\cup((\overline{(A\cap\overline{B})}\cap\overline{(\overline{A}\cap B)})\cap C)$

$=(((A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B))\cap\overline{C})\cup(((\overline{A}\cup B)\cap(A\cup\overline{B}))\cap C)$

$=(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})\cup((((\overline{A}\cup B)\cap A)\cup((\overline{A}\cup B)\cap\overline{B}))\cap C)$

$=(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})\cup(((B\cap A)\cup(\overline{A}\cap\overline{B}))\cap C)$

$=(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})\cup(A\cap B\cap C)\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)$;

另一方面, 利用对称差的可交换性和上面的结果便有

$A\oplus(B\oplus C)$

$=(B\oplus C)\oplus A$

$=(C\oplus B)\oplus A$

$=(C\cap\overline{B}\cap\overline{A})\cup(\overline{C}\cap B\cap\overline{A})\cup(C\cap B\cap A)\cup(\overline{C}\cap\overline{B}\cap A)$

$=(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})\cup(A\cap B\cap C)\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)$.

因此

$$(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C).$$

习题 1.2

1.2.1 设 A, B, C 为任意集合, 确定下列断言是否成立:

(1) $A\in B$ 且 $B\subseteq C$, 则 $A\in C$;

(2) $A\in B$ 且 $B\subseteq C$, 则 $A\subseteq C$;

(3) $A\subseteq B$ 且 $B\in C$, 则 $A\in C$;

(4) $A\subseteq B$ 且 $B\in C$, 则 $A\subseteq C$;

(5) $A\in B$ 且 $B\in C$, 则 $A\in C$.

1.2.2 是否可能 $A\subseteq B$ 且 $A\in B$? 请说明理由.

1.2.3 设全集$\Omega=\{1,2,3,4,5\}$, $A=\{1,3,5\}$, $B=\{1,2,3,4\}$, $C=\{2,5\}$, 求:

(1) $A\cap\overline{B}$; (2) $A\cap(B\cup C)$;

(3) $(A\cap B)\cup(A\cap C)$; (4) $(\overline{A\cup B})\cup(\overline{B\cup C})$;

(5) $\overline{A}\cap\overline{B}$; (6) $(A\oplus B)\oplus C$.

1.2.4 (1) 给出$\overline{A}\cap\overline{B}$, $A-(\overline{B\cup C})$, $A\cap(\overline{B}\cup C)$的文氏图;

(2) 给出图 1.2.4 的文氏图中标有数字部分所表示的集合.

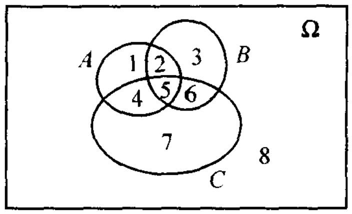


图 1.2.4

1.2.5 设 A, B, C 为任意集合, 证明

(1) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

(2) $A\cap(A\cup B)=A$;

(3) $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

1.2.6 设 A, B, C 为任意集合, 证明

(1) $A\subseteq B$ 当且仅当 $A\cup B=B$;

(2) $A\subseteq B$ 当且仅当 $A\cap B=A$;

(3) $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C$, 则$A\subseteq C$.

1.2.7 设 A, B, C 为任意集合, 证明

(1) $A-B=A-(A\cap B)$;

(2) $A\cup(B-C)\supseteq(A\cup B)-(A\cup C)$.

1.2.8 设 A, B, C 是全集Ω的子集, 用文氏图表示下列断言是否正确:

(1) 若 $A\cap B\subseteq C$ 且 $A\cup C\subseteq B$, 则 $A\cap C=\varnothing$;

(2) 若 $A\subseteq\overline{B\cup C}$ 且 $B\subseteq\overline{A\cup C}$, 则 $B=\varnothing$.

1.2.9 定义实数集 $\boldsymbol{R}$ 的子集如下:

$$A_0=\{a\mid a<1\},\quad A_i=\{a\mid a\le 1-\frac{1}{i}\},\ i=1,2,3,\cdots;$$

$$B_0=\{b\mid b\le 1\},\quad B_i=\{b\mid b<1+\frac{1}{i}\},\ i=1,2,3,\cdots.$$

证明: $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=A_0$, $\bigcap_{i=1}^{\infty}B_i=B_0$.

1.2.10 设 A, B, C 为任意集合, 证明

$A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$;

$A\cup(B\oplus C)\supseteq(A\cup B)\oplus(A\cup C)$.

1.2.11 证明定理 1.2.3.

1.2.12 证明定理 1.2.7.

§1.3 幂集与笛卡儿乘积

一. 幂集

定义 1.3.1 集合 A 的**幂集**, 记为 2^A, 是指由 A 的所有子集 (包括空集和 A 本身) 所构成的集合.

例 1.3.1 设 $A=\{a,b,c\}$, 则

$2^A=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},A\}$.

例 1.3.2 $2^{\varnothing}=\{\varnothing\}$, $2^{\{a\}}=\{\varnothing,\{a\}\}$.

学习集合时, 我们强调的是无序性, 但是为了能在计算机中更好地表示集合及其幂集, 有时需为集合的每个元素附上一个排列指标, 以指明一个元素相对于其他元素的位置. 例如, 设 $A=\{a_1,a_2,a_3\}$, 那么 2^A 的八个元素可以这样表示:

$\varnothing=B_{000}$, $\{a_1\}=B_{100}$, $\{a_2\}=B_{010}$, $\{a_3\}=B_{001}$,

$\{a_1,a_2\}=B_{110}$, $\{a_1,a_3\}=B_{101}$, $\{a_2,a_3\}=B_{011}$, $\{a_1,a_2,a_3\}=B_{111}$.

其中 B 的下标从左到右记为第一位、第二位、第三位, 第 i 位的取值为 1 还是为 0, 由 a_i 是否出现来决定, 出现 a_i 时为 1, 不出现 a_i 时为 0.

上述表示法实际上是一种编码, 它可以推广到 n 元集 S_n 的幂集上, 把 2^{S_n} 的 2^n 个元素表示为:

$$B_i,\ i\text{ 为二进制数, 且 }0\le i\le \overbrace{11\cdots1}^{n}.$$

这样, 由 B_i 的下标就可以容易地确定 B_i 所包含的元素.

例如, 设 $S_8=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, 则 $B_{11001010}=\{1,2,5,7\}$.

当然也可以将 B 的二进制下标转换为十进制下标, 反之也可以. 如 $B_{202}=B_{11001010}$, $B_{10}=B_{00001010}$, 将十进制下标转换为二进制下标时, 要注意在左边补充足够的 0.

这种编码表示有助于用计算机表示和存储集合及幂集.

二. 笛卡儿乘积

笛卡儿乘积也称为卡氏积或直积. 这是一种重要的集合运算, 是向量概念的推广, 也是数据库中常用的术语"元组"的基础. 在讲笛卡儿乘积之前, 我们先介绍 n 元有序组的概念.

定义 1.3.2 n 个按一定次序排列的元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 称为 **n 元有序组**, 记为 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$. 特别地, 二元有序组称为**有序对**.

定义 1.3.3 两个 n 元有序组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 与 $(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ **相等**, 当且仅当 $a_i=b_i$, $i=1,2,\cdots,n$, 记为 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$.

定义 1.3.4 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为给定的集合, 则它们的**笛卡儿乘积**或**直积**, 记为