干部自学高考辅导读物

高等数学自学问答

——一元微积分部分

翟连林 赵家骅 编著

干部自学高考辅导读物

柯　普　主编

高等数学自学问答

（一元微积分部分）

翟连林　赵家骅　编著

地质出版社

干部自学高考辅导读物

柯　普　主　编

高等数学自学问答

（一元微积分部分）

翟连林　赵家骅　编著

*

责任编辑：张　瑚

地质出版社出版

（北京西四）

地质出版社印刷厂印刷

（北京海淀区学院路29号）

新华书店北京发行所发行·全国新华书店经售

*

开本：850×1168 1/32　印张：18　字数：454,000

1984年5月北京第一版·1984年5月北京第一次印刷

印数：1—82,870册　　定价：2.40元

统一书号：7038·新118

前　言

为了帮助广大干部、职工和青年运用自学方法，掌握高等数学内容，通过自学高等考试和各类职称学力考核，我们根据自学高考指定教材《高等数学讲义》（上册，樊映川等编）的内容，针对自学读者的实际需要和学习特点，将一元微积分部分的自学重点和常见疑难问题，分成一个一个的题目，给予简明扼要的分析和解答。书中突出一元微积分部分的基本概念，重要定理、公式和法则；着重介绍常用的解题方法和技巧；并通过大量实例分析自学者易犯的错误及纠正方法。各章之后均配有思考练习题，书末还安排了三组自我检查试题（附答案），读者可以通过这些内容，检查自学效果。

本书是在我们编写的《高等数学（一）教学参考资料》（北京广播电视大学内部印刷）的基础上，通过教学实践并吸收了自学读者的意见，修订、补充而成的。在编写过程中，邢富冲、梁琴、阮光南等同志给予大力帮助，在此表示衷心感谢。

由于我们的水平有限，编写时间仓促，书中如有缺点和错误，恳切希望读者批评指正。

编　者

1984年 5 月

目　　录

附录Ⅱ：常用公式

第一章 预备知识

初等数学主要研究不变的量和不变的图形，而高等数学主要研究变化的量（变量）和变化的图形．变量之间的依赖关系就是函数关系．函数是高等数学中最重要的基本概念之一，是微积分研究的对象．

本章主要研究实数与数轴、函数和它的基本性质．重点是函数的概念、定义域、图象以及它的基本性质．

学习本章应掌握：

1．绝对值与邻域的有关概念；

2．变量、函数、函数定义域的概念；

3．复合函数、分段函数、隐函数、反函数、初等函数的概念；

4．函数基本性质及函数定义域的计算方法．

一、实数与数轴

问：什么是有理数？

答： 整数和分数统称为有理数．有理数是形如$\frac{p}{q}$这一类的数，其中p及q都是整数，且$q\neq0$．

一般来说，一个数a如果它能表示成$\frac{p}{q}$的形式（p、q为整数，$q\neq0$），则数a必是有理数；反之，若a是有理数，则数a必可表示为$\frac{p}{q}$的形式，即：$a=\frac{p}{q}$．

例如，无限循环小数$0.\dot{3}$可以表示成$\frac{1}{3}$，所以它是有理数．

又如，7为有理数，它可以表示成$\frac{7}{1}$的形式。

问：什么是有理数集？有理数集有什么性质？

答： 全体有理数组成的集合称为有理数集，我们用字母Q来表示。

有理数集主要有两个性质：

1. 有序性：任何两个有理数a和b总可以比较它们的大小，因此可以确定它们排列的顺序。

例如，当$a=5$，　$b=\frac{1}{3}$时，　有$a>b$。

当$a=0$，　$b=0.7$时，　有$a<b$。

当$a=-0.1$，$b=-\frac{1}{10}$时，有$a=b$。

2. 稠密性：任何两个有理数a和b之间至少存在一个不同于a、b的有理数。事实上，有理数$\frac{a+b}{2}$就是介于a和b之间的一个有理数。

同理，a和$\frac{a+b}{2}$之间，$\frac{a+b}{2}$和b之间也都至少存在一个有理数，如此类推，任何两个有理数之间存在着无穷多个有理数。由此可见，在有理数集中，有理数排列是非常稠密的。

应该注意的是，在有理数集中有理数虽然排列得非常稠密，但总还是有空隙的。也就是说，尽管有理数排列得很紧密，但它们之间并不象流水那样的连续不断，而总是有间隔（空隙）的，在这些空隙上布满了非有理数，我们称这些数为无理数。

问：什么是无理数和无理数集？

答： 一般来说，可以表示成无限不循环小数的数称为无理数。例如，$\sqrt{2}$、$\sqrt{5}$、π、e、$\sin 5^\circ$、$\ln 2$、……都是无理数。

全体无理数组成的集合称为无理数集，我们用字母$\bar{Q}$表示，无理数集也具有稠密性和有序性。在无理数集中各无理数之间虽然排列得很稠密，同样也是有空隙的，在这些空隙上布满了有理数。

问：如何证明$\sqrt{2}$不是有理数呢？

答：我们用反证法来证明：

假设$\sqrt{2}$是有理数，则$\sqrt{2}$一定可以表示成$\frac{p}{q}$的形式。这里不妨设$\frac{p}{q}$为既约分数，即p与q之间没有公因数($q\neq 0$)。则

$$\sqrt{2}=\frac{p}{q}\Longrightarrow 2=\left(\frac{p}{q}\right)^2$$
$$\Longrightarrow p^2=2q^2.$$

上式的右边能被 2 整除，故等式的左边也能被 2 整除。此时，p必然含有因子 2，故可设$p=2r$（r为整数)，则有

$$4r^2=2q^2\Longrightarrow 2r^2=q^2.$$

上式的左端能被 2 整除，则等式的右端也能被 2 整除，这样q也含有因子 2，此时，p与q之间存在公因数 2，这与p和q之间没有公因数的假设相矛盾。

这个矛盾的产生，正是由于假设$\sqrt{2}$是有理数所导致的，因此，$\sqrt{2}$不是有理数而是无理数。

问：**什么是实数与实数集？实数集有什么性质？**

答：有理数和无理数统称为实数，全体实数组成的集合称为实数集，我们用字母R表示。

由于实数集是有理数集与无理数集的并集，所以，实数集也具有有序性和稠密性。重要的是，实数集还具有连续性，这就是说，在实数集中，所有实数排列得犹如流水一样的连续不断而没有空隙。

应该指出，微积分所研究的函数都限定在实数集内。

问：**什么是数轴？实数与数轴有什么关系？**

答：具有方向、原点和单位长度的直线称为数轴（如图 1—1)。

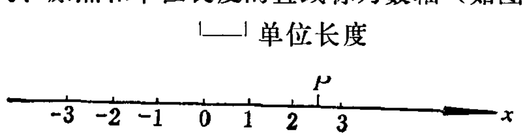

图 1—1

在平面解析几何中已经知道，数轴上的任意一点P和某一数（实数）x相对应，这个数x等于数轴上以原点O为起点，以P点为终点的有向线段$\overline{OP}$的数量：

$$\overline{OP}=x.$$

数x称为数轴上点P的坐标。这样，数轴上任意一点P，必有一个确定的数x和它对应；反过来，已知一数（实数）x，在数轴上一定有一点P，这点P的坐标等于x。这就是说，数轴上的每一点表示某一个实数；反之，每一个实数必是数轴上某一点的坐标，因此，数轴上的全体点与全体实数之间就建立了一一对应关系。

二、绝对值与区间

问：什么是实数的绝对值？

答： 实数a的绝对值用$|a|$表示。

若a为正数，则$|a|=a$；

若a为负数，则$|a|=-a$；

若a为零，　则$|a|=0$。

从实数绝对值的意义可以看出，求一个数的绝对值时，首先应判断这个数是正数还是负数，然后再依绝对值的意义求该数的绝对值。

例如，当$a=3$时，　$|a|=|3|=3$；

当$a=-3$时，$|a|=|-3|=-(-3)=3$；

当$a=0$时，　$|a|=|0|=0$。

再如，计算：$\left|\lg\frac{1}{100}+1\right|$.

$\because\quad \lg\frac{1}{100}=\lg10^{-2}=-2$，

则　$\lg\frac{1}{100}+1=-2+1=-1$，

$$\therefore\quad \left|\lg\frac{1}{100}+1\right|=\left|-1\right|=-(-1)=1.$$

问：$-a$是一个负数吗？为什么？

答：不一定。因为$-a$表示a的相反数。

当$a>0$时，$-a<0$，此时$-a$是负数；

当$a<0$时，$-a>0$，此时$-a$是正数；

当$a=0$时，$-a=0$，此时$-a$是零。

问：$|1+x|=1+x$吗？为什么？

答：不一定。应该首先讨论$1+x$的正负，然后才能确定它的绝对值。正确的解法是：

（1）当$1+x>0$，即$x>-1$时，

$|1+x|=1+x$。

（2）当$1+x<0$，即$x<-1$时，

$|1+x|=-(1+x)$。

（3）当$1+x=0$，即$x=-1$时，

$|1+x|=|0|=0$。

问：什么是绝对值不等式？

答：含有绝对值的不等式称为绝对值不等式，下面各式都是绝对值不等式：

$|x|\leqslant 1$；$|x|>a$；$|x-a|<\epsilon$，…。

在数学中常常利用绝对值不等式来表示实数的范围，因此应该熟悉绝对值不等式，并能正确地解绝对值不等式。

问：如何解下列各绝对值不等式并在数轴上把它们的解表示出来？

（1）$|x|\leqslant a\ (a>0)$；（2）$|x|>a\ (a>0)$。

答：可根据绝对值的意义解绝对值不等式。

（1）当$x\geqslant 0$时，$|x|=x$，

∴原绝对值不等式为：$x\leqslant a$。

当$x<0$时，$|x|=-x$，

∴原绝对值不等式为：$-x\leqslant a$。

即　$x \geqslant -a$.

综合上面两种情况，可知原绝对值不等式的解为：

$$-a \leqslant x \leqslant a.$$

在数轴上表示为：

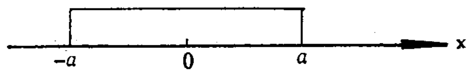

图 1—2

（2）当 $x \geqslant 0$ 时，$|x| = x$,

∴原绝对值不等式为：$x > a$.

当 $x < 0$ 时，$|x| = -x$,

∴原绝对值不等式为：$-x > a$,

即　$x < -a$.

综合上面两种情况，可知原绝对值不等式的解为：

$$x > a \quad 或 \quad x < -a.$$

在数轴上表示为：

图 1—3

问：与 $|x| \leqslant a\ (a > 0)$ 等价的不等式是什么？

答： 与 $|x| \leqslant a$ 等价的不等式是：$-a \leqslant x \leqslant a$.

这就是说，如果 $|x| \leqslant a$，则必有 $-a \leqslant x \leqslant a$ 成立；反之，如果 $-a \leqslant x \leqslant a$，则必有 $|x| \leqslant a$ 成立。所以今后可用不等式 $-a \leqslant x \leqslant a$ 去代替绝对值不等式 $|x| \leqslant a$；或用绝对值不等式 $|x| \leqslant a$ 去代替 $-a \leqslant x \leqslant a$。这种等价关系表示为：

$$|x| \leqslant a \Longleftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a.$$

问：与 $|x| \geqslant a\ (a > 0)$ 等价的不等式是什么？

答： 与 $|x| \geqslant a$ 等价的不等式是：$x \geqslant a$ 或 $x \leqslant -a$.

这就是说，若 $|x| \geqslant a$，则必有 $x \geqslant a$ 或 $x \leqslant -a$ 成立；反

之，若 $x \geqslant a$ 或 $x \leqslant -a$ 成立，则必有 $|x| \geqslant a$ 成立。

即 $|x| \geqslant a \Longleftrightarrow x \geqslant a$ 或 $x \leqslant -a$.

问：与 $|x-a|<\delta$ $(\delta>0)$ 等价的不等式是什么？

答：$\because |x-a|<\delta \Longleftrightarrow -\delta<x-a<\delta$，

即 $a-\delta<x<a+\delta$.

$\therefore$ 与 $|x-a|<\delta$ 等价的不等式为

$a-\delta<x<a+\delta$.

问：如何证明下列各不等式？

（1）$-|a| \leqslant a \leqslant |a|$；（2）$|a+b| \leqslant |a|+|b|$；

（3）$|a|-|b| \leqslant |a-b|$；（4）$|a \cdot b|=|a| \cdot |b|$；

（5）$\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$.

答：证明如下：

（1）　当 $a>0$ 时，$-|a|<a=|a|$，

$a<0$ 时，$-|a|=a<|a|$，

$a=0$ 时，$-|a|=a=|a|$.

综合上面三种情况，有

$-|a| \leqslant a \leqslant |a|$.

（2）由（1）$-|a| \leqslant a \leqslant |a|$，$-|b| \leqslant b \leqslant |b|$，

将上面两式相加，得

$-(|a|+|b|) \leqslant a+b \leqslant |a|+|b|$.

再由 $-a \leqslant x \leqslant a \Longleftrightarrow |x| \leqslant a$ 可知

$|a+b| \leqslant |a|+|b|$.

（3）由（2）$|a|=|a-b+b| \leqslant |a-b|+|b|$，

则 $|a|-|b| \leqslant (|a-b|+|b|)-|b|$，

$\therefore$ $|a|-|b| \leqslant |a-b|$.

（4）首先，当 a、b 之间有一个数是零时，则等式成立。

其次，若 a、b 同号，则 $|ab|=ab$，

且 $|a| \cdot |b|=ab$，则等式成立。

最后，若 a、b 异号，不妨设 $a>0$ 而 $b<0$，

此时，$|a\cdot b|=a(-b)$； 且$|a|\cdot|b|=a(-b)$。

故等式成立。

综合上述，可知等式 $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$成立。

（5）$\because$ $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\left|a\cdot\dfrac{1}{b}\right|=|a|\cdot\left|\dfrac{1}{b}\right|=|a|\cdot\dfrac{1}{|b|}$，

$\therefore$ 等式$\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$成立。

问：如何解下列绝对值不等式？

（1）$|3x+5|\geqslant\dfrac{1}{2}$；　（2）$\left|\dfrac{2x}{x+1}\right|\leqslant 1$；

（3）$\dfrac{1}{2}<\left|2-\dfrac{x}{3}\right|\leqslant 3$.

答： 可利用$|x|\leqslant a\ (a>0)\Longleftrightarrow -a\leqslant x\leqslant a$和$|x|\geqslant a\Longleftrightarrow x\geqslant a$或$x\leqslant -a\ (a>0)$求解如下：

（1） $\because$ $|3x+5|\geqslant\dfrac{1}{2}\Longleftrightarrow 3x+5\geqslant\dfrac{1}{2}$或$3x+5\leqslant-\dfrac{1}{2}$.

解这两个不等式，得

$$x\geqslant-\frac{3}{2}\quad\text{或}\quad x\leqslant-\frac{11}{6}.$$

在数轴上表示为：

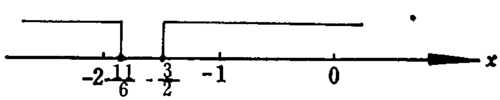

图 1—4

（2） $\because$ 分式的分母不能为零，

$\therefore$ $x\neq-1$

又$\because$ $\left|\dfrac{2x}{x+1}\right|\leqslant 1\Longleftrightarrow -1\leqslant\dfrac{2x}{x+1}\leqslant 1$.

而这个不等式与下面的不等式组同解：

$$\begin{cases}(3x+1)(x+1)\geqslant 0,\\(x-1)(x+1)\leqslant 0.\end{cases}$$