

干部自学高考辅导读物

高等数学自学问答

——一元微积分部分

翟连林 赵家骅 编著



干部自学高考辅导读物

柯 普 主编

高等数学自学问答

(一元微积分部分)

翟连林 赵家骅 编著

地质出版社

干部自学高考辅导读物

柯 普 主 编

高等数学自学问答

(一元微积分部分)

翟连林 赵家骅 编著

*

责任编辑：张 瑚

地质出版社出版

(北京西四)

地质出版社印刷厂印刷

(北京海淀区学院路29号)

新华书店北京发行所发行·全国新华书店经售

*

开本：850×1168¹/₃₂ 印张：18 字数：454,000

1984年5月北京第一版·1984年5月北京第一次印刷

印数：1—82,870册 定价：2.40元

统一书号：7038·新118

前 言

为了帮助广大干部、职工和青年运用自学方法，掌握高等数学内容，通过自学高等考试和各类职称学力考核，我们根据自学高考指定教材《高等数学讲义》（上册，樊映川等编）的内容，针对自学读者的实际需要和学习特点，将一元微积分部分的自学重点和常见疑难问题，分成一个一个的题目，给予简明扼要的分析 and 解答。书中突出一元微积分部分的基本概念，重要定理、公式和法则；着重介绍常用的解题方法和技巧；并通过大量实例分析自学者易犯的错误及纠正方法。各章之后均配有思考练习题，书末还安排了三组自我检查试题（附答案），读者可以通过这些内容，检查自学效果。

本书是在我们编写的《高等数学（一）教学参考资料》（北京广播电视大学内部印刷）的基础上，通过教学实践并吸收了自学读者的意见，修订、补充而成的。在编写过程中，邢富冲、梁琴、阮光南等同志给予大力帮助，在此表示衷心感谢。

由于我们的水平有限，编写时间仓促，书中如有缺点和错误，恳切希望读者批评指正。

编 者

1984年5月

目 录

第一章 预备知识

一、实数与数轴	1
二、绝对值与区间	4
三、充分必要条件	14
四、常量和变量	16
五、函数概念	16
六、列函数式	20
七、函数的表示法	23
八、函数的几种特性	23
九、函数的定义域与值域	37
十、分段函数	41
十一、隐函数与显函数	44
十二、反函数概念	44
十三、复合函数	52
十四、初等函数	54
十五、小结	56
十六、思考练习题	57
十七、答案或提示	58

第二章 数列的极限与函数的极限

一、数列	60
二、数列的极限	68
三、数列极限的运算	85
四、无穷小量与无穷大量	93
五、函数的极限	96
六、无穷小的比较	112

七、函数极限的运算·····	114
八、小结·····	122
九、思考练习题·····	123
十、答案或提示·····	123
第三章 函数的连续性	
一、函数的增量·····	125
二、函数的连续性·····	129
三、函数的间断点·····	136
四、连续函数的四则运算·····	144
五、反函数的连续性·····	145
六、复合函数的连续性·····	148
七、闭区间上连续函数的性质·····	154
八、小结·····	159
九、思考练习题·····	160
十、答案或提示·····	161
第四章 导数与微分	
一、导数概念·····	163
二、导数的几何意义·····	176
三、导数的运算·····	185
四、复合函数的导数·····	187
五、反函数的导数·····	193
六、隐函数的导数·····	197
七、由参数方程确定的函数的导数·····	199
八、对数求导法·····	201
九、高阶导数·····	203
十、函数的微分·····	209
十一、微分应用于近似计算及误差估计·····	216
十二、小结·····	225
十三、思考练习题·····	226
十四、答案或提示·····	227

第五章 中值定理

一、罗尔中值定理	231
二、拉格朗日中值定理	234
三、柯西中值定理	244
四、罗必达法则	248
五、泰勒中值定理	266
六、小结	276
七、思考练习题	278
八、答案或提示	278

第六章 导数的应用

一、函数单调性的判定	281
二、函数的极值及其求法	290
三、函数的最大值及最小值的求法	302
四、曲线的拐点及其求法	310
五、曲线的凹性及其判定	314
六、曲线的渐近线	316
七、函数图形的描绘方法	320
八、弧微分与曲率	324
九、曲率半径与曲率中心	335
十、方程的近似解	342
十一、小结	347
十二、思考练习题	348
十三、答案或提示	348

第七章 不定积分

一、原函数与不定积分的概念	350
二、直接积分法	358
三、换元积分法	365
四、分部积分法	388
五、有理函数的积分	404
六、三角函数有理式的积分	405

七、简单无理函数的积分	407
八、小结	412
九、思考练习题	413
十、答案或提示	414
第八章 定积分	
一、曲边梯形的面积	415
二、定积分的概念	422
三、定积分的性质	433
四、牛顿-莱布尼兹公式	439
五、用换元法计算定积分	445
六、用分部积分法计算定积分	461
七、广义积分	466
八、定积分的近似计算	475
九、小结	479
十、思考练习题	480
十一、答案或提示	481
第九章 定积分的应用	
一、平面图形的面积	483
二、体积	499
三、曲线的弧长	510
四、定积分在物理、力学上的应用	515
五、函数的平均值	525
六、小结	529
七、思考练习题	530
八、答案或提示	532
附录 I: 自我检查题	
自我检查试题(一)	533
自我检查试题(二)	539
自我检查试题(三)	544

附录Ⅱ：常用公式

一、初等代数.....	550
二、初等几何.....	553
三、平面三角.....	555
四、极限.....	557
五、导数与微分.....	558
六、简单积分表.....	559
七、拉丁字母及希腊字母.....	567

第一章 预备知识

初等数学主要研究不变的量和不变的图形，而高等数学主要研究变化的量（变量）和变化的图形。变量之间的依赖关系就是函数关系。函数是高等数学中最重要的基本概念之一，是微积分研究的对象。

本章主要研究实数与数轴、函数和它的基本性质。重点是函数的概念、定义域、图象以及它的基本性质。

学习本章应掌握：

1. 绝对值与邻域的有关概念；
2. 变量、函数、函数定义域的概念；
3. 复合函数、分段函数、隐函数、反函数、初等函数的概念；
4. 函数基本性质及函数定义域的计算方法。

一、实数与数轴

问：什么是有理数？

答：整数和分数统称为有理数。有理数是形如 $\frac{p}{q}$ 这一类的数，其中 p 及 q 都是整数，且 $q \neq 0$ 。

一般来说，一个数 a 如果它能表示成 $\frac{p}{q}$ 的形式（ p 、 q 为整数， $q \neq 0$ ），则数 a 必是有理数；反之，若 a 是有理数，则数 a 必可表示为 $\frac{p}{q}$ 的形式，即： $a = \frac{p}{q}$ 。

例如，无限循环小数 $0.\dot{3}$ 可以表示成 $\frac{1}{3}$ ，所以它是有理数。

又如, 7 为有理数, 它可以表示成 $\frac{7}{1}$ 的形式。

问: 什么是有理数集? 有理数集有什么性质?

答: 全体有理数组成的集合称为有理数集, 我们用字母 Q 来表示。

有理数集主要有两个性质:

1. 有序性: 任何两个有理数 a 和 b 总可以比较它们的大小, 因此可以确定它们排列的顺序。

例如, 当 $a=5$, $b=\frac{1}{3}$ 时, 有 $a > b$ 。

当 $a=0$, $b=0.7$ 时, 有 $a < b$ 。

当 $a=-0.1$, $b=-\frac{1}{10}$ 时, 有 $a = b$ 。

2. 稠密性: 任何两个有理数 a 和 b 之间至少存在一个不同于 a 、 b 的有理数。事实上, 有理数 $\frac{a+b}{2}$ 就是介于 a 和 b 之间的一个有理数。

同理, a 和 $\frac{a+b}{2}$ 之间, $\frac{a+b}{2}$ 和 b 之间也都至少存在一个有理数, 如此类推, 任何两个有理数之间存在着无穷多个有理数。由此可见, 在有理数集中, 有理数排列是非常稠密的。

应该注意的是, 在有理数集中有理数虽然排列得非常稠密, 但总还是有空隙的。也就是说, 尽管有理数排列得很紧密, 但它们之间并不象流水那样的连续不断, 而总是有间隔 (空隙) 的, 在这些空隙上布满了非有理数, 我们称这些数为无理数。

问: 什么是无理数和无理数集?

答: 一般来说, 可以表示成无限不循环小数的数称为无理数。例如, $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{5}$ 、 π 、 e 、 $\sin 5^\circ$ 、 $\ln 2$ 、……都是无理数。

全体无理数组成的集合称为无理数集, 我们用字母 $\bar{Q}$ 表示, 无理数集也具有稠密性和有序性。在无理数集中各无理数之间虽然排列得很稠密, 同样也是有空隙的, 在这些空隙上布满了有理数。

问: 如何证明 $\sqrt{2}$ 不是有理数呢?

答：我们用反证法来证明：

假设 $\sqrt{2}$ 是有理数，则 $\sqrt{2}$ 一定可以表示成 $\frac{p}{q}$ 的形式。这里不妨设 $\frac{p}{q}$ 为既约分数，即 p 与 q 之间没有公因数($q \neq 0$)。则

$$\begin{aligned}\sqrt{2} = \frac{p}{q} &\implies 2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \\ &\implies p^2 = 2q^2.\end{aligned}$$

上式的右边能被 2 整除，故等式的左边也能被 2 整除。此时， p 必然含有因子 2，故可设 $p=2r$ (r 为整数)，则有

$$4r^2 = 2q^2 \implies 2r^2 = q^2.$$

上式的左端能被 2 整除，则等式的右端也能被 2 整除，这样 q 也含有因子 2，此时， p 与 q 之间存在公因数 2，这与 p 和 q 之间没有公因数的假设相矛盾。

这个矛盾的产生，正是由于假设 $\sqrt{2}$ 是有理数所导致的，因此， $\sqrt{2}$ 不是有理数而是无理数。

问：什么是实数与实数集？实数集有什么性质？

答：有理数和无理数统称为实数，全体实数组成的集合称为实数集，我们用字母 R 表示。

由于实数集是有理数集与无理数集的并集，所以，实数集也具有有序性和稠密性。重要的是，实数集还具有连续性，这就是说，在实数集中，所有实数排列得犹如流水一样的连续不断而没有空隙。

应该指出，微积分所研究的函数都限定在实数集内。

问：什么是数轴？实数与数轴有什么关系？

答：具有方向、原点和单位长度的直线称为数轴（如图 1—1）。

—— 单位长度

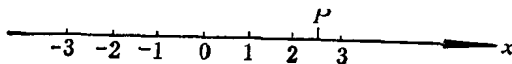


图 1—1

在平面解析几何中已经知道，数轴上的任意一点 P 和某一数（实数） x 相对应，这个数 x 等于数轴上以原点 O 为起点，以 P 点为终点的有向线段 $\overline{OP}$ 的数量：

$$\overline{OP} = x.$$

数 x 称为数轴上点 P 的坐标。这样，数轴上任意一点 P ，必有一个确定的数 x 和它对应；反过来，已知一数（实数） x ，在数轴上一定有一点 P ，这点 P 的坐标等于 x 。这就是说，数轴上的每一点表示某一个实数；反之，每一个实数必是数轴上某一点的坐标，因此，数轴上的全体点与全体实数之间就建立了一一对应关系。

二、绝对值与区间

问：什么是实数的绝对值？

答：实数 a 的绝对值用 $|a|$ 表示。

若 a 为正数，则 $|a| = a$ ；

若 a 为负数，则 $|a| = -a$ ；

若 a 为零，则 $|a| = 0$ 。

从实数绝对值的意义可以看出，求一个数的绝对值时，首先应判断这个数是正数还是负数，然后再依绝对值的意义求该数的绝对值。

例如，当 $a = 3$ 时， $|a| = |3| = 3$ ；

当 $a = -3$ 时， $|a| = |-3| = -(-3) = 3$ ；

当 $a = 0$ 时， $|a| = |0| = 0$ 。

再如，计算： $\left| \lg \frac{1}{100} + 1 \right|$ 。

$$\because \lg \frac{1}{100} = \lg 10^{-2} = -2,$$

$$\text{则 } \lg \frac{1}{100} + 1 = -2 + 1 = -1,$$

$$\therefore \left| \lg \frac{1}{100} + 1 \right| = \left| -1 \right| = -(-1) = 1.$$

问： $-a$ 是一个负数吗？为什么？

答：不一定。因为 $-a$ 表示 a 的相反数。

当 $a > 0$ 时， $-a < 0$ ，此时 $-a$ 是负数；

当 $a < 0$ 时， $-a > 0$ ，此时 $-a$ 是正数；

当 $a = 0$ 时， $-a = 0$ ，此时 $-a$ 是零。

问： $|1+x| = 1+x$ 吗？为什么？

答：不一定。应该首先讨论 $1+x$ 的正负，然后才能确定它的绝对值。正确的解法是：

(1) 当 $1+x > 0$ ，即 $x > -1$ 时，

$$|1+x| = 1+x.$$

(2) 当 $1+x < 0$ ，即 $x < -1$ 时，

$$|1+x| = -(1+x).$$

(3) 当 $1+x = 0$ ，即 $x = -1$ 时，

$$|1+x| = |0| = 0.$$

问：什么是绝对值不等式？

答：含有绝对值的不等式称为绝对值不等式，下面各式都是绝对值不等式：

$$|x| \leq 1; |x| > a; |x-a| < \epsilon, \dots$$

在数学中常常利用绝对值不等式来表示实数的范围，因此应该熟悉绝对值不等式，并能正确地解绝对值不等式。

问：如何解下列各绝对值不等式并在数轴上把它们的解表示出来？

$$(1) |x| \leq a (a > 0); (2) |x| > a (a > 0).$$

答：可根据绝对值的意义解绝对值不等式。

$$(1) \text{ 当 } x \geq 0 \text{ 时, } |x| = x,$$

$$\therefore \text{原绝对值不等式为: } x \leq a.$$

$$\text{当 } x < 0 \text{ 时, } |x| = -x,$$

$$\therefore \text{原绝对值不等式为: } -x \leq a.$$

即 $x \geq -a$.

综合上面两种情况, 可知原绝对值不等式的解为:

$$-a \leq x \leq a.$$

在数轴上表示为:



图 1-2

(2) 当 $x \geq 0$ 时, $|x| = x$,

∴ 原绝对值不等式为: $x > a$.

当 $x < 0$ 时, $|x| = -x$,

∴ 原绝对值不等式为: $-x > a$,

即 $x < -a$.

综合上面两种情况, 可知原绝对值不等式的解为:

$$x > a \text{ 或 } x < -a.$$

在数轴上表示为:



图 1-3

问: 与 $|x| \leq a (a > 0)$ 等价的不等式是什么?

答: 与 $|x| \leq a$ 等价的不等式是: $-a \leq x \leq a$.

这就是说, 如果 $|x| \leq a$, 则必有 $-a \leq x \leq a$ 成立; 反之, 如果 $-a \leq x \leq a$, 则必有 $|x| \leq a$ 成立. 所以今后可用不等式 $-a \leq x \leq a$ 去代替绝对值不等式 $|x| \leq a$; 或用绝对值不等式 $|x| \leq a$ 去代替 $-a \leq x \leq a$. 这种等价关系表示为:

$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a.$$

问: 与 $|x| \geq a (a > 0)$ 等价的不等式是什么?

答: 与 $|x| \geq a$ 等价的不等式是: $x \geq a$ 或 $x \leq -a$.

这就是说, 若 $|x| \geq a$, 则必有 $x \geq a$ 或 $x \leq -a$ 成立; 反

之, 若 $x \geq a$ 或 $x \leq -a$ 成立, 则必有 $|x| \geq a$ 成立.

即 $|x| \geq a \iff x \geq a$ 或 $x \leq -a$.

问: 与 $|x-a| < \delta$ ($\delta > 0$) 等价的不等式是什么?

答: $\because |x-a| < \delta \iff -\delta < x-a < \delta$,

即 $a-\delta < x < a+\delta$.

$\therefore$ 与 $|x-a| < \delta$ 等价的不等式为

$$a-\delta < x < a+\delta.$$

问: 如何证明下列各不等式?

$$(1) -|a| \leq a \leq |a|; (2) |a+b| \leq |a| + |b|;$$

$$(3) |a|-|b| \leq |a-b|; (4) |a \cdot b| = |a| \cdot |b|;$$

$$(5) \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

答: 证明如下:

$$(1) \text{ 当 } a > 0 \text{ 时, } -|a| < a = |a|,$$

$$a < 0 \text{ 时, } -|a| = a < |a|,$$

$$a = 0 \text{ 时, } -|a| = a = |a|.$$

综合上面三种情况, 有

$$-|a| \leq a \leq |a|.$$

$$(2) \text{ 由 } (1) -|a| \leq a \leq |a|, -|b| \leq b \leq |b|,$$

将上面两式相加, 得

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|.$$

再由 $-a \leq x \leq a \iff |x| \leq a$ 可知

$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

$$(3) \text{ 由 } (2) |a| = |a-b+b| \leq |a-b| + |b|,$$

$$\text{则 } |a|-|b| \leq (|a-b| + |b|) - |b|,$$

$$\therefore |a|-|b| \leq |a-b|.$$

(4) 首先, 当 a, b 之间有一个数是零时, 则等式成立.

其次, 若 a, b 同号, 则 $|ab| = ab$,

且 $|a| \cdot |b| = ab$, 则等式成立.

最后, 若 a, b 异号, 不妨设 $a > 0$ 而 $b < 0$,

此时, $|a \cdot b| = a(-b)$, 且 $|a| \cdot |b| = a(-b)$.

故等式成立.

综合上述, 可知等式 $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ 成立.

$$(5) \because \left| \frac{a}{b} \right| = \left| a \cdot \frac{1}{b} \right| = |a| \cdot \left| \frac{1}{b} \right| = |a| \cdot \frac{1}{|b|},$$

$$\therefore \text{等式} \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \text{成立.}$$

问: 如何解下列绝对值不等式?

$$(1) |3x+5| \geq \frac{1}{2}, \quad (2) \left| \frac{2x}{x+1} \right| \leq 1,$$

$$(3) \frac{1}{2} < \left| 2 - \frac{x}{3} \right| \leq 3.$$

答: 可利用 $|x| \leq a (a > 0) \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$ 和 $|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a$ 或 $x \leq -a (a > 0)$ 求解如下:

$$(1) \because |3x+5| \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3x+5 \geq \frac{1}{2} \text{ 或 } 3x+5 \leq -\frac{1}{2}.$$

解这两个不等式, 得

$$x \geq -\frac{3}{2} \text{ 或 } x \leq -\frac{11}{6}.$$

在数轴上表示为:

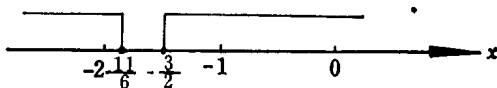


图 1-4

(2) $\because$ 分式的分母不能为零,

$$\therefore x \neq -1$$

$$\text{又} \because \left| \frac{2x}{x+1} \right| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{2x}{x+1} \leq 1.$$

而这个不等式与下面的不等式组同解:

$$\begin{cases} (3x+1)(x+1) \geq 0, \\ (x-1)(x+1) \leq 0. \end{cases}$$