过程参数检测

师克宽　黄　峨　魏平田　张宝芬　编著

中国计量出版社

过 程 参 数 检 测

师克宽　黄　崃　魏平田　张宝芬　　编著

中 国 计 量 出 版 社

内 容 提 要

本书系统论述工业生产过程中温度、压力、流量和物位四个过程参数的检测方法和常用检测仪表，并扼要介绍了过程参数检测所涉及的测量误差理论和数据处理方法。

本书可供石油、化工、冶金、电力、轻工、纺织等工业企业从事仪表、生产过程自动化和计量工作的工人与工程技术人员阅读，也可作为高等院校有关专业师生及研究生的教学参考书。

过 程 参 数 检 测

师克宽 黄峨 魏平田 张宝芬 编著

责任编辑 吴全

中国计量出版社出版

北京和平里11区7号

中国计量出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

开本 787×1092/16　印张 21.5 字数 533 千字

1990 年 1 月第 1 版　1990 年1 月第 1 次印刷

印数 1—6 000

ISBN 7-5026-0259-3/TB·213

定价 9.50 元

前　　言

“过程参数检测”又称“过程检测”(Process Measurement)，系指连续性工业生产过程中有关物理参数的检测技术，主要指对温度、压力、流量和物位这四个参数的检测。

检测仪表好象人的眼睛，而检测技术（现代自动化系统的四大支柱分别为检测技术、计算机技术、信息技术和控制技术）则是工业生产过程中确保安全、稳定生产、提高质量和节约能源的重要手段。随着科技的进步，工业自动化水平日益提高，因而对检测仪表和检测技术也提出了更高的要求。

温度、压力、流量和物位等参数的检测，在石油、化工、冶金、电力、轻工和纺织等工业企业应用极其广泛。这些企业中从事仪表、生产过程自动化及计量测试工作的工人和工程技术人员，都迫切期望系统学习与掌握过程参数检测的原理和技术，以不断提高自身的业务水平。因此，我们从工业生产的实际出发，编写了本书，以满足广大读者的需要。

为了学习的系统性和概念的完整性，本书按参数分类介绍温度、压力、流量和物位四个过程参数的检测原理、方法和常用传感器及检测仪表。对与过程参数检测有关的测量误差理论、数据处理方法，则单列一章进行介绍。还对仪表的检定及标准作了适当的阐述。

从增强实用性出发，本书有重点、有针对地列举了大量工业生产中的检测实例，以便于读者开阔眼界，提高运用基本原理分析与解决实际问题的能力。

参加本书编写工作的有师克宽（第二章）、黄峨（第一及第四章）、魏平田（第一及第五章）、张宝芬（第三及第四章）。

在本书的编写及增改过程中，承蒙国内许多工厂、研究所及大专院校的专家、学者提出建设性的意见，在此深表谢意。

检测技术和检测仪表的发展日新月异，限于我们的水平，书中不当之处在所难免，恳请读者批评指正。

编著者

1988．12．

目　　录

第一章 误 差 分 析

1. 测 量 与 误 差

本章学习过程参数检测方法中有关误差分析的基础知识，着重于应用时所必须的基本概念和计算方法，以期读者能初步了解过程参数中误差的来源及处理方法。如欲进一步学习误差理论，则应阅读有关的专门书籍。

1.1 概述

1.1.1 名词与术语

测量——为确定被测对象的量值而进行的实验过程。其意思是利用一定的工具（仪器）去查明某一时刻、某一物理量的大小，并用仪表显示出该物理量的瞬时或连续变化值。这个数值也称为测量值。

对某一物理量值的测量，一般地说人们总是希望能测得愈准愈好。可是在表达这一愿望时，“测得愈准愈好”本身已经说明了这样一个事实：即对某一物理量进行测量所得的数值是不可能绝对准确的。测量值绝不可能丝毫不差地反映客观实际的物理量值，二者之差值就称为测量误差。

测量工具和测量方法的进一步发展，其首要任务就是要不断地探索用新的科学方法和更先进的技术装备来减小所存在的测量误差。然而却不可能将它减小到零。

此外，针对实际所要解决的问题，测量值也并非总是愈精确愈好。一般只要求误差在一定限度之内就可以了。贪图过分的精确，有时非但于事无补，反倒徒费了大量宝贵的人力、物力和时间。而在对有些问题进行研究的过程中，却又要求对那分厘毫丝不能有半点差错。因此，应该对所要解决的问题进行科学的分析，对测量值所需要的精确性提出恰如其分的要求，而绝不能盲目要求精确或随意放宽误差限度，更不能不问测量值的精确程度就付诸使用，以免酿成大错。总之，就是要对事物采取科学的态度，这样才能达到预期的目的。

在测量工作中，有一些名词术语的概念是应予明确的，现解释如下：

真值 A_0——被测物理量客观存在的真实数值，除理论值外一般是无法绝对精确地得到的。

测量值 X——用工具（仪器）对被测物理量进行观测所得的读数。

误差 x——测量值偏离真值的程度，表示为

$$x = X - A_0 \tag{1-1}$$

绝对误差——当误差以测量单位来表示时，称为绝对误差。

在实际应用中，由于许多被测物理量往往得不到它的真值，所以仪表上标尺的示值是以某些标准仪器的数值作为标准进行校正的。标准仪器本身也是带有误差的，但比起普通使用的仪器来说，其误差要小得多。因此，在校正普通仪表时，差不多可以将标准仪器的数值当作真值，或再加上标准仪器本身的修正值后作为真值。

相对误差——将绝对误差与真值或测量值相比，称为相对误差。即

$$x_r = \frac{x}{A_0} \times 100\% \tag{1-2}$$

或

$$x_r = \frac{x}{X} \times 100\% \tag{1-3}$$

衡量测量值之间的关系，还可以有另外一些尺度，诸如：

精密度（Precision）——对某一物理量进行同样过程的重复测量时，所得各测量值之间差别的接近程度。精密度愈高，表明各测量值愈密集；精密度低，则表明各数值相互间较为分散，它体现了测量结果对同一客观事物复现的程度。

正确度（Corretness）——对某一物理量进行测量时，其测量值接近真值的程度。

由此可以体会到，对某一未知量测量所得的结果，如其正确度高，那末数值的精密度也较高；反之，数值精密度高的测量结果，其正确度却未必高，因为整组数值有可能偏离真值相当地远。

一般将正确度和精密度都高的测量结果用精确度（Accuracy）高一词来概括，表示既精密又正确之意。然而上述这三种名词只反映了一些概念，无法用绝对的数值来衡量。但对同一未知量存在着的用不同仪器或测量方法所得的两组测量结果，倒是可以用一定的方法，计算出某些数值来相对地判断孰优孰劣。

1.1.2 引起误差的原因及误差的分类

一个测量值难以与被测物理量的真值相符，是有多种原因的，例如检测工具本身制造不够精确；仪器所用电源不够稳定；线路接头之间存在接触电势或接触电阻；人为的疏忽造成误读；测量仪表介入被测对象，破坏了其原有的状态等等。虽然这种种不同的原因造成了测量值与真值之间的误差，但人们可以对其现象进行观察与分析，找出原因，进而采取不同的措施以减小误差。

误差的分类如下：

（1）系统误差——测量工具本身或其他原因引起的有规则的误差。如零点没有调整好；工作电池的电压随工作时间的加长而逐渐下降；固定的接触电阻，环境温度有规律的变化等等所引起的误差。遇到这种误差，可对仪器加以校对，采用不同的测试方案进行检查，以便找出系统误差的数值并设法将其消除。

（2）粗大误差——观测者误读或不正确使用仪器与测试方案等人为因素所引起的误差。这些误差中属于误读之类是容易检查出来的；而属于不正确使用仪器或测试方案之类，则与操作或检查者的技术水平有关，因而不易看出，有的还需要反复思考与进行对比试验才能发现。

（3）随机误差——一种由随机因素引起的误差，没有固定的规律可言，但是如果大量反复进行测试，则它们出现的几率服从统计分析的规律。

在对测试数据进行整理时，必须先行判断是否存在人为的粗大误差。如有，相应的测量值应从一系列数值中加以剔除（检验与剔除的方法见后）。再看测试系统是否存在系统误差。如有，则应先行设法消除或找出它的修正值。其余的数值如还有属于随机误差性质的，则要依照统计分析的方法来估计其大小与可信赖的程度。最后总合得出测量值的误差估计来。

1.1.3 不等精密度的测量与权

在测量中还有两种不同的情况：

（1）用相同仪器设备与测试方法对某一未知量进行多次重复测量后所得的多组测量值，人们认为它们是具有同等精密度的测量数据。

（2）用不同精度的仪器设备或不同的测试方法、或在测试环境条件相差很大时对某一未知量进行多次重复测量后所得的多组测量值，可认为它们不再具有同等精密度，而视为不等精密度的测量数据。

对不等精密度的多组测量值，通常将其测量精密度的差异用权来表示。测量精密度愈高，则这组测量值的权愈大，也就是说其数据的可靠性愈大；反之，则其权愈小。所以在综合整理测量数据时，是需要将各组测量值的权的大小加以考虑的。

总之，对于不同情况的测量数据，应先加以分析研究、判断情况、分别处理，再经综合整理，以得出合乎科学性的结果。

1.1.4 算术平均值 $\bar{X}$ 和残差 v_i

现在讨论用同等精密度测量所得的一组测量值经对粗大误差与系统误差进行适当处理后的情况。

（1）算术平均值 $\bar{X}$

当有一组 n 个测量值分别为 X_1，X_2，…，X_n 时，其平均值

$$\bar{X}=\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}=\frac{\Sigma X_i}{n} \tag{1-4}$$

$\bar{X}$ 称为这组测量值的算术平均值。根据概率论中的最大或然原理和最小二乘法原理可知，当测量次数 n 足够多时，算术平均值 $\bar{X}$ 最接近被测量的真值；当次数 $n\to\infty$ 时，可以认为 $\bar{X}=A_0$，故又称 $\bar{X}$ 为最优概值、最或是值等。

通常在测量中，真值 A_0 是无法确切知道的，所以一般经常用算术平均值 $\bar{X}$ 来代替它。在有限次数测量中，二者还是不能完全等同看待的。

（2）残差 v_i

各测量值 X_i 与算术平均值 $\bar{X}$ 之差称为残差或残余误差，即

$$X_i-\bar{X}=v_i \tag{1-5}$$

如果将各测量值的残差取代数和（考虑正负号），可以发现这一组测量值的残差的总和等于零，即

$$\Sigma v_i=v_1+v_2+\cdots+v_n=0 \tag{1-6}$$

为简明起见，以后文中均以 Σ 代表 $\sum\limits_{i=1}^{n}$。

1.2 随机误差

1.2.1 随机误差分布的形态

随机误差是指在测量中所出现的没有一定规律的误差。但从大量测量数据中可看出，它们出现的概率却存在着一定的分布形式，如：

(1) 正态分布——也称高斯分布，在大多数情况下，当测量次数足够多时，统计表明随机误差出现的概率服从正态分布规律，其方程式为

$$y=f(x)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2} \tag{1-7}$$

式中：y——误差为 x 的测量值所出现的次数；

h——测量的精密度；

e——自然对数的底；

π——圆周率。

(2) t 分布——也称学生(student)分布，当测量次数较少、测量数据的误差已难以满足正态分布的条件时，可以考虑按 t 分布来计算误差。

1.2.2 正态分布

(1) 正态分布曲线及其概率积分 P

按正态分布方程式，以误差 x 为横坐标，在某一精密度 h 下，可以描述出 $y=f(x)$ 的关系曲线，如图 1-1 所示。

当误差 x 在从 $-\infty$ 和 $+\infty$ 的整个范围内都出现时，则说明不管误差有多大，都百分之百地出现了，所以对 $y=f(x)$ 的曲线来说，在 x 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的范围内所包围的面积等于100%。这相当于对方程 $y=f(x)$ 进行积分，积分区间为 $-\infty\sim+\infty$。用 P 表示积分值，有

$$P=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-h^2x^2}\mathrm{d}x=1 \tag{1-8}$$

P 称为函数 $y=f(x)$ 的概率积分，$P=1$ 说明全部误差在测量过程中都已出现。如果误差只出现在某一个 $-x\sim+x$ 区间，那末对 $y=f(x)$ 进行积分时，积分区间则应从 $-x$ 到 $+x$。所得的概率积分 P 值一定小于 1，即 $P<1$，它表明误差在 $-x\sim+x$ 区间出现的概率。从图上可以看出，P 的大小正好代表 $x=\pm x$ 与 $y=f(x)$ 曲线所包围的面积。

如果在同样的误差区间 ($x=\pm x$) 内，由 A、B 两组测量值所得的概率积分 P 不同，譬

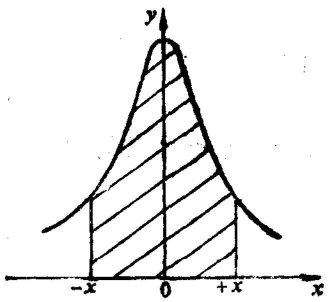

图 1-1 正态分布曲线

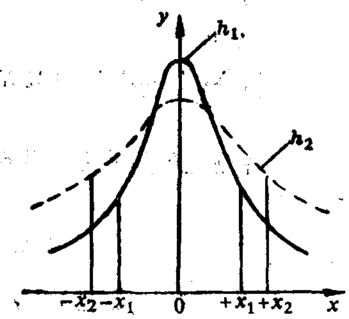

图 1-2 不同测量精密度的正态分布曲线

如 $P_A > P_B$，那末人们就说 A 组测量值的测量精密度比 B 组高。换句话说，如果规定了同一概率积分值 P，则为满足此概率积分，A 组的误差区间 $x_A = \pm x$ 要比 B 组的误差区间 $x_B = \pm x$ 来得小。所以说 A 组的测量误差要比 B 组小。

随着各组测量值测量精密度的不同，正态分布曲线也会有所变化。精密度 h 愈大，曲线中间愈呈高峰状，在同等的概率积分 P 值下，误差区间 $x = \pm x$ 愈小；反之 h 愈小，曲线中间部分愈显平坦，误差区间 $x = \pm x$ 愈大。

在图 1-2 中，设 $h_1 > h_2$，则当 $P(h_1) = P(h_2)$ 时

$$|\pm x_1|_{区间} < |\pm x_2|_{区间}$$

(2) 从正态分布规律引出的几点推论

(a) 当正误差与负误差的绝对值相近时，它们出现的概率也相近；当测量次数增多并趋于无穷时，正误差与负误差在其绝对值相等时，出现的概率也相等。由此可见，正态分布曲线是对称于纵坐标轴的。

(b) 在一定的测量条件下，误差的绝对值不会超过某一足够大的数值。

(c) 在测量过程中，绝对值小的误差比绝对值大的误差出现的概率大。当然，只作少数几次测量是看不出这种趋势的，但随着测量次数显著增多以后，这种趋势就会很快地显示出来。

(d) 在等精密度的测量中，随着对同一被测量的测量次数的增多，随机误差 x 本身的算术平均值将逐渐趋近于零，即

$$\left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)_{n\to\infty} = 0$$

1.2.3 一组直接测量值随机误差的表示方法

对于一组进行直接测量所得的测量值 X_i 以及它们的真值 A_0 和误差 x_i，有

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1 - A_0 \\ x_2 &= X_2 - A_0 \\ &\vdots \\ x_n &= X_n - A_0 \end{aligned}$$

怎样判断比较误差 x 的大小呢？由于随机误差服从于统计规律，且假定它的分布符合正态分布规律，这时通常用标准偏差 σ（均方根偏差）、或然误差 φ、极限误差 Δ、算术平均误差 ϑ 中的一种来表示。

下面分别讨论它们的意义和计算方法：

(1) 标准偏差 σ

一组直接测量值的标准偏差 σ 的值，规定为各测量值绝对误差值的平方和的平均值的平方根，即

$$\sigma = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n}} \tag{1-9}$$

但在实际应用时，由于真值 A_0 是无法确切知道的，通常用测量值的算术平均值 $\overline{X}$ 代替之，因此计算所得的是残差 $v_i = X_i - \overline{X}$。如以 v_i 代替 x_i，则有

$$\sigma=\sqrt{\frac{v_1^2+v_2^2+\cdots+v_n^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{\Sigma v_i^2}{n-1}} \tag{1-10}$$

通过概率积分，还可找出误差方程 $y=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}$ 中精密度 h 与标准偏差 σ 之间的关系

$$h=\frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \tag{1-11}$$

故误差方程式有时也表达为

$$y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2}} \tag{1-12}$$

（2）或然误差 φ

一组测量值，当它的误差值在 $-\varphi\sim+\varphi$ 区间中的概率积分值 $P=1/2$ 时，则此 φ 之值称为这组测量值的或然误差。

或然误差 φ 与标准误差 σ 之间有如下关系

$$\varphi=0.674\,5\sigma \tag{1-13}$$

（3）极限误差 Δ

极限误差表示在测量中可能出现的最大误差，也就是说，在测量过程中误差超过这个范围出现的可能性极小。因此，极限误差使一组测量值的准确程度有一个比较清楚的范围。

根据正态分布规律的误差方程，如将 x 以 σ 的分数值或倍数值代入并求其概率积分时可得

$x=\pm0.3\sigma$	$P\approx0.235\,823$
$x=\pm0.674\,5\sigma=\pm\varphi$	$P\approx0.5$
$x=\pm\sigma$	$P\approx0.682\,689$
$x=\pm2\sigma$	$P\approx0.954\,500$
$x=\pm3\sigma$	$P\approx0.997\,300\,2$
$x=\pm4\sigma$	$P\approx0.999\,936\,7$
$x=\pm5\sigma$	$P\approx0.999\,999\,4$

这里概率积分 P（在概率中称置信概率）表示各种误差在 $x=\pm c\sigma$ 区间出现的次数与误差在 $x=\pm\sigma$ 区间全部出现次数的比值。从上述数值可以看出，当误差 $x\leqslant\pm\sigma$ 出现的概率约为68.3%时，$x>\pm\sigma$ 出现的概率约为31.7%；当 $x\leqslant\pm2\sigma$ 出现的概率约为95%时，$x>\pm2\sigma$ 出现的概率约为5%；到 $x>\pm5\sigma$ 出现的概率只有0.000 06%。也就是说，对一被测量进行一千万次的测量，误差大于 $\pm5\sigma$ 的值出现的机会很少超过6次。

因此，对于可能出现的最大误差，可以人为地规定一个限度。为了可靠起见，曾将极限误差取为

$$\Delta=\pm3\sigma \tag{1-14}$$

经过多年的实践，人们发现测量中有95%的可靠性就已经足够了，故通常取

$$\Delta=\pm2\sigma \tag{1-15}$$

由于目前我国各种仪器是按原有计量标准传递下来的，其极限误差 Δ 取为 $\pm3\sigma$，因此

在没有作出新的规定以前，使用这些仪器时 σ 仍应按 $\sigma = \pm\frac{1}{3}\Delta$ 进行计算。

(4) 算术平均误差 ϑ

有时为了计算上的方便，取各误差绝对值之和的平均值来表示误差，称为算术平均误差，即

$$\vartheta = \frac{\Sigma|x_i|}{n} \tag{1-16}$$

用残差 v_i 表示时，计算式为

$$\vartheta = \frac{\Sigma|v_i|}{\sqrt{n(n-1)}} \tag{1-17}$$

粗略地计算为

$$\vartheta = \frac{\Sigma|v_i|}{n} \tag{1-18}$$

ϑ 与 σ 之关系为

$$\vartheta = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma = 0.7979\sigma \tag{1-19}$$

上述几种表示误差的方法中，以标准偏差 σ 和极限误差 Δ 为最常用。

必须反复说明的是，上述计算所得的各种 σ、φ、Δ、ϑ 均是用来表示一组测量值的精确程度的，它并不是测量结果（通常可用这一组测量值的算术平均值 $\overline{X}$ 表示）的误差大小。

1.2.4 算术平均值 $\overline{X}$ 的随机误差的表示方法

在多次重复测量中，一组测量值的算术平均值 $\overline{X}$ 是接近于真值的。但当测量次数有限时，它与真值 A_0 还是存在着误差。怎样来估计这个误差呢？令 $\overline{X}$ 与 A_0 之差为 ζ，则

$$\overline{X} - A_0 = \zeta$$

或

$$A_0 = \overline{X} - \zeta$$

对一组测量值有

$$x_1 = X_1 - \overline{X} = X_1 - A_0 + \zeta = v_1 + \zeta$$
$$x_2 = X_2 - \overline{X} = X_2 - A_0 + \zeta = v_2 + \zeta$$
$$\vdots$$
$$x_n = X_n - \overline{X} = X_n - A_0 + \zeta = v_n + \zeta$$

将上式等号两边自乘方并求其总和，得

$$\Sigma x_i^2 = \Sigma(v_i + \zeta)^2$$
$$= \Sigma v_i^2 + 2\zeta\Sigma v_i + n\zeta^2$$

因为

$$\Sigma v_i = 0$$

所以

$$\Sigma x_i^2 = \Sigma v_i^2 + n\zeta^2 \tag{1-20}$$

即

$$\zeta^2 = \frac{\Sigma x_i - \Sigma v_i^2}{n}$$

又 $$\sigma^2=\frac{\Sigma x_i^2}{n}=\frac{\Sigma v_i^2}{n-1}$$

所以 $$\zeta^2=\frac{\Sigma v_i^2}{n-1}-\frac{\Sigma v_i^2}{n}=\frac{[n-(n-1)]\Sigma v_i^2}{n(n-1)}$$

$$=\frac{\Sigma v_i^2}{n(n-1)}$$

故 $$\zeta=\sqrt{\frac{\Sigma v_i^2}{n(n-1)}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{1-21}$$

由此可见，一组测量值的算术平均值 $\overline{X}$ 的绝对误差等于该组测量值的标准偏差 σ 的 $1/\sqrt{n}$。这个值也就是算术平均值 $\overline{X}$ 的标准偏差 S，即

$$S=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{\Sigma v_i^2}{n(n-1)}} \tag{1-22}$$

同理，对于算术平均值 $\overline{X}$ 也有

或然误差 $$R=\frac{\rho}{\sqrt{n}}=0.674\,5\sqrt{\frac{\Sigma v_i^2}{n(n-1)}} \tag{1-23}$$

算术平均误差 $$\theta=\frac{\vartheta}{\sqrt{n}}=0.797\,9\sqrt{\frac{\Sigma v_i^2}{n(n-1)}} \tag{1-24}$$

极限误差 $$\Delta=\pm 3S \qquad 或 \Delta=\pm 2S \tag{1-25}$$

按照上面这些计算，有可能对测量结果的误差作一估算，其表达方式为

$$X=\overline{X}\pm R \qquad (P=0.5)$$
$$X=\overline{X}\pm S \qquad (P=0.68)$$
$$X=\overline{X}\pm \Delta \qquad (P=0.95 或 P=0.997)$$

1.2.5 测量次数较少时随机误差的估计方法

显然，在1.2.1～1.2.4中所述的各种误差的估计方法，都是在误差分布为正态分布和测量次数 $n\to\infty$ 的情况下得出的结论。实际上，测量的次数总是有限的，而且除非极精密的测试，一般测量次数也不会很多。如何来估计测量次数较少时的随机误差呢？按概率论的论述，在测量次数较少时，已经不能从母体的大子样来推断误差的分布；而是要从少量测量所得的小子样来推断母体的误差分布。这时，仍然将误差分布视为正态分布也不符合实际情况，而应采取 t 分布的形式。t 分布本身是一个复杂的函数，这里不准备讨论它。但通过已有的计算可以提出：当测量次数 n 较少时，σ 的值按式（1-10）计算后，应再乘以系数 K_σ，即

$$\sigma=K_\sigma\sqrt{\frac{\Sigma v_i^2}{n-1}} \tag{1-26}$$

K_σ 的值如表1-1所示。

表1-1 K_σ 值表

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
K_σ	1.2533	1.1284	1.0854	1.0638	1.0509	1.0424	1.0362	1.0317	1.028[illegible]
n	15	20	25	30	40	50	100		
K_σ	1.0180	1.0132	1.0105	1.0087	1.0064	1.0051	1.0025		

从K_σ的数值可以看到，一般当测量次数$n\geqslant30$以后，σ如不再加以修正，其误差约在1/100以内；而当$n=10$时，误差约为3/100。所以一般测量以取$n\geqslant10$为宜；对于精密的测量，则取$n\geqslant30$。对于$n<10$的情况，在估计σ时可乘以相应的系数K_σ。

例 1-1

有一组测量值为237.4、237.2、237.9、237.1、238.1、237.5、237.4、237.6、237.6、237.4，试利用它说明测量值标准偏差与极限误差的概念，并计算测量结果及其误差。

解：

（1）将测量值列于例1-1表并计算其标准偏差与极限误差。

例1-1 表

序号	测量值 X_i	残差 v_i	v_i^2
1	237.4	−0.12	0.014
2	237.2	−0.32	0.10
3	237.9	0.38	0.14
4	237.1	−0.42	0.18
5	238.1	0.58	0.34
6	237.5	−0.02	0.00
7	237.4	−0.12	0.014
8	237.6	0.08	0.0064
9	237.6	0.08	0.0064
10	237.4	−0.12	0.014
	$\bar{X}=237.52$	$\Sigma v_i=0$	$\Sigma v_i^2=0.816$

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma v_i^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{0.816}{10-1}}\approx0.30$$

$$\Delta=\pm2\sigma=\pm2\times0.30=\pm0.60$$

说明：对照例1-1表中数值，$v_i<\pm0.30$者为6个，近乎68.3%的概率，$v_i>\pm0.60$者则没有，表明这组测量值的最大可能误差不超过±0.60的概率是95%。这些数据表明，计算结果与前述随机误差估计方法的意义是相符合的，只不过次数少，不那么明显就是了。当重复测量的次数多了，再比较结果就会发现，次数愈多，符合的程度愈大。

(2) 计算测量结果及其误差

测量结果即为测量值的算术平均值 $\bar{X}$。

$\bar{X}$ 的标准偏差为

$$S = \pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \pm\frac{0.30}{\sqrt{10}} = \pm 0.09487 \doteq \pm 0.09$$

$$\Delta = 2S = \pm 2\times 0.009 = \pm 0.18$$

故 $X = \bar{X} \pm S = 237.52 \pm 0.09 \quad (P = 0.68)$

或 $X = \bar{X} \pm \Delta = 237.52 \pm 0.18 \quad (P = 0.95)$

1.3 函数测量随机误差的估计

1.3.1 函数测量及其误差

如所求之未知量与各被测参量之间具有一定的函数关系，并需利用该函数关系计算出测量结果，这种情况称为函数测量，其表达式为

$$X = f(z_1, z_2, \cdots, z_m) \tag{1-27}$$

式中：X——未知量；

$z_1, z_2, \cdots, z_m$——各被测参量。

简单者如电工测量中有 $R = V/I$ 的关系式，测试其中的两个参数，如电压 V 和电流 I，便可利用算式求出第三个参数电阻 R 的数值。又如串联时，总电阻 R 等于各分电阻 R_i 之和

$$R = R_1 + R_2 + \cdots + R_n \tag{1-28}$$

并联时，总电阻 R 的倒数为各分电阻 R_i 倒数的和

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n} \tag{1-29}$$

这些都是函数测量的例子。

由于函数测量中未知量 X 是由各被测量的测量值 z_i 计算出来的，而这些被测参量又各有其误差 dz_i，所以由计算得出的未知量的测量结果是应含有各被测参量的误差的，也就是说被测参量各自的误差应按一定的关系形成测量结果的误差。这样，测量结果的表达式应为

$$X \pm dx = f(z_1 \pm dz_1, z_2 \pm dz_2, \cdots, z_m \pm dz_m) \tag{1-30}$$

为了叙述方便，将用符号 f 代替函数 $f(z_1, z_2, \cdots, z_m)$。

被测参量值与函数值的误差和标准偏差的符号如表 1-2 所示。

表 1-2 被测参量值与函数值的误差和标准偏差

	被测参量值 z_i	函数值 X
误差	dz_i	dx
标准偏差	$\sigma^2_{z_i} = \frac{\Sigma dz^2_{ij}}{n}$	$E = \frac{\Sigma dx^2_j}{n}$

1.3.2 两个相互独立被测参量的函数误差

如果两个被测参量 z_1、z_2 对函数是相互独立的，则有

$$X = f(z_1, z_2) \tag{1-31}$$

考虑到误差，有

$$X \pm dx = f(z_1 \pm dz_1, z_2 \pm dz_2)$$

上式可按泰勒级数展开，略其二阶及二阶以上无穷小量后可得

$$dx = \frac{\partial f(z_1, z_2)}{\partial z_1} dz_1 + \frac{\partial f(z_1, z_2)}{\partial z_2} dz_2$$

$$= \frac{\partial f}{\partial z_1} dz_1 + \frac{\partial f}{\partial z_2} dz_2 \tag{1-32}$$

下面对误差 dx 的计算方法加以讨论：

(1) 误差 dx 如取极限值，即应取各分误差绝对值之和，称为极限误差 Δ_x，有

$$\Delta_x = \left|\frac{\partial f}{\partial z_1} dz_1\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial z_2} dz_2\right| \tag{1-33}$$

(2) 误差 dx 如取相对值，称为相对误差 η_x，有

$$\eta_x = \frac{dx}{X} = \frac{\frac{\partial f}{\partial z_1} dz_1 + \frac{\partial f}{\partial z_2} dz_2}{f(z_1, z_2)} = \frac{df(z_1, z_2)}{f(z_1, z_2)} = d\ln f(z_1, z_2) \tag{1-34}$$

(3) 误差 dx 如取标准偏差 E，则在多次重复测量中有

$$dx_1 = \frac{\partial f}{\partial z_1} dz_{11} + \frac{\partial f}{\partial z_2} dz_{21}$$

$$dx_2 = \frac{\partial f}{\partial z_2} dz_{12} + \frac{\partial f}{\partial z_2} dz_{22}$$

$$\vdots$$

$$dx_n = \frac{\partial f}{\partial z_1} dz_{1n} + \frac{\partial f}{\partial z_2} dz_{2n}$$

将各等式自乘后，进行同项相加并除以测量次数 n，注意到当 $n \to \infty$ 时，$\Sigma dz_{1j} dz_{2j} = 0$，则有

$$\frac{\Sigma dx_j^2}{n} = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)^2 \Sigma dz_{1j}^2}{n} + \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial z_2}\right)^2 \Sigma dz_{2j}^2}{n}$$

亦即

$$E^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)^2 \sigma_{z1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z_2}\right)^2 \sigma_{z2}^2 \tag{1-35}$$

1.3.3 任意个相互独立被测参量的函数误差

对于任意个相互独立的被测参量的函数关系有

$$X = f(z_1, z_2, \cdots, z_m)$$

引用 1.3.2 的结论，上式中的函数误差表示为