中算史論叢

第一集

李儼著

中國科學院出版

中算史論叢

第一集

李儼著

中國科學院出版
1954年11月

中算史論叢　第一集

著者	李儼
出版者	中國科學院 北京文津街3號
印刷者	藝文書局鑄字印刷廠 上海嘉善路113號
發行者	新華書店

(專) 54006	1954年11月第一版
自然: 004	1954年11月第一次印刷
(滬) 0001—3,210	開本: 787×1092 $\frac{1}{25}$
字數: 260,000	印張: $17\frac{19}{25}$

定價: 道林本 48,000元　報紙本 28,000元

內容介紹

本書專述我國各時代的數學文獻，以及中算家之成就與史蹟．作者係就原有此項著作加以修訂，并就最近數年來的單篇論文，加以補充整理．各集分門別類，以便研究和參考．先編成五集．

此書第一集係就中算家各項成就，加以集錄．有分數論，畢達哥拉斯定理研究，平方零約術，大衍求一術，縱橫圖研究，巴斯噶三角形研究，方程論，級數論各篇，并於書前列有中國數學史緒言，以便讀者對中國數學先有一綜合的認識．

序

公曆 1919 年以後，關於中國數學史論文，陸續登載於各雜誌和報紙的共有八十餘篇，已於公曆 1931 年，1933 年，1935 年，1947 年，選擇比較重要的，輯成“中算史論叢”(一)，(二)，(三)，(四)，由中華學藝社分別作爲“學藝彙刊”之一，由商務印書館陸續出版. 其中各册，有的時間較久，現在已經絕版，一方面，近年此項史料，時時又有發現. 修訂該書，十分需要. 今年上海中國科學社發起編輯“中國古代科學史料叢書”，其中關於“中國古代數學史料”，已經編成一書，交由該處出版. 中國數學歷史較長，不限於古代. 而古代數學亦有和以後各時代相聯系之處，因就以前已出版的“中算史論叢”(一)，(二)，(三)，(四)內各篇論文，詳加修訂，其中有全部重寫的，有局部修改的，一方面再補入近年所已發表，未經彙輯出版的單篇論文，重加排列，編成“中算史論叢”，第一集，第二集，第三集，第四集，第五集各集. 篇目都載在各集之內. 此項新集，出版之前，曾經嚴敦傑先生校訂一過，又補充若干寶貴史料，各集出版之後，尤望讀者再加補充，多給批評.

1954 年 4 月李儼序於蘭州

中算史論叢

第一集

目次

中國數學史緒言

中國數學發展史擬分爲五期：第一期由公曆前 2700 年迄公曆前 200 年，是爲上古期；第二期由公曆前 200 年迄公曆後 1000 年，是爲中古期；第三期由公曆後 1000 年迄公曆後 1367 年，是爲近古期；第四期由公曆 1367 年迄 1750 年，是爲近世期；第五期由公曆 1750 年迄 1912 年，是爲最近世期。

上古中古時期中國數學雖無盛大發展，但亦可歸納數事加以敍述。今以上古期爲例，僅有傳說可記，其善算者，據傳有伏羲（一作宓犧，虙戲，庖犧，伏戲，伏犧），黃帝，隸首（一作慮首），倕（一作垂）諸人。

此期數學事業可歸納爲（一）結繩，（二）規矩，（三）九九，（四）十進法，（五）算學教育等諸事。其（一）結繩之制，則易繫辭稱："上古結繩而治，後世聖人，易之以書契。"三國吳虞翻易九家義則稱："事大大其繩，事小小其繩，結之多少，隨物衆寡。"唐代之吐番及大羊同國（見唐會要卷九十七），日本在德川時代之能登，駿河二國，以及今日北美土人，都有應用結繩制度的。至（二）規矩二字，至今尙爲成語，而舊書之記規矩者爲例至多，如周禮、荀子、淮南子、莊子叠稱"圜者中規，方者中矩"；而史記"夏本紀"且稱禹"陸行乘車，水行乘舟，泥行乘橇（音敲），山行乘檋（音局），左準繩，右規矩，載四時，以開九州，通九道；"漢武梁祠

石室造象，且繪有"伏羲氏手執矩，女媧氏手執規"及"伏羲手執矩"兩造象．至（三）九九制度則舊書亦疊有記錄，如管子稱："宓戲作九九之數．"韓詩外傳稱："齊桓公庭燎，東野人有以九九見者．"而九九次序，則由九九迄一一，與今日九九歌訣之由一一迄九九者不同，其全文據敦煌及居延所遺之殘木簡，與敦煌舊鈔本算書，其次序如下：

九九八十一，八九七十二，七九六十三，六九五十四，五九四十五，四九三十六，三九二十七，二九十八；八八六十四，七八五十六，六八四十八，五八四十，四八三十二，三八二十四，二八十六；七七四十九，六七四十二，五七三十五，四七二十八，三七二十一，二七十四；六六三十六，五六三十，四六二十四，三六十八，二六十二；五五二十五，四五二十，三五十五，二五十；四四十六，三四十二，二四八；三三九，二三六；二二四．

（四）爲十進法，上古所舉一、十、百、千、萬、億、兆並用十進，而殷代甲骨以及周秦金文則十以下一至五作"一、二、三、亖、〓"並爲累進，與以後十進、萬進、倍進之上中下"三等數法"互異．（五）爲算學教育，古代注重算學，孔子至稱："推十合一爲士"，則因士以算學爲必修科，但有八歲及十歲入學學算二說．前漢書食貨志稱："八歲入小學，學六甲、五方、書計之事．"後漢書楊終傳亦引："年八歲，…教之書計"之說；白虎通稱："八歲毀齒，始有識知，入學，學書計；"而內則則云："六年教之數與方名，十年出外就傅，居宿於外，學書計．"復次則居延漢簡之中，時時於"能書會計"之下，記及"治官民頗知律令"以及年歲、身長等字樣，以見古代之重視"能書會計"．

第二期之中算，由公曆前 200 年，迄公曆後 1000 年．此期由漢至唐，重要史事有（一）圓率之硏討，與（二）算經十書之編纂二事．就中圓率之定義係圓周與圓直徑之比，上古擬爲三與一之比，失之過簡．至魏劉徽於魏陳留王景元四年（公曆 263 年）注九章算術，其求圓率，以圓內容六邊形起算，謂："割之彌細，所失彌少，割之又割，以至不可割，則與圓周合體而無所失矣."劉徽由此算得圓周 3.14 以上，圓徑 1，而以 $\pi=3.14$ 入算．故隋書稱："圓周率三，圓徑率一，其術疏舛，自劉歆（?—23，$\pi=3.1547$），張衡$\left(78-139, \pi=\sqrt{10}，\text{或 } \pi=\frac{92}{29}\right)$，劉徽（236 時人，$\pi=3.14$ 以上），王蕃（219－257，$\pi=\frac{142}{45}=3.155$），皮延宗（445 時人）之徒，各設新率，未臻折衷."而此期圓率計算最有成就者，當推祖冲之．祖冲之（429—500 年），字文遠，范陽薊人，宋孝武大明六年（462 年），曾上書論曆．祖冲之曾算得 π 在 3.1415926 與 3.1415927 之間，及 $\pi=\frac{355}{113}$（密率），$\pi=\frac{22}{7}$（約率）．其所著綴術一書，爲算經十書之一，今已亡失．其子祖暅亦善算術，並以幾何方法證得圓球體積爲 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$．

至算經十書則係九章、海島、孫子、五曹、張丘建、夏侯陽、周髀、五經、緝古、綴術等十書，後以綴術亡失，則以數術記遺代綴術．此項算經十書，今尚流傳，而第二期公曆前 200 年迄公曆後 1000 年之算學成就，亦可於算經十書內見其大概．其中可歸納爲下列數事，卽：（一）分數論之應用，（二）整數句股形

之計算，(三) 開平方零約術與方程之應用，(四) 平立幾何圖形之計算，(五)三等數法之輸入，(六)算學制度之確定，等.

關於(一)分數論之應用，則古代與十進法並用，因古代應用籌算，而是時小數方法尙未發現，故對於小數多設法化爲分數．如漢人以一年爲 365.25 日，卽 $365\frac{1}{4}$ 日，稱爲"四分曆法"；又以一月爲 29.53085 日，或 $29\frac{43}{81}$ 日，稱爲"八十一分法"；此其較著者．後此以"天元"入算，亦將小數化爲分數，分母另行列式，便於計算．而劉徽、祖冲之亦就圓周率之小數，化爲分數入算.

本期於普通幾何形已有詳細之計算外，至 (二) 整數句股形之計算，古代原有句三、股四、弦五之說，卽 $3^2+4^2=5^2$；周髀算經內又載榮方和陳子問答之辭，謂(一)夏至之日，正東西望直周東西日下至周五萬九千五百九十八里半，卽
$\sqrt{(238000/2)^2-(103000)^2}=59{,}598.5+$；(二)冬至之日，至東西不見日，以算求之，日下至周二十一萬四千五百五十七里半，卽 $\sqrt{(238000)^2-(103000)^2}=214{,}557.5+$，則不限於整數．其後劉徽九章注 (263 年) 並擴充爲 $5^2+12^2=13^2$, $8^2+15^2=17^2$, $7^2+24^2=25^2$, $20^2+21^2=29^2$ 諸數，實根據 $(a^2-b^2)^2+(2ab)^2=(a^2+b^2)^2$ 公式算得．中世時期，已知幾何形施以朱、靑、黃色，或赤、黑色，或朱、黃色，以幾何方法"令出入相補，各從其類."以證明整數句股形或其他幾何形．復次則海島算經全書應用句股形進行初等測量，其計算與證明都和數理符合.

(三) 開平方零約術，則古代中算家對於開方原有"不加借

算",和"加借算"兩法. 所謂"不加借算",如 10 一數開平方得 3 後餘 1, 則以 1 爲分子,以 3 乘 2 (常數) 得 6 爲分母,則 $\sqrt{10}=3\frac{1}{2\times 3}=3\frac{1}{6}$, 如列爲公式, 即

$$N=a_1^2+r_1,\ \sqrt{N}=\sqrt{a_1^2+r_1}=a_1+\frac{r_1}{2a_1}\cdots\cdots\cdots\cdots(1a)$$

此項方法, 雖於數理未嘗切合, 但在西洋, 則公曆 50 年前後, 1175 年,及 1341 年剌伯達氏 (Rhabdas) 都有類似的公式,即:

$$\sqrt{N}=\sqrt{a_1^2+r_1}\doteqdot\frac{1}{2}\left(a_1+\frac{a_1^2\pm r_1}{a_1}\right)\cdots\cdots\cdots(1b),\ 1341\text{ 年}$$

$$\sqrt{N}=\sqrt{\left(a_1\pm\frac{1}{b_1}\right)^2\pm r_1}\doteqdot\left(a_1\pm\frac{1}{b_1}\right)\pm\frac{r_1}{2\left(a\pm\frac{1}{b_1}\right)}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1c),\ \text{約 50 年}$$

$$\sqrt{N}=\sqrt{a_1^2+r_1}=\sqrt{\left(a_1+\frac{r_1}{2a_1}\right)^2-\left(\frac{r_1}{2a_1}\right)^2}\doteqdot\left(a_1+\frac{r_1}{2a_1}\right)-\frac{\left(\frac{r_1}{2a_1}\right)^2}{2\left(a_1+\frac{r_1}{2a_1}\right)}\cdots\cdots\cdots\cdots(1d),\ \text{約 1175 年}$$

$$\sqrt{N}=\sqrt{a_1^2+r_1}=\sqrt{(a_1+1)^2+(r_1-2a-1)}\doteqdot a_1+\frac{r_1+1}{2a_1+2}\cdots\cdots\cdots\cdots(1e),\ \text{約 1175 年}$$

所謂"加借算",如 10 一數,開平方得 3 後餘 1, 則以 1 爲分子, 以 3 乘 2 (常數) 再加 1 (常數), 得 7 爲分母,則 $\sqrt{10}=3+\frac{1}{2\times 3+1}=3\frac{1}{7}$,如列爲公式,即

$$N=a_1^2+r_1, \sqrt{N}=\sqrt{a_1^2+r_1}=a_1+\frac{r_1}{2a+1} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

此法五經算術、張丘建算經、甄鸞注周髀算經曾經應用，在國外則十一世紀阿拉伯算家阿拉-卡知 (Al-karkhi, 約 1029 年死)始舉其例[1].

關於方程，九章算術句股章已言及二次方程．即 $x^2+(14+20)x=2(1775\times 20)$, $x=250$; 張丘建算經也示有二次方程二問，即：

$$x^2+68\frac{3}{5}x=2\times 514\frac{31}{45}, \quad x=12\frac{2}{3} \text{ 及 } x^2+15x=594, \ x=18;$$

而緝古算經則有 $x^2=A$, $x^2+px=A$, $x^3+px^2=A$, $x^3+px^2+qx=A$, $x^4+qx^2=A$ 諸式，並於 $x^3+px^2+qx=A$ 一式，說明"以從開立方除之".

(四)平立幾何圖形之計算．此處不詳述．

(五)三等數法之輸入，實始於唐．華嚴經稱："…此方黄帝算法總有二十三數，謂一、二、三、四、五、六、七、八、九、十、百、千、萬、億、兆、京、垓、秭、壤、溝、澗、正、載．從萬已去，有三等數法，其下者十十變之，中者百百變之，上者倍變之．今案此經十、百、千、萬，十十變之；從萬至億，百倍變之；從億已去，皆以能數量爲一數，復數至與能數量等." 數術記遺、五經算術所稱三等數法，似本於此．華嚴經又稱"一百洛叉爲一俱胝：俱胝，俱胝爲一阿庾多；阿庾多，阿庾多爲一那由他；…."

(六)算學制度之確定．因本期早有算學博士之稱，如魏

1) 見李儼，中算家之平方零約術，中國科學 (1950) 一卷二、四期第 295—323 頁．和本集第 76—121 頁．

書殷紹傳稱："殷紹，世祖時爲算生博士."又隋書稱："隋至德二年(584)，張賓上新曆，兼算學博士張乾亦參與其事." 是算生博士與算學博士之稱，在此期已經確定.

第三期自公曆後 1000 年迄公曆後 1367 年，爲宋元時期. 此期中算最爲發達. 從事天元四元之研究者，有秦九韶(1247)、李治(1192—1279)、楊輝、郭守敬(1280)、朱世傑(1303)諸人，其所著書今尙留存；而最初說明天元學者，當推沈立. 沈立宋史有傳，曾於嘉祐元年(1056)行視商、胡，著有河防通議，而以天元演段；其計算方法，初期楚衍弟子賈憲設有"立成釋鎖開立方法"，分置實、方法、廉法、下法等四層. 楚衍於天聖元年(1023)進崇元曆. 賈憲爲衍弟子，楊輝引有"賈憲立成釋鎖平方法及立方法"，又引有"賈憲開方作法本原圖"，與朱世傑四元玉鑑(1303)內"古法七乘方圖"同，與巴斯楷三角形(Pascal's Triangle)全相一致，而時代則先二百餘年. 至"實、方、廉、隅"等方位之在多乘方者，則秦九韶、李治、朱世傑諸人列式大致相同，就中或"太在元下"，或"元在太下"，而於乘除進退，初無二致. 李治敬齋古今黈稱："予在東平，得一算經，大抵多明如積之術，以十九字志其上下層數，曰：仙、明、霄、漢、壘、層、高、上、天、人、地、下、低、減、落、逝、泉、暗、鬼，此蓋以人爲太極，而以天地各自爲元，而陟降之." 蓋當時所設未知數，先爲天元，故稱天元術；以後遞增爲地，爲人，爲物，因稱爲四元. 其演進情形，則平陽李德載及李治在東平得一算經論及地元，劉大鑑撰乾坤括囊，末有人元二間，朱世傑則於大德七年(1303年)撰四元玉鑑三卷，乃按天、地、人、物四元入算，而以元氣居中，立天元一於

下,地元一於左,人元一於右,物元一於上. 至於正負開方有多至九乘方卽係十次方程者,自秦九韶(1247)以後,並與和湼氏(Horner, 1819 年)取同一方法,而時代實先五百餘年,故在世界數學史上,關於方程論,中華實爲先進. 此期天元術發展之外,一時數理,如秦九韶曾創大衍求一術(1274 年),並於著書數學九章卷五論及海龍公式,卽

$$\Delta = \sqrt{s(s-b)(s-a)(s-c)},\quad s = \frac{a+b+c}{2};$$

楊輝之縱橫圖說(Magic Squares, 1275 年);郭守敬之弧矢割圓術(1280 年),係以幾何方法證求球面三角形兩公式,卽:

$$\sin a = \sin c \cdot \sin A,\quad \sin b = \frac{\sin c \cdot \cos A}{\sqrt{\sin^2 c \cdot \cos^2 A + \cos^2 c}};$$

朱世傑之級數論(1303 年),並推一時獨步.

第四期自公曆 1367 年迄公曆 1750 年,爲明迄清初時期,此期中算大事爲(一)回回曆之輸入,(二)珠算之發明,(三)筆算之應用,與(四)西洋曆法之輸入. 就中(一)回回曆之輸入,有可以記錄的,因中國曆算向由中算家自行設計;唐代曾一度隨佛教而輸入印度曆法,但影響不大;元代則隨伊斯蘭教而輸入回回曆法;有明一代,官家曆法,全由回回人主持,直至西洋曆法輸入,始告中斷. 復次則爲(二)珠算之發明. 因吾國古代係用籌算數,此項工具稱爲籌算、算,亦稱爲籌策,說文竹部稱:"算長六寸,計曆數者;"前漢書律曆志稱:"其算用竹,徑一分,長六寸,二百七十一枚,而成六觚爲一握." 至甄鸞註數術記遺則減爲

四寸；隋書律曆志又減爲三寸． 此項籌策又分爲正負二種，隋書律曆志稱："其算用竹，廣二分長三寸，正策三廉，積二百一十六枚，成六觚，乾之策也；負策四廉，積一百四十四枚，成方，坤之策也． 觚方皆徑十二，天地之數也．" 在前則北史貫思伯傳稱："蔡邕（132—192）論明堂之制，堂方百四十(四)尺，象坤之策；屋圓徑二百一十六尺，象乾之策．" 則此項籌策制度，由來已久．至唐則印度筆算曾一度輸入，唐開元占經於"算法字樣"條稱："有問咸記，無由輒錯，連算便眼．"而新唐書卷二十八，則稱："其算皆以字書，不用籌策"． 至元明回回人則用沙盤或土盤，故回回曆亦稱爲土板曆，如明會典稱："回回監…本監子弟，仍世其業，以本國土板曆相推算；"又明黃省曾西洋朝貢典錄（1520）亦稱："回回司天監，取回回人世官之，用本國土板曆，亦兼推算，"即其一例． 至明季則有珠算之應用，所用工具，稱爲算盤，其名疊見於會稽馬歡瀛涯勝覽古里國條（1416）[2]，錢塘吳敬九章詳註比類算法大全（1450），及柯尚遷數學通軌（1578），即明人所著金瓶梅小說（嘉靖年間（1522—1566）著）亦曾提及算盤，至程大位始集其大成，著有算法統宗（1592），珠算方法因而風行一時；不久溤應京皇明經世實用編（1603 年本，引及程大位算法統宗自序）朱載堉算學新說（1603 年刻），黃龍吟，算法指南（1604）並採程說． 至於珠算之妙用，全在歌訣，但此項歌訣，亦由演變而得． 就除法而論，宋元算家，亦用歌訣，如

2) 馬書有永樂十四年（1416）自序． 書中阿丹國及條舉永樂十九年（1421）時事，天方國條舉及宣德五年（1430），而書末又有景泰辛未（1451）一條，都在永樂十四年（1416）之後．

楊輝(1274)(三歸)題［見一下二十一，即七］，

$$\frac{10}{3}=1+\left(2+\frac{1}{3}\right)=1+\frac{7}{3};$$

朱世傑(1299)(三歸)題"三一三十一"，$\frac{10}{3}=3\frac{1}{3}$.
所謂"三一三十一"等歌訣．珠算家曾經應用，初無二致．

次爲(三)筆算之應用，與(四)西洋歷法之輸入．

明代末葉回回曆法未有改進，已成弩末，繼之者則爲西洋曆法，其法隨天主教輸入，一如唐代、元代西方曆法，隨同佛教、伊斯蘭教輸入之例．其最初來華者，當以利瑪竇(1552—1610)爲最著．至清廷曾將康熙五十二年(1713)以後編譯之曆象考成、律呂正義(1722)及數理精蘊(1722)集成一百卷，稱爲律曆淵源(1723 年刻)．當時知算儒者，如王錫闡(1628—1682)，梅文鼎(1633—1726)，年希堯、何國宗、明安國、顧陳垿(1678—1747)，梅瑴成(1681—1763)並直接間接參與其事，一時研治算學之風，流傳全國，國學內設官教授，即舊有之算經十書亦於此時鈔藏於四庫全書之內．

歸納言之，當時輸入國內之西洋算法，計有筆算、籌算、幾何、平面三角、球面三角、三角函數表、積化和差術(即九九加減術)、對數術、對數表、代數學、割圓術等數種．就中筆算則用當日流傳之帆船法(galley method)；籌算即訥白爾籌(Napier's Bond)算法；代數學即借根方算法；幾何則有徐、利譯幾何原本(1607)及數理精蘊(1722)內幾何原本傳世，三角學則散見於徐光啓、利瑪竇共譯測量全義(1631)，薛鳳祚(?—1680)及穆尼閣共譯之天學會通(1653)與其後律曆淵源(1713—1723)之內；

在對數術發明之前夜，西方有"積化和差術"，崇禎曆書內測量全義（1631）卷七，稱："又有加減術，並乘除俱不用"即指此事；對數術則由穆尼閣輸入中國，薛鳳祚、穆尼閣共譯有比例對數表十二卷（1653），數理精蘊（1722）稱："對數比例，乃西士若往·訥白爾（John Napier, 1550—1617）所作，以借數與眞數對列成表（1614），故名對數表，又有恩利格·巴理知斯（Henry Briggs, 1556—1630）者，復加增修（1624），行之數十年，始至中國."但明末清初西人輸入之割圜術、積化和差術（即九九加減術）、對數術，多不詳其說，必由中算家自行研究，加以說明．王錫闡（1628—1682）以外，梅文鼎對於積化和差術，曾於勿菴曆算書目內稱："至於加減代乘除之用，(崇禎)曆書(測量全義，1631)僅舉其名，不詳其說，意若有所珍惜者，蓋嘗疑之數十年，而後乃今得其條貫，即初數，次數，甲數，乙數諸法，並耆然以解，(環中黍尺)書凡五卷（1700）."就中[3]：

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)] \cdots\cdots \text{稱爲初數}$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)] \cdots\cdots \text{稱爲次數}$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)] \cdots\cdots \text{稱爲甲數}$$

$$\cos a \sin b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) - \sin(a-b)] \cdots\cdots \text{稱爲乙數}$$

此外明安圖於乾隆初年（1732—?）對於杜德美（1668—1720）π，$\sin a$，…… 等九法之證明，陳世仁（1676—1722）對於尖錐

3) 見李儼，中算家之九九，加減術，學藝（1952）二十一卷四期第 7-8 頁．