

机械工业出版社高水平著作出版基金项目

计算汽车地面力学

● 庄继德 著



机械工业出版社
China Machine Press

计算汽车地面力学

庄继德 著



机械工业出版社

计算汽车地面力学是一门专事研究汽车与地面相互作用关系定量计算的学问。本书主要内容包括：与车辆行驶有关的土的特性分析，汽车地面力学中土壤特性的计算公式及其选择，汽车轮胎力学特性的定量描述，轮胎与土壤相互作用的数值解析，汽车通过性与土壤行驶性的概率计算，汽车地面力学中土的本构模型，汽车与地面相互作用问题的矩阵表述和有限元分析以及有限元软件的应用与开发。本书是在作者及原吉林工业大学汽车地面力学研究室同志多年来科研成果的基础上总结而成的。

本书可供汽车工业及汽车运输业有关研究人员和科技管理人员阅读和参考，也可作为高等学校车辆工程专业的教学用书。

图书在版编目（CIP）数据

计算汽车地面力学/庄继德著. —北京：机械工业出版社，2001.11

ISBN 7-111-09417-4

I. 计… II. 庄… III. 汽车-地面-力学 IV. U461.5

中国版本图书馆CIP数据核字（2001）第071056号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）

责任编辑：赵爱宁 版式设计：张世琴 责任校对：程俊巧

封面设计：陈 沛 责任印制：郭景龙

北京京丰印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

2002年1月第1版·第1次印刷

1000mm×1400mm B5·8印张·310千字

0 001—1 500册

定价：26.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

本社购书热线电话（010）68993821、68326677-2527

前 言

地面力学 (terramechanics) 是工程力学的一个分支, 它主要研究机器与其工作地面之间的关系。所谓机器, 可以是汽车、拖拉机、农业机械或工程机械等, 地面则通常系指松软的土壤。

若仅研究车辆与地面之间的关系, 通常称为地面—车辆力学。所谓车辆, 是轮式和履带式车辆的统称, 故所研究的范围主要限于有传统结构的轮式汽车时, 就可以更明确地称它为汽车地面力学。

原吉林工业大学汽车学科率先提出在国内建立汽车地面力学这门新兴的分支学科, 并专门成立了汽车地面力学研究室, 着重研究越野车的通过性评价指标, 轮式车辆在松软地面行驶的失效机理, 轮胎与地面相互作用的性能预测以及越野汽车的设计理论等。

近 20 年来, 我们在汽车地面力学的研究中实现了三个转变, 即从定性分析到定量计算的转变、从宏观研究到微观分析的转变以及从静态考察到动态研究的转变, 并在轮胎与地面相互作用研究方面取得了一系列创造性成果, 丰富和发展了地面力学。

理论研究的目的在于应用。为了加强汽车地面力学的实用性, 我们在总结以往科研成果的基础上, 提出了计算汽车地面力学的新概念。

所谓计算汽车地面力学, 是一门专事研究汽车与地面相互作用关系定量计算的学问。本书将就其主要内容进行论述, 这些内容包括: 与车辆行驶有关的土的特性分析, 汽车地面力学中土壤特性的计算公式及其选择, 汽车轮胎力学特性的定量描述, 轮胎与土壤相互作用的数值解析, 汽车通过性与土壤行驶性的概率计算, 汽车地面力学中土的本构模型, 汽车与地面相互作用问题的矩阵表述和有限元分析以及有限元软件的应用与开发。

本书主要有以下几个特点:

1) 本书并不专门研究土力学、弹塑性原理和有限元法等理论本身, 而侧重于它们在研究汽车与地面相互作用关系中的具体应用。

2) 本书在叙述上深入浅出, 并为了读者便于理解, 在不同章节分别提供了一些必要的数学基础知识。

3) 本书自始至终以新疆塔克拉玛干沙漠沙土为例进行典型分析, 以起到举一反三、讲清方法的作用。

4) 本书中所叙述内容绝大部分是我们自己的科研成果, 并且引用的也大多是

自己的试验数据。

这里特别需要指出的是：作者指导的一些博士研究生曾在建立计算汽车地面力学方面做了很多开创性的工作。李杰博士在土的本构模型和汽车与地面相互作用有限元分析及软件开发方面，研究成果突出；魏东博士在新疆沙特性分析方面的研究，具有重要的实用意义；叶楠博士提出了汽车地面力学中土壤特性计算公式的自动选择，很有创新性；王庆年博士首次提出车轮在沙土上滑转下陷量的理论计算问题。此外，王吉忠博士等研究了汽车轮胎力学特性的定量描述；刘聚德和季学武博士等研究了轮胎与土壤相互作用的数值解析方法，他们都在前人研究的基础上有所发展。以上这些研究成果都成为本书的重要组成部分，所以本书实际上是集体研究成果的结晶。

在上述科学研究工作中，曾得到国家自然科学基金、高等学校博士学科点专项基金等多项资助；本书还得到机械工业出版社高水平著作出版基金的资助。作者对此表示衷心感谢。

计算汽车地面力学的建立及其在实际中的推广应用，将对提高轮式越野车辆的设计水平及其在松软地面上的使用性能起到重要作用。

由于计算汽车地面力学是我们新提出的一个学科方向，其内容体系还不成熟，书中叙述的内容也有可能存在一些不恰当甚至错误的地方，恳请读者批评指正。

本书可供汽车工业及汽车运输业有关研究人员和科技管理人员阅读和参考，也可作为高等学校车辆工程专业的教学用书。

目 录

前言

第一章 绪论	1
第一节 汽车地面力学研究的背景及意义	1
第二节 汽车与地面相互作用的研究方法	2
一、纯经验方法	2
二、模型试验和因次分析方法	4
三、半经验方法	9
四、基本理论研究方法	10
五、数值模拟方法	11
第三节 计算汽车地面力学的学科性质和研究内容	12
一、学科性质	12
二、主要研究内容	13
第二章 与车辆行驶有关的土的特性分析	14
第一节 土的物理特性	14
一、土壤的质地分类	14
二、与车辆行驶有关的土壤物理特性描述指标	14
三、塔克拉玛干沙漠沙土的物理特性	16
第二节 土的力学特性	19
一、土的承压特性	19
二、土的剪切特性	20
三、塔克拉玛干沙漠沙土的基本力学特性	21
第三节 土壤动态三轴仪在研究土壤性质中的应用	29
一、试验设备	29
二、测试原理	30
三、试验方法	31
四、试验结果	32
五、影响因素	32
第三章 汽车地面力学中土壤特性的计算公式及其选择	36
第一节 土壤特性模型在车辆行驶性能计算中的应用	36
一、用承压特性模型计算滚动阻力	36
二、用剪切特性模型计算附着力	37
三、用土壤特性模型计算挂钩牵引力	39

第二节 松软地面的各种特性模型及其参数确定	40
一、加权最小二乘法	40
二、承压特性模型	41
三、剪切特性模型	43
第三节 土壤特性模型的自动选择	50
一、承压特性模型的选择	50
二、剪切特性模型的选择	50
第四章 汽车轮胎力学特性的定量描述	52
第一节 轮胎变形特性	52
一、轮胎的径向变形	52
二、接地形状	54
三、接地长度、宽度和面积的计算	55
四、轮胎变形损失	57
第二节 轮胎接地压力	57
一、接地压力分布的定量描述	57
二、平均接地压力的表达式	58
第三节 轮胎刚度特性	60
一、轮胎静刚度的计算方法	61
二、轮胎动刚度的数学模型	62
三、滚动状态下轮胎刚度和阻尼特性的表达式	65
第五章 轮胎与土壤相互作用的数值解析	67
第一节 轮胎变形与土壤下陷量的近似计算和试验测定	67
一、临界气压	67
二、近似计算	69
三、试验测定	70
第二节 轮胎与土壤接触表面尺寸的确定	72
一、影响接触表面形状的因素	72
二、接触表面的尺寸确定	74
三、接近角和离去角	76
第三节 轮胎在土壤上的滚动阻力的计算	77
一、轮胎在土壤上的受力分析	77
二、滚动阻力系数的数值解析	78
三、轮胎与土壤接触面内应力分布的测定	80
第四节 轮胎在土壤上的挂钩牵引力的计算	83
一、挂钩牵引力的定义	83
二、轮胎在松软土壤上挂钩牵引力的预测	84
三、在松软土壤上的驱动轮胎效率的计算	86

第五节 轮胎在松软地面上滑转下陷量的计算	88
一、滑转下陷的发生机理以及下陷量与滑转率的关系	88
二、滑转下陷量的理论计算	90
三、轮胎下土壤颗粒的侧向流动	99
第六章 汽车通过性与土壤行驶性的概率计算	102
第一节 汽车通过性与土壤行驶性的评价指标	102
一、汽车通过性指标	102
二、轮胎在新疆沙上的通过性指标的测定	104
三、土壤行驶性定义	105
四、新疆沙的行驶性分析	106
第二节 汽车与地面相互作用关系数学模型中土壤参数值的不确定性	106
一、土壤值的时间性变化	106
二、土壤含水量分布的概率密度曲线	107
第三节 概率统计方法在汽车地面力学中的应用	109
一、预测汽车在给定土壤条件下失去通过性的概率	109
二、在随机土壤条件下选择最佳的车辆设计方案	110
第七章 汽车地面力学中土的本构模型	113
第一节 车辆行驶的土的本构关系研究状况和主要内容	113
一、土的本构特性研究现状	113
二、土工土与车辆行驶的土的区别	114
三、车辆行驶的土的本构模型分类和应当满足的基本条件	115
第二节 土的线性弹性本构模型	115
一、线性弹性本构模型的一般公式	115
二、线性弹性本构模型的参数参考值	116
第三节 车辆行驶的土的非线性弹性本构模型	117
一、非线性弹性本构模型的一般公式	117
二、非线性弹性本构模型的基本形式	118
三、非线性弹性本构模型在应用中的修正	128
第四节 车辆行驶的土的弹塑性本构模型	133
一、弹塑性理论概述	133
二、弹塑性本构模型的一般公式	135
三、汽车地面力学常用的等向强化屈服准则	136
四、便于数值分析的弹塑性本构模型的统一表述	140
五、等向强化屈服准则对应的屈服函数、等效屈服应力及参数	143
六、塔克拉玛干沙漠沙土的弹塑性本构特性	146
第八章 汽车与地面相互作用问题的矩阵表述	147
第一节 矩阵代数的基本知识	147

一、矩阵的表示方法与类型	147
二、矩阵的运算	149
三、逆矩阵	153
四、线性方程组	155
第二节 变形体基本力学量的矩阵表述	155
一、三维问题基本力学量的矩阵表述	155
二、轴对称问题基本力学量的矩阵表述	158
三、平面问题基本力学量的矩阵表述	160
第三节 汽车与地面相互作用问题的基本方程的矩阵表述	162
一、几何方程	162
二、本构方程	163
三、虚功形式的平衡方程	167
第九章 汽车与地面相互作用问题的有限元分析	171
第一节 有限元法的分析过程	171
一、有限元分析的三个基本阶段	171
二、位移法的基本步骤	172
第二节 汽车与地面相互作用问题的线性弹性有限元分析	172
一、平面问题的线性弹性有限元分析的基本步骤	172
二、用线性有限元法预测车轮下的应力分布和土壤变形	181
三、线性弹性有限元分析的快速算法	186
第三节 汽车与地面相互作用问题的非线性（非线性弹性、弹塑性）	
有限元分析	207
一、汽车与地面相互作用问题的非线性有限元一般描述	207
二、汽车与地面相互作用的非线性问题求解	209
三、迭代法在轮胎与沙相互作用问题的非线性分析中的应用	213
第十章 汽车与地面相互作用问题有限元软件的应用与开发	217
第一节 通用软件在汽车地面力学研究中的应用	217
一、ANSYS 软件在轮胎与刚性路面相互作用的三维非线性有限元分析中的应用	217
二、ADINA 软件在车轮与松软地面相互作用的三维非线性有限元分析中的应用	221
第二节 汽车与地面相互作用问题的实用有限元软件开发	224
一、单元库的设计	224
二、总刚度阵的存储和求解	225
三、非线性方程组的解法	226
第三节 汽车与地面相互作用问题的有限元网格自动划分生成线法	227
一、有限元网格自动生成的生成线法	227

二、有限元网格自动生成的计算机图形显示及与有限元软件的接口设计	228
三、有限元网格自动生成法的应用	229
第十一章 计算汽车地面力学在沙漠用仿驼蹄轮胎设计中的应用	231
第一节 驼蹄结构及其与沙地之间独特的作用方式	231
一、骆驼特性	231
二、驼蹄结构	232
三、驼蹄与沙地之间独特的作用方式	232
第二节 仿驼蹄轮胎力学模型及其与沙地相互作用的分析	237
一、仿驼蹄轮胎力学模型	237
二、仿驼蹄轮胎力学模型与沙地相互作用的分析	238
三、用有限元计算方法预测仿驼蹄轮胎的牵引性能	240
第三节 仿驼蹄橡胶轮胎的设计与试验	242
一、仿驼蹄橡胶轮胎模型	242
二、仿驼蹄橡胶轮胎参数的确定	242
三、仿驼蹄橡胶轮胎的性能试验	243
参考文献	246

第一章 绪 论

第一节 汽车地面力学研究的背景及意义

现代汽车所完成的任务非常广泛。在一般的公路条件下自然不必说，它还活跃在诸如南北极、荒地和沙漠地带，进行开发和勘探等工作。人类生活的各个方面都离不开现代汽车。

我国疆域辽阔，地形极其复杂，如南疆的沙漠和草原、东北的雪原和沼泽、江南的水田和耕地以及大西南的丛山峻岭。在漫长的国境线上，汽车所行驶的道路有 90% 都是土路，因此研究汽车在土壤等特殊地理环境下的行驶问题，就是汽车地面力学的主要任务。目前世界上沙漠面积约占陆地面积的 1/3，所以汽车与沙地的相互作用问题，又是汽车地面力学研究的重要内容。

众所周知，我国是世界上沙漠面积最广的国家之一，沙漠的分布呈一弧形带绵亘于西北、华北的北部和东北的西部。主要沙漠有塔克拉玛干沙漠、古尔班通古特沙漠、腾格里沙漠、柴达木盆地沙漠和浑善达克沙漠等，集中在我国西北、东北等 9 个省区。广义的沙漠面积达 130.8 万 km^2 ，占全国陆地面积的 13.6%。茫茫黄沙，广袤千里，自古以来就是交通的巨大障碍。

现已探明，位于新疆南部、占地 33.7 万 km^2 的塔克拉玛干沙漠蕴藏着大量的油气和矿产资源。在能源日益枯竭的今天，大规模开发塔克拉玛干沙漠石油及天然气资源已成定局。目前，在塔克拉玛干沙漠已开始小规模开发。

开发和利用沙漠资源最重要、最突出的问题是解决交通运输问题，有两种途径：一种是在沙漠地区修建公路，另一种是研制和开发具备良好沙地通过性的运输工具——沙漠汽车。修建公路的方法只适用于修建沙漠地区的主干公路，而在沙漠地区大量修建公路的办法是不现实的。因此，研制和开发沙地通过性良好的沙漠汽车，就成为解决沙漠地区交通运输问题最根本和有效的方法。

说到底，研制和开发适宜于在松软地面行驶的越野汽车的实质，是提高汽车在土壤上的通过性，核心问题是车轮与土壤相互作用问题，因此，深入研究汽车与地面相互作用机理及作用方式，研制高通过性的车辆行走机构，对解决在土壤等特殊地理环境下的交通运输问题，促进国民经济建设，具有十分重要的意义。

第二节 汽车与地面相互作用的研究方法

汽车与地面相互作用的研究方法，归纳起来可分为以下五类。

一、纯经验方法

纯经验方法的典型代表是美国陆军工程部队水道试验站的圆锥指数法（简称WES法）。WES法主要是把影响土壤支承能力和土壤推进力的力学性质结合在一起（不计承载面积的影响）组成一个度量值，叫做“圆锥指数”（CI）。具体来说，WES法是将一个圆锥压头〔顶角为 30° ，圆锥的投影面积为 $1/2\text{in}^2$ （约为 3.2cm^2 ）〕以约 $6\text{ft}/\text{min}$ （约为 $0.5\text{cm}/\text{s}$ ）的速率压入地内，到车辆影响所及深度所需之力（以lbf计，1lbf等于 4.4482N ）除以圆锥底面积（以 in^2 计， 1in^2 约为 6.45cm^2 ）所得之压力（以 lbf/in^2 计， $1\text{lbf}/\text{in}^2 \approx 7\text{kPa}$ ），读作圆锥指数。

汽车在一些土壤上进行试验，测出这些土壤的圆锥指数，并记录对应于土壤不同圆锥指数的汽车运动状况，是顺利通过，还是行驶艰难甚至不能通过。于是，把在特定地表面测得的圆锥指数与已做过车辆试验的土壤圆锥指数相比较，就能预测车辆在此特定土壤表面上的通过能力。这种用圆锥指数预测土壤特性的方法，在第二次世界大战末期就已开始采用，并一直沿续至今，其主要原因在于此方法简单而快捷。但由于圆锥指数法是建立在对现有车辆进行广泛试验的基础上，故只能适用于和这些车辆相类似的车型，而不能用来精确预测新设计车型的通过性能。

由于车辆常常在同一车辙内重复行驶，所以使土壤产生“重塑”。由于重塑而引起土壤状态变化，使细粒土壤（如粘土、粉土、壤土等）的强度变得更弱。因此，需要一种考虑到此情况的所谓“重塑试验”。这个试验是将土壤样土装入一小圆筒中，然后以 2.5lbf （约为 11.12N ）的重锤，从 12in （约为 30.5cm ）高度自由落下冲击100次，所得的指数叫做“额定圆锥指数”（RCI），它是车辆最终能否通过的判断值。额定圆锥指数和最初测定的圆锥指数之比，叫做“重塑指数”（RI），并可用公式表示如下

$$(\text{RCI}) = (\text{CI}) \times (\text{RI})$$

例如，最初测定的圆锥指数为70，重塑指数为0.8，则额定圆锥指数为56。

由此可以看出，最初测定的圆锥指数的物理意义在于表示该层土壤的承载能力，而额定圆锥指数是表示经过重塑后该土壤的最小承载能力，它们是判断车辆通过性能的土壤方面的综合参数。

车辆在同一车辙中通过50次所需的最小额定圆锥指数，WES称之为“车辆圆锥指数”。如超过50次，则给土壤加水以减弱其强度；如不足50次，则应加强土壤强度，然后测量之。车辆圆锥指数是表示通过性的车辆方面的参数，它受车辆

重量、行走装置形状的影响。

对于轮式车辆，按 WES 法先求出其通过性指数，再用图 1-1 求出车辆圆锥指数，因为一定的车辆圆锥指数相当于一定的车辆通过性指数。影响车辆通过性指数的因素有：传动形式、发动机尺寸、作用在车轮上的载荷、车轮的宽度、轮胎花纹以及离地间隙等。

对于粘性土壤上的轮式车辆通过性指数，WES 建议用下式求之

$$\text{通过性指数} = 0.6 \left\{ \left(\frac{\text{接地压力系数} \times \text{重量系数}}{\text{轮胎系数} \times \text{花纹系数}} + \text{车轮载荷—间隙系数} \right) \times \text{发动机系数} \times \text{传动系数} \right\} + 20$$

式中 接地压力系数 = $\frac{\text{总重量(以 lbf}^{\ominus}\text{计)}}{\text{轮胎宽度} \times \text{轮辋直径} \times \text{轮胎数}}$

重量系数：35000lbf(约为 155.7kN)以上 = 1.1

15000~35000lbf(约为 66.7~155.7kN) = 1.0

15000lbf(约为 66.7kN)以下 = 0.9

轮胎系数 = $1.25 \times \text{轮胎宽度(以 in}^{\ominus}\text{计)}/100$

花纹系数：有防滑链的为 1.05

无防滑链的为 1.0

车轮载荷(以 lbf 计) = $\text{总重量(以 lbf 计)}/(\text{车轮数} \times 1000)$

间隙系数 = $\text{间隙(以 in 计)}/10$

发动机系数：每吨重 10PS[⊕]以上为 1.0, 10PS 以下为 1.05

传动系数：液力式的为 1.0

机械式的为 1.05

将车辆的有关参数代入上述系数，再从图 1-1 中查出车辆圆锥指数。

车辆圆锥指数相当于车辆的接地压力，它表示该车辆需要的土壤承载能力。但它不只考虑接地面积一个因素，而是考虑车辆的许多参数，因此比接地压力更接近于实际情况。

将由地表面得到的额定圆锥指数与车辆圆锥指数相比较，就能判断车辆的通过性如何。如果车辆圆锥指数比额定圆锥指数大时，该车辆不能在该地表面上通过；反之，如果小就能通过。例如，在圆锥指数为 420kPa 的地表面上，车辆圆锥指数为 385kPa 的汽车可以通过，而 455kPa 的汽车就不能通过。

[⊖] 1lbf = 4.4482N。

[⊖] 1in = 2.54cm。

[⊕] 1PS = 735.499W。

但必须指出：“圆锥指数”并不能代表土的力学特性，很难把它与土的力学特性建立起联系；并且圆锥指数法只适用于某些特定条件，在很多情况下所得结果与实际不符。

二、模型试验和因次分析方法

用模型试验法来解决车辆与土壤的关系问题及车辆设计问题，比一般的样车原型试验要迅速和经济得多。因此，在某些国家，早在 20 世纪 30 年代初就已经采用了模型试验的方法。

模型试验就是把自然物理现象中一切与车辆工作过程有关的因素按一定的比例缩小，并将该现象搬到试验室的土槽中来观察，然后再把观察到的结果用一定的比例放大，从而得到发生于原型中的物理现象。

模型试验法可以很好地控制所有的试验参数，尤其是试验条件。对于一些简单的基本概念，可以很快、很经济地进行推断，某些干扰因素也易于消除或至少减轻其干扰程度。有时用模型试验法不能解决微观局部现象，那就要用实物原型试验。

模型试验的理论基础是因次分析，而因次分析基于两个公理，兹分述如下：

公理一：只有在数量具有相同性质时，数量的绝对值才能相等。

例如，一个由力测量的量只能与由力评价的量相等。

公理二：两个同类量大小的比值，若以相同单位测量之，则与用以测量它的单位无关。

例如，一个轮胎的宽度与直径之比，不管用 ft、in，还是用 m 去量它们都是一样的。

物理科学方面的度量大致可以分为两类：

(1) 初次量 这是可用某种标准测量单位来进行比较而形成比值的一些量。

(2) 二次量 这是根据适当的规则组合两个以上的初次量而成的测量单位。

因此，任何一个量可以用适当的初次量的因次表示之。例如，在质量系统中，其因次方程式常可用下式表示为

$$A = M^{C_1} L^{C_2} T^{C_3} \quad (1-1)$$

式中 A ——因变量；

M, L, T ——初次量，分别表示质量、长度和时间；

C_1, C_2, C_3 ——指数。

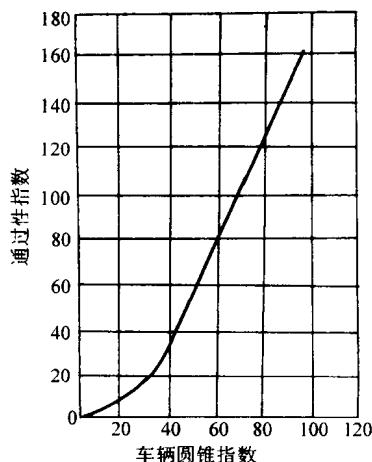


图 1-1 通过性指数与车辆圆锥指数的关系

若一方程式的形式不随基本测量单位而变时,则该方程叫做“因次的齐次”。

把因次分析应用到实际问题中去,是基于把所研究的物理现象用一个各项为特定变数的因次齐次方程表示之。

例如,弹性轮胎在软土壤上的滚动阻力 F_{R} 可用下面的方程式表示

$$F_{\text{R}} = f(W, d, b, h, \delta, \text{CI}) \quad (1-2)$$

式中 W ——车轮负荷;

d ——轮胎直径;

b ——轮胎宽度;

h ——轮胎截面高度;

δ ——轮胎变形;

CI——圆锥指数,表示土壤的坚实度。

在滚动阻力 F_{R} 的上述方程式中引入了轮胎和土壤系统的一系列变数。

从因变数 F_{R} 和独立变数 W, d, h, δ, b 和 CI 中,可以组成无数个无因次乘积;而由这些变数组成的任何无因次乘积都具有下列形式

$$\left(\frac{F_{\text{R}}}{W}\right)^{a_1}, \left(\frac{\text{CI}d^2}{W}\right)^{a_2}, \left(\frac{b}{d}\right)^{a_3}, \left(\frac{\delta}{h}\right)^{a_4}, \left(\frac{h}{d}\right)^{a_5} \quad (1-3)$$

式中 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 ——常值指数。

另外,无因次乘积 $F_{\text{R}}/W, \text{CI}d^2/W, b/d, \delta/h$ 和 h/d 是相互独立的,因为其中任何一个都不是另一个的乘幂。

可以由这些变数组成另外一些无因次乘积,例如

$$\frac{\text{CI}bd}{W} \left(\frac{\delta}{d}\right)^{\frac{1}{2}}$$

但这并不是新的无因次乘积,因为它可以用式(1-3)的无因次乘积表示之

$$\frac{\text{CI}bd}{W} \left(\frac{\delta}{d}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\text{CI}d^2}{W}\right) \left(\frac{b}{d}\right) \left(\frac{\delta}{h}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{h}{d}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (1-4)$$

由此可得无因次乘积的全组定义如下:若在一组中的乘积是相互独立的,以及其他变数的无因次乘积是该组无因次乘积的幂乘积,则给出的变数的无因次乘积为全组。

从上面的例子不难引出如下的伯金汉定理:若一方程式是因次齐次式,则可以演变成为一全组无因次乘积之间的关系式。

设由未知的因次齐次方程联系起来的变数有 n 个,则伯金汉定理可述之如下:

如果

$$a_1 = f(a_2, a_3, a_4, \dots, a_n) \quad (1-5)$$

说明了因变数 a_1 与独立变数 $a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$ 之间的函数关系,并且是一个因次齐次式,则它一定可以变成一全组无因次乘积之间的关系式,即

$$\pi_1 = F(\pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{n-r}) \quad (1-6)$$

式中, π 的值是独立的无因次乘积, 并将由 $n-r$ 个独立函数组成。 n 是原来方程式中变数的数量, r 是 n 个变数的因次矩阵的阶数。因次矩阵的形式如下

$$\begin{array}{c|ccc} & a_1 & a_2 & a_3 \cdots a_n \\ \hline b_1 & c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \cdots c_{1,n} \\ b_2 & c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \cdots c_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \cdots \\ b_s & c_{s,1} & c_{s,2} & c_{s,3} \cdots c_{s,n} \end{array} \quad (1-7)$$

式中 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ ——原方程的变数;

$b_1, b_2, \dots, b_s$ ——组成 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 的基本因次单位 (在一般机械系统中是质量 M 、长度 L 和时间 T);

$c_{s,1}, c_{s,2}, c_{s,3}, \dots, c_{s,n}$ ——是在乘积中的基本单位的幂次, 它表示原始变数的最终因次。

通常在因次分析中, 阶数 r 等于基本因次单位的数 s 。但基本因次的数目取决于基本因次系统的采用。例如在采用质量系统 $[F] = [MLT^{-2}]$ 时, 即有三个基本因次。这里, 符号 $[F]$ 、 $[M]$ 、 $[L]$ 和 $[T]$ 分别表示力、质量、长度和时间。

由此可知, 式 (1-6) 给出一个规则, 即在全组中的无因次乘积的数目等于其变数的总数减去问题中的基本因次数。

美国的迪爱尔公司技术中心 (Deere & Company Technical Center), 曾用上述因次分析原理和模型试验方法建立了轮胎与车辆的性能预测系统。迪爱尔公司在导出预测方程时所选择的变数, 列于表 1-1。

表 1-1 迪爱尔公司所选择的变数

变 数	符 号	因 次	变 数	符 号	因 次
土壤:			系统:		
圆锥指数	CI	FL^{-2}	负荷	W	F
车轮:			阻力	F_t	F
轮胎截面宽度	b	L	挂钩牵引力	DP	F
轮胎轮廓直径	d	L	扭矩	T	FL
轮胎滚动半径	r_s	L	滑转率	s	—

表 1-1 列出的重要变数有 9 个: $F_t, DP, T, W, b, d, r_s, CI$ 和 s 。因为基本因次有两个, 故根据伯金汉定理将有 7 个无因次乘积, 其全组为

$$\frac{F_t}{W}, \frac{DP}{W}, \frac{T}{r_s W} = f\left(\frac{CIbd}{W}, \frac{b}{d}, \frac{r_s}{d}, s\right) \quad (1-8)$$

如果轮胎的尺寸限制在 $b/d \approx 0.30$ 、 $\delta/h \approx 0.20$ ，后者相当于 $r_a/d \approx 0.475$ ；又考虑到从动轮的滚动阻力 F_i 只与轮胎负荷、尺寸、充气压力以及土壤强度有关，而与滑转率无关，则滚动阻力 F_i 只是负荷系数 $C_n = Clbd/W$ 的函数，即

$$\frac{F_i}{W} = f\left(\frac{Clbd}{W}\right)$$

根据迪爱尔公司的试验结果，当轮胎内气压为额定气压（相当于 $\delta/h \approx 0.20$ ），且车轮在并非极易压缩的土壤上滚动时， F_i/W 与 $C_n = Clbd/W$ 的关系可由图 1-2 中的曲线表示。如转化成经验公式，则滚动阻力可由下列方程预测

$$\frac{F_i}{W} = \frac{1.2}{C_n} + 0.04 \quad (1-9)$$

由式(1-9)可知，在硬的地表面（例如可被压缩的干粘土）上，由于 C_n 值很大，滚动阻力 F_i 接近于 4% 的车轮负荷 W ，且主要由于轮胎挠曲变形和迟滞损失产生。

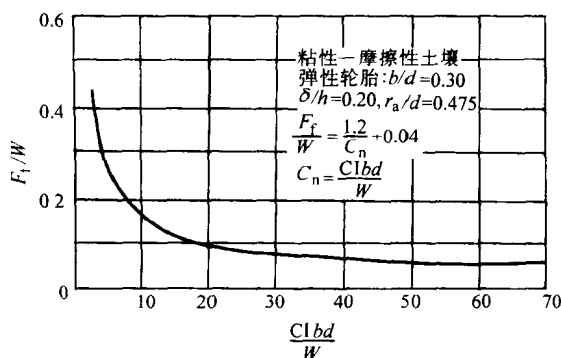


图 1-2 F_i/W 与 $Clbd/W$ 的关系

式(1-9)是对轮胎宽度与直径之比(b/d)约为 0.3 的情况导出。如果 b/d 之值与 0.3 有出入，则式(1-9)的数量关系也将发生变化。

由式(1-8)可见，车轮扭矩 T 是 C_n 和 s 的函数

$$\frac{T}{r_a W} = f\left(\frac{Clbd}{W}, s\right)$$

使用表明：驱动车轮在软土壤上滚动时，地面附着允许的牵引力 F_d 随着滑转率的升高而增加，其最大值接近于渐近线。因此，在车轮负荷 W 一定的情况下，牵引力 F_d 可看作是滑转率的函数，即

$$F_d/W = f(1 - e^{-s})$$

式中 e ——自然对数的底。

如把一些动力传动能量损失忽略不计，则车轮扭矩 T 可假定等于牵引力 F_d 乘以有效力臂 r_a ，即

$$T = F_d r_a$$

或者

$$\frac{T}{r_a W} = f(1 - e^{-s}) \quad (1-10)$$