

高等数学

多元微

积

分

及

其

教

学

软

件

上海普通高校「九五」重点教材



上海市教育委员会 组编
上海交通大学 同济大学
华东理工大学 上海大学 编

科学出版社

上海普通高校“九五”重点教材

高等数学

——多元微积分及其教学软件

上海市教育委员会组编

上海交通大学 同济大学 编
华东理工大学 上海大学

科学出版社

1999

内 容 简 介

本书根据国家教委1995年颁布的“高等数学课程教学基本要求”编写而成。本书共五章,包括多元函数微积分和级数。

本书力图体现教学改革精神,使学生的知识、能力和素质都得到提高。全书在合理安排基本知识的同时,加强应用和几何直观,增加了应用性的例题和习题。为加强与计算机的结合,各章均安排了演示与实验,书末附有上机计算的微积分应用课题。本书还配有《演示与实验》磁盘,将Mathematica数学软件引入微积分教材,其目的是为了充分发挥计算机辅助教学的功能。

本书可供高等工科院校工学、经济学等各专业高等数学课程的教材,也可作为教师和学生的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学:多元微积分及其教学软件/上海市教育委员会组编.
-北京:科学出版社,1999

(上海普通高校“九五”重点教材)

ISBN 7-03-007244-8

I. 高… I. 上… II. ①高等数学-高等学校-教材 ②多元-
微积分-高等学校-教材 IV.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第00853号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

科地五印制厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1999年6月第 一 版 开本:850×1168 1/32

1999年6月第一次印刷 印张:20

印数:1—6 000 字数:524 000

定价:38.50元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈新欣〉)

《高等数学——多元微积分及其教学软件》

编 写 组

顾 问	张伟江	马晓云	
组 长	孙薇荣	谢国瑞	郭镜明
成 员	(按姓氏笔画排列)		
	王 铭	王承国	朱晓平
	杨敏之	陈达段	陈贤锋
	桂子鹏	殷锡鸣	黄 伟
	曹宵临	彭 勃	

序

众所周知,“高等数学”是高等工科院校学生的最基础的学习内容之一.从而,各院校都十分重视“高等数学”的教学和“高等数学”教材的选用.作为上海市高校面向 21 世纪教学内容和课程体系改革发展计划的一项内容,上海交大、同济大学、华东理工大学和上海大学四所学校合作编写了这本新型的《高等数学》教材.它显示了许多新的探索.

这本教材除精选了工科学生必需掌握的高等数学的全部内容之外,还特别融入了计算机和应用软件的使用,从而开拓了高等数学教学实验的新概念和新举措.数学历来冠有“抽象”的名号.特别是,对才进入高等院校的学生而言,学习高等数学更需要一段不短的适应过程.抽象的内容与计算机应用软件的结合将使学生能够非孤立地、更直观地学习好他们的大学第一课——高等数学.

在融入的过程中,这本教材提供了一些研究型练习课题(称之为 project).也就是说,这本教材不仅仅是要求学生通过听课、做习题、上机实验来理解和掌握知识,而且更进一步地要求学生参与教与学的过程,运用知识进行研究、创新;要求学生学习如何解决实际问题等等.应该说,这是原有教学过程的一个飞跃.

相应地,这本教材对教师们也提出了更高的要求:不但能讲授知识,而且会应用计算机软件,还要改进教学方法,能够进行创新研究.这当然有利于教师能力和教学水平的提高.

在这本书的编写过程中,编写者们融集了各方面的智慧,详细地研究了国外一些相关的教材,聘请了来自国外的专家讲学,又利用计算机网络获取了最新的内容和信息……

以上的过程使这本教材具有了很多新的特点，我们希望各院校在使用的过程中再注入更新的功能，在不断的实践、研究和发展中使工科高等数学的教材更完美。我们更希望，大家能从这本教材的编写中得到启示：高校中诸门课的教学既不是相互孤立的内容的传授，也不仅是教师的讲授和学生的接受的单一过程。它应该是各类相关内容的有机融合，也应该是教师和学生共同参与，学习、研究和创新的综合过程。我想无论是编写还是采用这本教材，最值得注意的就是这一点。作为序，我不能仅仅写其特点，而最重要的是让编写者的思想，给广大教育工作者以借鉴。

张伟江

1998年3月15日

编者的话

以教学内容和课程体系为核心的教学改革正在蓬勃开展，我们上海四所高校（上海交通大学，同济大学，华东理工大学，上海大学）的14位数学教师，在上海市教育委员会领导的支持和组织下，经过反复研讨，分工编写了这本《高等数学——多元微积分及其教学软件》教材。

本教材是《高等数学——一元微积分及其教学软件》一书的姊妹篇，并保持它的编写思想和特点。

由于时间仓促，书中的缺点、问题肯定不少，热情欢迎读者不吝指正。

编 者

1998年10月

目 录

第一章 空间解析几何与向量	1
1.1 空间直角坐标系.....	1
1.1.1 空间点的直角坐标.....	1
1.1.2 空间两点间的距离.....	4
习题 1.1	5
1.2 向量及其线性运算.....	6
1.2.1 向量的概念.....	6
1.2.2 向量的线性运算.....	8
习题 1.2	14
1.3 向量的数量积	15
1.3.1 向量的数量积	15
1.3.2 方向角和方向余弦	19
1.3.3 投影	20
习题 1.3	21
1.4 向量的向量积	22
1.4.1 向量的向量积	22
1.4.2 混合积	28
习题 1.4	30
1.5 曲面及其方程	31
1.5.1 曲面方程的概念	31
1.5.2 旋转曲面	33
1.5.3 柱面	34
习题 1.5	36
1.6 空间曲线及其方程	37
1.6.1 空间曲线的一般方程	37
1.6.2 空间曲线的参数方程	38
1.6.3 空间曲线在坐标面上的投影	40

习题 1.6	41
1.7 平面及其方程	42
1.7.1 平面的点法式方程	42
1.7.2 平面的一般式方程	44
1.7.3 平面的截距式方程	45
1.7.4 两平面的夹角	46
1.7.5 点到平面的距离	48
习题 1.7	49
1.8 空间直线及其方程	50
1.8.1 空间直线的一般式方程	50
1.8.2 空间直线的对称式方程	51
1.8.3 空间直线的参数方程	52
1.8.4 两直线的夹角	54
1.8.5 直线与平面的夹角	55
1.8.6 直线与平面的交点	56
1.8.7 平面束	59
习题 1.8	61
1.9 二次曲面	62
1.9.1 椭球面	63
1.9.2 抛物面	64
1.9.3 双曲面	65
1.9.4 二次锥面	67
习题 1.9	68
1.10 向量函数和空间曲线	70
1.10.1 向量函数	70
1.10.2 向量函数确定的空间曲线	71
1.10.3 向量函数的导数和积分	73
习题 1.10	77
1.11 空间曲线的弧长和曲率	79
1.11.1 弧长	79
1.11.2 曲率	82
1.11.3 主法向量和次法向量	85
习题 1.11	88

1.12 质点在空间的运动	89
1.12.1 速度和加速度	89
1.12.2 加速度的切向分量和法向分量	92
1.12.3 开普勒定律	94
习题 1.12	97
1.13 演示与实验 (三维图形的绘制, 球面与柱面相交)	98
总习题一	111
第二章 多元函数微分学	117
2.1 多元函数的基本概念	117
2.1.1 一些点集知识	117
2.1.2 多元函数	119
2.1.3 多元函数的极限	127
2.1.4 多元函数的连续性	130
习题 2.1	133
2.2 偏导数	134
2.2.1 偏导数的定义及其算法	134
2.2.2 高阶偏导数	139
习题 2.2	142
2.3 全微分	145
2.3.1 空间曲面的切平面	145
2.3.2 全微分	146
习题 2.3	153
2.4 链式法则	155
习题 2.4	164
2.5 隐式求导法	165
2.5.1 一个方程的情形	165
2.5.2 方程组的情形	169
习题 2.5	174
2.6 方向导数与梯度	176
2.6.1 方向导数	176
2.6.2 梯度及其意义	180
习题 2.6	187
2.7 极值	189

2.7.1 极值与最大值、最小值	189
2.7.2 条件极值的拉格朗日乘子法	200
习题 2.7	207
2.8 演示与实验 (等高线图的绘制, 梯度线的绘制, 切平面与 法线)	209
习题 2.8	220
总习题二	221
第三章 多重积分	226
3.1 二重积分的概念	226
3.1.1 两个等价问题	226
3.1.2 定义	229
3.1.3 简单性质	233
习题 3.1	235
3.2 二重积分的计算	237
3.2.1 利用直角坐标计算二重积分	237
3.2.2 利用极坐标计算二重积分	249
习题 3.2	256
3.3 二重积分的应用	260
3.3.1 曲面面积	260
3.3.2 物理应用	264
习题 3.3	268
3.4 三重积分	269
3.4.1 三重积分的概念	269
3.4.2 三重积分的计算	274
习题 3.4	285
3.5 利用柱面坐标与球面坐标计算三重积分	287
3.5.1 利用柱面坐标计算三重积分	287
3.5.2 利用球面坐标计算三重积分	291
习题 3.5	298
3.6 重积分的变量变换	300
习题 3.6	313
3.7 演示与实验 (积分区域投影, 重积分计算)	315
习题 3.7	321

总习题三	322
第四章 曲线积分和曲面积分	328
4.1 数量值函数的曲线积分	328
习题 4.1	335
4.2 向量场. 向量场的曲线积分	336
4.2.1 向量场	336
4.2.2 向量场的曲线积分	339
习题 4.2	346
4.3 格林定理及其应用	348
4.3.1 格林定理	348
4.3.2 平面曲线积分与路径无关的条件	353
4.3.3 全微分求积. 全微分方程	356
4.3.4 能量守恒定律	360
习题 4.3	361
4.4 曲面的参数方程和曲面面积	364
4.4.1 曲面的参数方程	364
4.4.2 曲面的切平面	368
4.4.3 曲面面积	369
习题 4.4	373
4.5 曲面积分	375
4.5.1 数量函数的曲面积分	375
4.5.2 向量函数的曲面积分	380
习题 4.5	391
4.6 奥-高公式 通量和散度	393
4.6.1 奥-高公式	393
4.6.2 通量和散度	398
习题 4.6	400
4.7 斯托克斯公式 环流量和旋度	403
4.7.1 斯托克斯公式	403
4.7.2 环量和旋度	408
习题 4.7	412
4.8 演示与实验 (莫比乌斯带, 函数绘图)	414
习题 4.8	422

总习题四	422
第五章 无穷数列和级数	427
5.1 无穷数列	427
5.1.1 无穷数列的概念	427
5.1.2 数列的几何表示	429
5.1.3 数列的极限	430
5.1.4 单调数列和有界数列	434
习题 5.1	436
5.2 无穷级数	438
5.2.1 基本概念	438
5.2.2 级数收敛的必要条件	443
5.2.3 收敛级数的基本性质	444
习题 5.2	447
5.3 正项级数	451
5.3.1 正项级数及其基本性质	451
5.3.2 比较判别法	452
5.3.3 比值判别法	457
5.3.4 根值判别法	459
5.3.5 积分判别法	461
5.3.6 余和及误差估计	464
习题 5.3	468
5.4 任意项级数	471
5.4.1 交错级数	471
5.4.2 绝对收敛与条件收敛	474
5.4.3 判别级数敛散性的策略	479
习题 5.4	480
5.5 幂级数	482
5.5.1 函数项级数的一般概念	482
5.5.2 幂级数及其收敛性	483
5.5.3 幂级数的和函数	491
5.5.4 幂级数的运算	493
习题 5.5	499
5.6 函数展开成幂级数	502

5.6.1 泰勒级数和麦克劳林级数	503
5.6.2 函数展开成幂级数的方法	507
5.6.3 函数展开成幂级数的应用	514
习题 5.6	521
5.7 广义积分的审敛法和 Γ 函数	523
5.7.1 广义积分的敛散性判别法	523
5.7.2 Γ 函数及其基本性质	529
习题 5.7	532
5.8 傅里叶级数	533
5.8.1 三角级数及三角函数系的正交性	534
5.8.2 函数展开成傅里叶级数	536
5.8.3 正弦级数和余弦级数	544
5.8.4 周期为 $2l$ 的周期函数的傅里叶级数	549
习题 5.8	553
5.9 演示与实验 (雪花模型)	554
总习题五	559
微积分应用课题	565
附录 1 二阶和三阶行列式简介	574
习题答案	579

第一章 空间解析几何与向量

解析几何学的产生是数学史上一个划时代的成就. 它通过点和坐标的对应, 把数学研究的两个基本对象“数”和“形”统一起来, 使得人们既可用代数方法研究解决几何问题(这是解析几何学的基本内容), 也可用几何方法解决代数问题. 在学习一元函数微积分的过程中, 我们已经看到平面解析几何的知识是不可缺少的. 同样道理, 学习多元函数微积分也离不开空间解析几何的知识.

本章首先建立空间直角坐标系, 并引进在工程技术上有着广泛应用的向量, 然后以向量为工具, 讨论空间的平面和直线. 在第九节中介绍了向量函数及其分析性质, 并以它为工具研究空间曲线及质点在空间的运动.

1.1 空间直角坐标系

1.1.1 空间点的直角坐标

为了沟通平面图形与数之间的联系, 我们通过平面直角坐标系, 建立了平面上的点和实数对之间的一一对应关系, 从而能运用代数方法来讨论几何图形问题.

现在我们要把这种思想加以推广, 通过建立三维空间的直角坐标系, 来沟通空间图形和数之间的联系.

在空间选定一点 O 作为原点, 过 O 点作三条两两垂直的数轴, 分别标为 x 轴、 y 轴和 z 轴, 统称为坐标轴. 习惯上我们把 x 轴、 y 轴置于水平面上, 而让 z 轴取铅直向上方向(见图 1-1).

观看图 1-2, 我们可以想象 y 轴和 z 轴是落在纸面上的, 而 x 轴则是垂直于纸面指向我们. 它们的方向满足右手法则. 所谓右

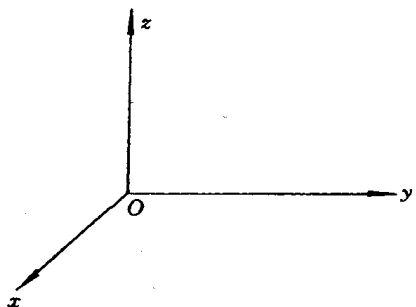


图 1-1

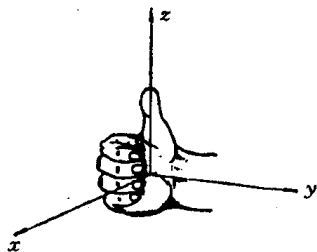


图 1-2

手法则,指的是:伸平右手,使拇指与其他四指垂直,当四指从 x 轴的正向转动 $\pi/2$ 的角度后指到 y 轴的正向时,拇指的指向应是 z 轴的正向.按右手法则确定的坐标系称为右手系.我们今后采用的坐标系都是右手系.

由任意两条坐标轴所确定的平面称为坐标面.三个坐标轴确定了三个坐标面.包含 x 轴和 y 轴的坐标面称为 xOy 坐标面,另外两个是 yOz 坐标面和 zOx 坐标面.

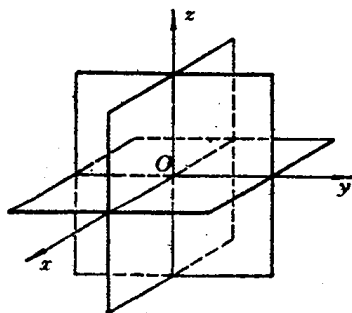


图 1-3

三个坐标面把整个空间分隔成八个部分,每个部分称为一个卦限. xOy 坐标面的上方和下方各有四个卦限.我们把 xOy 平面上第 1,2,3,4 象限上方的四个卦限依次称为第 1,2,3,4 卦限,下方的四个卦限则依次称为第 5,6,7,8 卦限.例如含有 x 负半轴, y 正半轴, z 负半轴的卦限是第 6 卦限(图 1-3).

在上面建立的坐标系中,坐标轴、坐标面都是两两垂直的,所以我们称它为空间直角坐标系.

有了坐标系之后,我们来建立空间的点和有序数组之间的对应关系.

设 M 为空间的一个定点, 过 M 点作三个平面分别垂直于 x 轴, y 轴和 z 轴, 并依次交这三条坐标轴于 P, Q, R 三点. 设 P, Q, R 三点在三条坐标轴上的坐标依次为 x, y 和 z , 那么空间一点 M 就唯一地确定了一个有序数组 (x, y, z) . 反过来, 给定一个有序数组 (x, y, z) , 我们可依次在 x 轴、 y 轴、 z 轴上取坐标为 x, y, z 的点 P, Q, R , 过 P, Q, R 三点, 各作一个平面, 使分别垂直于 x 轴、 y 轴、 z 轴, 这三个平面的交点就是有序数组 (x, y, z) 所确定的唯一的一点 (见图 1-4).

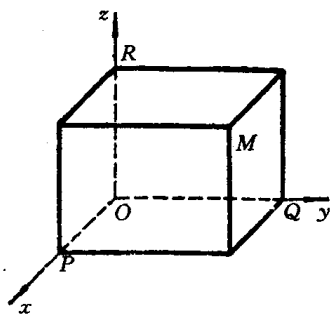


图 1-4

这样, 通过空间直角坐标系, 我们在空间的点和有序数组 (x, y, z) 之间建立了一一对应的关系. 有序数组中的 x, y, z 称为点 M 的坐标. 其中 x, y, z 依次称为点 M 的横标、纵标和竖标. 坐标为 x, y, z 的点 M 通常记作 $M(x, y, z)$.

坐标面、坐标轴上的点的坐标有一定的特点. 例如, xOy 坐标面上的点, 其竖标 $z=0$; yOz 坐标面上的点, 其横标 $x=0$; zOx 坐标面上的点, 其纵标 $y=0$. x 轴上的点, 其纵标、竖标均为零, 即 $y=0, z=0$. 同理, y 轴上的点, $x=0, z=0$. z 轴上的点, $x=0, y=0$. 原点的三个坐标均为零.

点 (x, y, z) 关于 xOy 坐标面的对称点的坐标是 $(x, y, -z)$, 关于 x 轴的对称点的坐标为 $(x, -y, -z)$, 关于原点的对称点的坐标为 $(-x, -y, -z)$. 其余情况可类推.

设 $P(a, b, c)$ 为空间一点, 从点 P 向 xOy 平面作垂线, 设垂足为 Q , 则易知点 Q 的坐标为 $(a, b, 0)$. 点 Q 称为点 P 在 xOy 平面上的投影. 同理可知, 点 $R(0, b, c)$ 和点 $S(a, 0, c)$ 分别是 P 点在 yOz 平面和 zOx 平面上的投影.