

✓  
高等学校教学用书

# 金属塑性加工原理

冶金工业出版社

高等学校教学用书

# 金属塑性加工原理

中南矿冶学院 曹乃光主编

冶金工业出版社

高等学校教学用书

**金属塑性加工原理**

中南矿冶学院 曹乃光 主编

\*

冶金工业出版社出版

(北京灯市口74号)

新华书店北京发行所发行

冶金工业出版社印刷厂印刷

\*

787×1092 1/16 印张 19 字数 453 千字

1983年6月第一版 1983年6月第一次印刷

印数 00,001~6,000册

统一书号: 15062·3980 定价1.95元

## 前 言

本书是根据金属压力加工专业教学计划和金属塑性加工原理课程教学大纲并参阅有关资料编写的。书中包括金属塑性加工力学与金属塑性加工物理学两方面内容，较系统地阐述了该课程所必需的基本理论与实际知识，其中包括：应力变形理论，金属塑性变形的微观机构与宏观规律，摩擦与润滑，金属的塑性与变形抗力，塑性加工中变形力的计算理论，以及计算变形力的理论法、工程法、滑移线法、上限法等各种方法与实例，并对塑性变形时金属组织性能变化的一些规律，作了较详细的介绍。

本书共分十二章，第一、二、三、四、五、十二章及第八章第四节由曹乃光执笔，第六、七章由钟春生执笔，第九、十、十一章及第八章一、二、三、五节由陈家民执笔，全书由曹乃光统一整理。

由于我们水平所限，书中一定还有许多错误和不妥之处，诚恳地欢迎读者批评指正。

编 者

1982.9.

# 目 录

<b>第一章 应力变形理论</b> .....	1
第一节 应力状态.....	1
第二节 主应力图.....	8
第三节 特征面应力.....	12
第四节 应力张量的分解.....	16
第五节 变形状态.....	17
第六节 变形速度.....	27
第七节 弹性应力与变形之间的关系——广义弹性定律.....	28
第八节 弹性理论问题解法简介.....	31
第九节 塑性变形算式.....	33
第十节 变形体模型.....	36
<b>第二章 塑性变形物理过程</b> .....	38
第一节 金属的变形过程.....	38
第二节 金属单晶体塑性变形机构.....	39
第三节 位错的基本概念.....	45
第四节 位错的弹性性质.....	55
第五节 位错的增殖.....	59
第六节 堆垛层错与位错反应.....	62
第七节 加工硬化（形变硬化）.....	68
第八节 金属的塑性变形.....	69
第九节 变形机构图解.....	75
<b>第三章 塑性变形对金属组织性能的影响</b> .....	80
第一节 冷热变形的概念.....	80
第二节 冷变形对金属组织性能的影响.....	82
第三节 热变形对金属组织性能的影响.....	92
第四节 塑性变形对固态相变的影响.....	97
第五节 形变热处理.....	100
<b>第四章 外摩擦与润滑</b> .....	109
第一节 金属塑性加工时外摩擦的特点与作用.....	109
第二节 摩擦定理.....	112
第三节 润滑剂.....	116
第四节 测定常摩擦系数的方法.....	123
<b>第五章 不均匀变形</b> .....	127
第一节 基本概念.....	127
第二节 变形不均匀的原因与后果.....	131
第三节 残余应力.....	136

第四节	实验应力分析法简介	140
<b>第六章</b>	<b>塑性与断裂</b>	146
第一节	塑性的基本概念	146
第二节	断裂	147
第三节	影响金属塑性的因素	153
第四节	塑性指标与塑性状态图	164
第五节	超塑性	167
<b>第七章</b>	<b>变形抗力</b>	175
第一节	基本概念	175
第二节	影响变形抗力的因素	176
第三节	硬化曲线	184
第四节	变形抗力数学表达式的建立方法	188
<b>第八章</b>	<b>变形力计算理论基础</b>	193
第一节	塑性条件	193
第二节	微分平衡方程	197
第三节	平面变形与轴对称问题	204
第四节	塑性应力变形关系	206
第五节	以面投影代替力投影法则	211
<b>第九章</b>	<b>微分平衡方程与塑性条件联解</b>	213
第一节	概述	213
第二节	无限长矩形板镦粗的理论解	213
第三节	圆柱体镦粗力的近似理论解	217
<b>第十章</b>	<b>工程法</b>	226
第一节	工程法简介	226
第二节	圆柱体镦粗力计算公式	227
第三节	平辊轧制力计算公式	232
第四节	挤压力计算公式	245
第五节	拉伸力计算公式	254
第六节	冲压力计算公式	270
<b>第十一章</b>	<b>滑移线法</b>	272
第一节	基本概念	272
第二节	Hencky应力方程	272
第三节	滑移线场的几何性质	275
第四节	滑移线法的应用	277
第五节	滑移线网的作图法	282
<b>第十二章</b>	<b>计算变形力的其它方法</b>	285
第一节	上限法及下限法	285
第二节	功的平衡法	294
<b>参考书目</b>		297

# 第一章 应力变形理论

## 第一节 应力状态

### 一、应力状态的基本概念

在一定条件下，要使物体变形，必需施加一定的力。作用于物体上的力有两种类型，体积力（质量力）及表面力（外力），它们皆可使物体在一定的情况中产生弹性变形或塑性变形。但对大多数金属塑性加工操作来说，金属塑性变形是由表面力来完成的，体积力与表面力相比较，在塑性变形过程中所起的作用小，故一般略而不计。

#### 1. 外力

平锤下镦粗时，圆柱体试件受上、下锤头力的作用而产生高度减小断面扩大如图1-1a

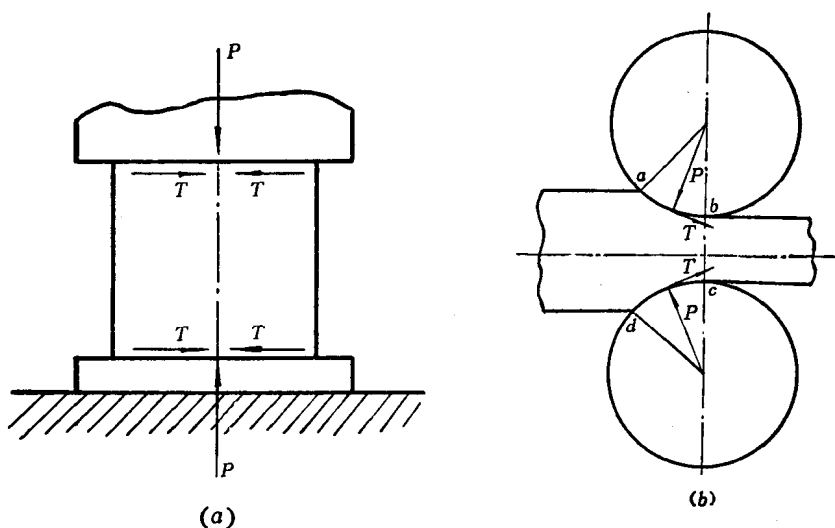


图 1-1 镦粗及轧制时的外力图

(a)镦粗；(b)轧制

所示。锤头力 $P$ 是使柱体产生变形的有效作用力。由于锤头表面在横向上没有运动，而金属与工具接触处是相对运动的，这就产生了阻碍柱体断面扩大的摩擦力。图1-1b为平辊间的轧制，轧辊沿径向对轧件施加压力 $P$ ，使其高度减小。为了使轧件能进入逐渐缩小的辊缝，在轧辊与金属接触表面之间也存在摩擦力，它的作用是将轧件曳入两个轧辊之间以实



现轧制过程。

可见，使金属发生塑性变形的表面力，有垂直于接触表面的作用力与沿着表面作用的摩擦力。镦粗时，摩擦力妨碍柱体断面的扩大，是无效力；轧制时，摩擦力是实现轧件变形所必需的有效力之一。

## 2. 应力

变形物体受到外力作用时、内部要出现内力与外力平衡，故寻求变形力的平衡条件，不仅有作用于整个物体上外力的平衡条件，而且需要物体每个无穷小单元也处于平衡。变形物体的平衡条件具有微分性质，即意味着研究物体变形时力的情况，还需要了解物体内部的应力情况。内力的强度称为应力。物体内部出现应力，称物体处于应力状态之中。

为研究应力情况，需引入变形区的概念。在金属塑性加工时，所谓变形区，是指那些受工具直接作用的，金属坯料上正在产生塑性变形的那部分体积。如图1-1a所示，镦粗时金属整体全部在工具直接作用下发生变形，整块金属都处于变形区内，任意瞬间的变形都遍及全体。轧制则不然，每瞬间的变形只发生在其纵向上的一小段中，如图1-1b中abcd所包围的部分。变形区前面部分，变形已完毕，后面部分则尚未经受变形，这些部分又称为刚端。所谓刚端（或外区）是指变形过程的任意瞬间、金属坯料上不发生塑性变形的那部分金属体积。

从变形区内取出一个小体积，如图1-2a所示，当其处于平衡状态时，作用着 $P_1, P_2, P_3, \dots$ 诸力。若截去B部分，为了保持与A部分的平衡，则截面上一定有一合力 $P$ 如图1-2b所示，在截面的任一微小面素 $\Delta F$ 上，在 $P$ 力方向有 $\Delta P$ 力，那么

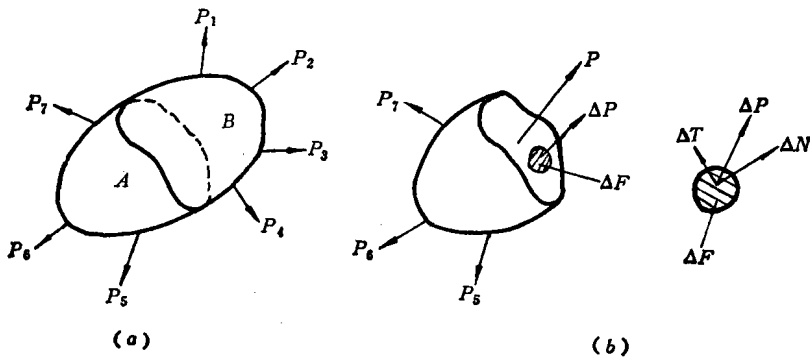


图 1-2 微小面素上作用力

$$\lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta F}$$

定义为面素上的全应力。 $\Delta P$ 对 $\Delta F$ 而言，可分解为垂直分量（法线分量） $\Delta N$ 及切线分量 $\Delta T$ ，可得出

$$\sigma = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta F} \quad \tau = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta F}$$

$\sigma$ 及 $\tau$ 即面素 $\Delta F$ 上的垂直应力（正应力）及切线应力（切应力）。

在外力（或其它外界条件）作用下，物体内部出现应力，可由晶体结构的特性来说



明。

已知金属为结晶体，其内部原子是按一定的结晶点阵（或晶格）而规则排列的。在自然状态中，原子间相互位置一定，如图1-3所示，可取双原子来表示，二者间距离为  $r_0$ 。从原子间相互作用力的曲线来看，原子间距等于  $r_0$  时，其相互间的作用力  $P(r_0)$  等于零，原子处于稳定平衡状态。当原子因某种原因而作微小位移  $\delta r$  时，原子间的距离将发生变化。当  $r_0 + \delta r > r_0$ ，原子彼此离开，这时在两原子间将出现力图使原子恢复到原来位置的吸引力，此力与位移  $\delta r$  在一定范围内是成比例的。当  $r_0 + \delta r < r_0$ ，亦即原子彼此靠近，这时在原子间将出现力图迫使原子离开，并恢复到原来位置的斥力，此力在一定范围内也与位移  $\delta r$  成比例。可见，当晶体受到外界力的作用时，原子间距要发生改变，但原子间的相互作用力又力求使原子恢复到原来的位置。这样，在晶体内部出现应力，即物体受外力作用时内部出现应力。应力的存在，表征原子偏离了稳定平衡位置、而原子又有力求恢复到稳定平衡状态的趋势。从宏观上看，该物体是处在弹性变形之中。假若这时去除外力，原子因其相互间力的作用又能恢复到原来的稳定平衡位置，内部的力也消失。当物体内部存在应力，原子偏离了稳定平衡状态而处于弹性变形状态时，则称物体处于应力状态（显然，造成应力状态的内、外原因消失后，物体的应力状态也即消失）。当外力所造成物体内部的应力数值达到一定大小时，物体将发生塑性变形而松弛一部分的力。可见，应力与变形有着紧密联系，而且在弹性变形阶段两者的关系是线性的。

### 3. 应力状态

设均匀圆杆的一端固定，另一端受拉力  $P$  的作用，图1-4a所示圆杆的截面积为  $F$ ，则

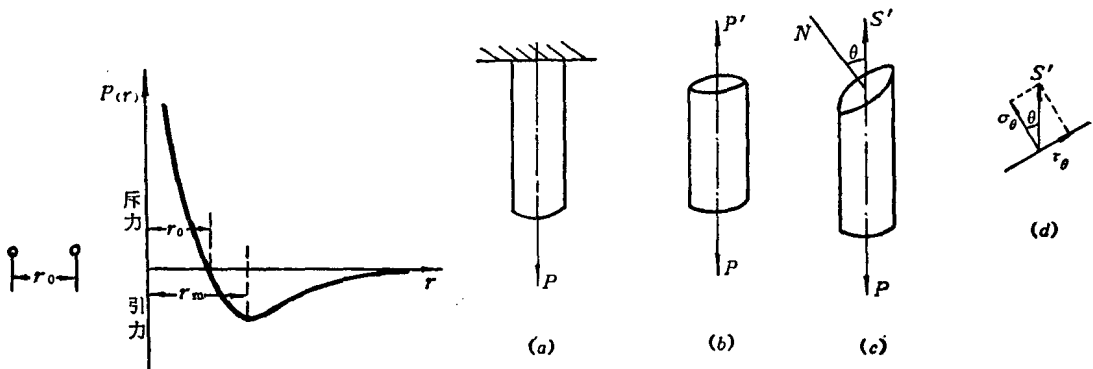


图 1-3 双原子间的作用力曲线

图 1-4 简单拉伸下应力的确定图

$F$  的单元面积上的拉力为  $P/F$ 。若垂直拉力轴向断面上的应力不变，由于  $P' = P$ ，图1-4 b 所示，该断面上的法线应力  $\sigma = \frac{P}{F}$ 。若所取截面的法线与拉力轴向成  $\theta$  角，如图1-4c 所示，拉力的作用在该面上出现的力为  $S'$ ，并且

$$S' = \frac{P}{F/\cos\theta} = \frac{P\cos\theta}{F}$$

若将  $S'$  分解为垂直该面的法线分量  $\sigma_\theta$  及作用该面上的切线分量  $\tau_\theta$  如图1-4d 所示，则它们分别为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\theta} &= \frac{P \cos^2 \theta}{F} = \sigma \cos^2 \theta \\ \tau_{\theta} &= \frac{P \cos \theta \sin \theta}{F} = \sigma \cos \theta \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (1-1)$$

式中  $\sigma_{\theta}$ ——该面的法线应力（正应力）；

$\tau_{\theta}$ ——切线应力（剪应力，切应力）。

由上述两种情况可以看出，即使物体的力学状态相同，若所考察的面的位置发生变化，应力状态的表示方法也变化。若以拉伸轴为法线的平面的应力状态  $(\sigma, 0)$  已知，则法线与拉伸轴成  $\theta$  角的平面上的应力状态  $(\sigma_{\theta}, \tau_{\theta})$  与  $(\sigma, 0)$  之间存在公式 (1-1) 的关系。

## 二、点应力状态

要研究物体变形时的应力状态，首先必需了解物体内任意一点的应力状态，才可推断整个变形物体的应力状态。

点的应力状态，是指物体内任意一点附近不同方位上所承受的应力情况。

### 1. 点应力状态的描述方法

在变形区内某点附近取一无限小的单元六面体，在其每个界面上都作用着一个全应力。设单元体很小，可视为一点，故对称面上的应力是相等的，只需在三个可见的面上画出全应力，如图1-5a所示。将全应力按取定坐标轴向进行分解（注意，这里单元体的六个边界面均与对应的坐标面平行），每个全应力能分解为一个法线应力（正应力）和两个切线应力，如图1-5b所示。

$\sigma$  表示法线应力， $\sigma_x$  为垂直于  $x$  轴的坐标面  $yoz$  上的法线应力， $\sigma_y$  为垂直于  $y$  轴的坐标面  $xoz$  上的法线应力， $\sigma_z$  为  $xoy$  面上的，当法线应力的方向与所作用平面的外法线方向一致时，规定该法线应力为正（+），反之为负（-）。

$\tau$  表示切线应力，在  $yoz$  面上，有  $\tau_{xy}$  及  $\tau_{xz}$ ，分别表示指向  $y$  方向及  $z$  方向的切应力，对其它面，也存在  $\tau_{yz}$ ， $\tau_{yx}$  及  $\tau_{zx}$ ， $\tau_{zy}$  等。

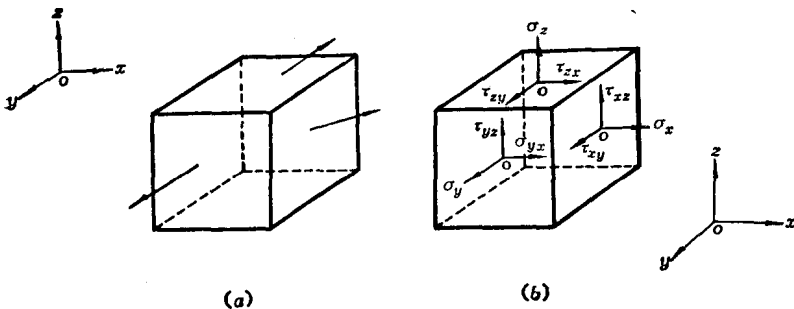


图 1-5 单元六面体上作用应力图

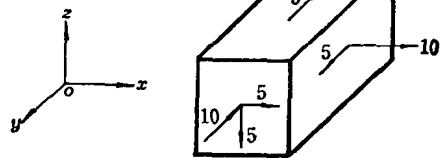


图 1-6 点应力状态分量图

当切应力所在平面外法线方向与所取坐标轴正向一致，而且切应力本身所指方向又和与其平行的坐标轴正向一致时，此切应力为正；如果其中的一个方向相反，则为负；若两个方向皆相反，亦为正。

例如某点应力状态各分量为： $\sigma_x = 10$  公斤/毫米<sup>2</sup>， $\sigma_y = -10$  公斤/毫米<sup>2</sup>， $\sigma_z = 0$ ； $\tau_{xy} =$

5公斤/毫米<sup>2</sup>,  $\tau_{yx}=5$ 公斤/毫米<sup>2</sup>,  $\tau_{zy}=-5$ 公斤/毫米<sup>2</sup>,  $\tau_{yz}=-5$ 公斤/毫米<sup>2</sup>,  $\tau_{zx}=\tau_{xz}=0$ ; 则此应力状态如图1-6所示。

可见, 任意点的应力状态完全可以由三个法线应力 $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ 、 $\sigma_z$ 及六个切线应力 $\tau_{xy}$ 、 $\tau_{yx}$ 、 $\tau_{yz}$ 、 $\tau_{zy}$ 、 $\tau_{zx}$ 、 $\tau_{xz}$ 表示如图1-5, 也可用下列应力状态张量来描述

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

上述两种表示方法, 各名为应力状态图及应力状态张量, 因为它们都表示沿相应坐标轴的方向上无应力分量及应力方向的图形概念。

可以证明, 当小单元体没有转动时, 存在 $\tau_{xy}=\tau_{yx}$ ,  $\tau_{zx}=\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}=\tau_{zy}$ , 这样, 任意点的应力状态可以用六个分量描述

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \bullet & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \bullet & \bullet & \sigma_z \end{pmatrix}$$

式中 “ $\bullet$ ” 所代表的项与位置对称的项相等。

## 2. 一点应力状态的数学表达式

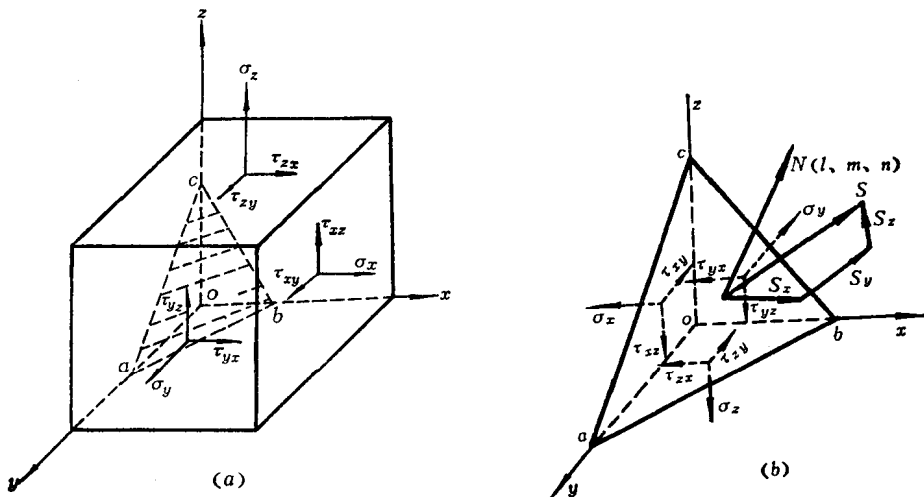


图 1-7 点应力状态分析图

(a)截取单元四面体的位置; (b)单元四面体上的应力

若在六面体的一角, 沿微分面 $abc$ 截割, 则得图1-7b所示的小四面体。为了与三个坐标面上的应力平衡, 微分斜面 $abc$ 上应出现全应力 $S$ 。设斜面法线 $N$ 与坐标轴 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 的夹角为 $\alpha_x$ 、 $\alpha_y$ 、 $\alpha_z$ , 且令各夹角的余弦值为

$$\left. \begin{aligned} \cos\alpha_x &= l \\ \cos\alpha_y &= m \\ \cos\alpha_z &= n \end{aligned} \right\}$$

为简化,设斜面 $abc$ 的面积为一个单位,则四面体其它三个坐标平面 $oac$ 、 $obc$ 、 $oab$ 的面积,分别为 $l$ 、 $m$ 、 $n$ 。

现求四面体斜面上的应力,与另外三个坐标平面上应力间的关系式。

全应力 $S$ 可分解为 $S_x$ 、 $S_y$ 、 $S_z$ 三分量,显然

$$S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 \quad (1-2)$$

当四面体处于平衡状态时,各轴向上应力分量之和应等于零,故得

$$\left. \begin{aligned} S_x &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \\ S_y &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n \\ S_z &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \end{aligned} \right\} \quad (1-3)$$

上式也可写成下列矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{Bmatrix} \quad (1-4)$$

斜面上的法线应力及切应力 $\sigma_N$ 和 $\tau_N$ 计算式为

$$\sigma_N = S_x l + S_y m + S_z n$$

将(1-3)式的 $S_x$ 、 $S_y$ 、 $S_z$ 值代入上式,并注意到 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ 、 $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ 、 $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ ,则

$$\sigma_N = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2(\tau_{xy} lm + \tau_{yz} mn + \tau_{xz} nl) \quad (1-5)$$

因为

$$S^2 = \sigma_N^2 + \tau_N^2 \quad \text{而} \quad S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$$

所以

$$\tau_N = \sqrt{S^2 - \sigma_N^2} = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 - \sigma_N^2} \quad (1-6)$$

从以上各式可见,单元四面体坐标系中三个互相垂直平面上的应力,可用来确定任意斜面上的应力,只要该面的方位已经确定。若变形体内某点三个互相垂直面上的应力已知时,则该点处的应力状态即可完全确定,因为法线应力 $\sigma_N$ 及切线应力 $\tau_N$ ,完全可以表示该点的应力情况;因之,物体的应力情况可用互相垂直的三平面上的应力分量描述。

如果斜面 $abc$ 为物体边界面,则 $S_x$ 、 $S_y$ 、 $S_z$ 应等于物体表面任一点的分布力集度 $P$ 在 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 轴向的分量,这时(1-4)式成为

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \\ P_y &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n \\ P_z &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \end{aligned} \right\} \quad (1-7)$$

表示了物体表面上的外力与物体内力的关系。因为处于边界,所以这个关系又称为边界条件。

### 三、一点附近应力的微分平衡方程

在直角坐标系中,设 $c$ 点的坐标为 $x$ 、 $y$ 、 $z$ ,那么 $c$ 点的应力情况可用下列应力张量描述

$$\sigma_{ij} c = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

设 $c'$ 点的坐标为 $x+dx$ 、 $y+dy$ 、 $z+dz$ ,因之 $c'$ 点的应力状态与 $c$ 点不同,用下列

### 张量表达

$$\sigma_{i,j} c' = \begin{pmatrix} \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx & \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy & \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz \\ \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dx & \sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy & \tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} dz \\ \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} dx & \tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} dy & \sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz \end{pmatrix}$$

过  $c$  及  $c'$  点, 各作三个互相垂直且与坐标面平行的平面, 在空间构成一个平行六面体, 其棱边尺寸对应为  $dx, dy, dz$ , 各个面上作用着相应的应力分量, 如图1-8所示。

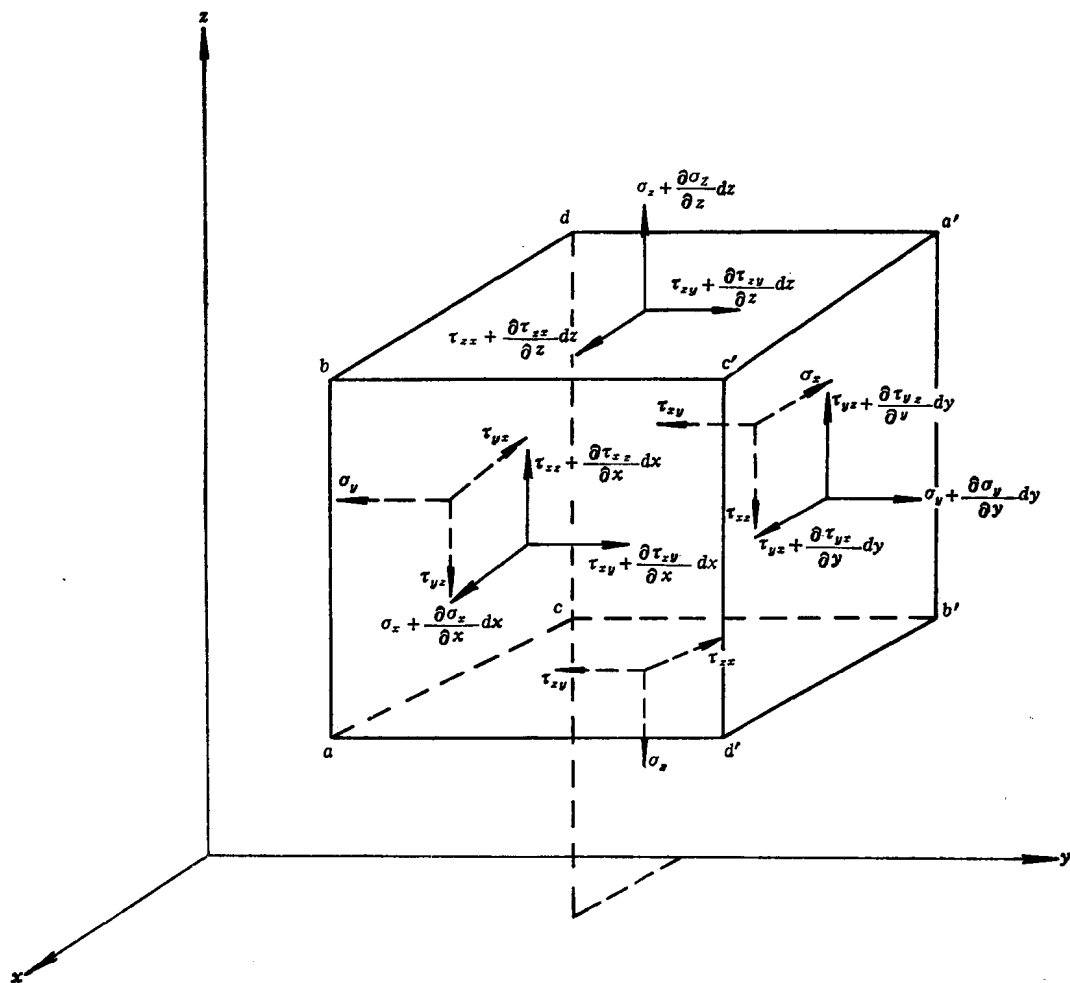


图 1-8 一点附近的应力平衡

设此单元体处于平衡, 则必需满足

$$\Sigma x = \Sigma y = \Sigma z = 0$$

这样得到直角坐标系下的微分平衡方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-8)$$

因切应力互等，该方程组含有6个未知数，因此要解上列方程，需补充其它方程（关于此组方程的详细分析与推导，将在第八章中讨论）。

## 第二节 主应力图

### 一、主应力、应力张量的不变量

过一点可作无数微分面，其中的一组面上，只有法线应力而无切应力，这种面称为主微分面或主平面，其上的法线应力即全应力并称为主应力，面的法向则为应力主轴。

如果微分面 $abc$ （图1-7）为主微分面，以 $\sigma$ 表示主应力，则 $\sigma$ 在各坐标轴上的投影为

$$S_x = \sigma l \quad S_y = \sigma m \quad S_z = \sigma n$$

代入(1-3)式得

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma)l + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n &= 0 \\ \tau_{xy}l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{zy}n &= 0 \\ \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + (\sigma_z - \sigma)n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-9)$$

各方向余弦间存在下式关系：

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad (1-10)$$

可由上列四个方程来求解 $\sigma$ 、 $l$ 、 $m$ 、 $n$ 。齐次方程(1-9)式不能有 $l=m=n=0$ 这样的解答，因这与(1-10)式相抵触。要方程组(1-9)式有非零解，则必须取这个方程组系数的行列式等于零

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma) \end{vmatrix} = 0$$

将行列式展开，得一个含 $\sigma$ 的三次方程

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0$$

式中

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ I_2 &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 \\ I_3 &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 \\ &\quad - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 \end{aligned} \right\} \quad (1-11)$$

上列 $\sigma$ 的三次方程称为这个应力状态的特征方程，它有三个实根 $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 、 $\sigma_3$ ，即所求主应力。

将主应力 $\sigma_1$ 的值代入(1-9)式的任何两个，将这两个方程与式(1-10)联立，解出对应于 $\sigma_1$ 的应力主轴的方向余弦 $l_1$ 、 $m_1$ 、 $n_1$ 。同样也可求得分别对应于 $\sigma_2$ 及 $\sigma_3$ 的方向余弦 $l_2$ 、 $m_2$ 、 $n_2$ 及 $l_3$ 、 $m_3$ 、 $n_3$ 。

可以证明三个主应力作用的微分面是相互垂直的，而且 $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 、 $\sigma_3$ 是实根。

如果应力主轴与坐标轴方向相同，则与坐标面平行的微分平面即主微分面，在这些面上分别作用着主应力 $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 、 $\sigma_3$ （图1-9）。这时，任意微分面上的全应力为

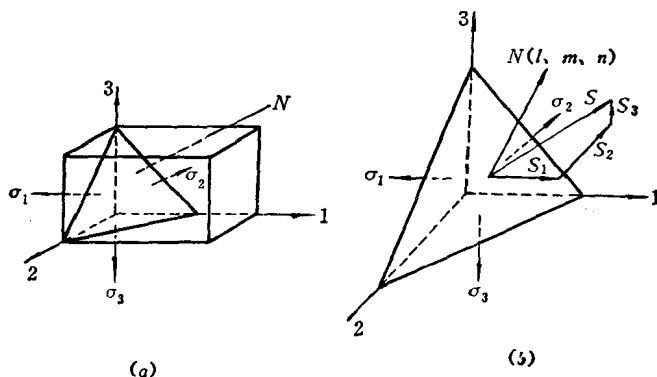


图 1-9 主坐标系中任意微分面上的应力

$$S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 \quad (1-12)$$

正应力  $\sigma_N = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2 \quad (1-13)$

切应力  $\tau_N = \sqrt{S^2 - \sigma_N^2} = \sqrt{\sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 - (\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2)^2} \quad (1-14)$

按照正应力

$$\sigma_N = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2$$

根据

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

上式可写成

$$\sigma_N = \sigma_1 - (\sigma_1 - \sigma_2)m^2 - (\sigma_1 - \sigma_3)n^2$$

或

$$\sigma_N = (\sigma_1 - \sigma_3)l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2 + \sigma_3$$

如果将三个主应力数值规定为 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ，从前式得 $\sigma_N \leq \sigma_1$ ，从后式得 $\sigma_N \geq \sigma_3$ ，因此

$$\sigma_1 \geq \sigma_N \geq \sigma_3$$

可见，通过一点的所有微分面上的正应力中，最大和最小的是主应力。

在给定的外力作用下，物体中任一点的主应力数值与方向即已确定，而与坐标系的选择无关（尽管应力分量 $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ …… $\tau_{xy}$ 等随坐标系而改变），所以应力状态特征方程的根应与所选取的坐标系无关。因此这个方程的系数也应与所选取的坐标系无关，式（1-11）中的三个量 $I_1$ 、 $I_2$ 、 $I_3$ 是坐标变换时的一些不变量，称应力张量的不变量。第一不变量 $I_1$ 说明通过物体中任一点，三个互相垂直的微分面上的正应力之和是常数，也等于该点的三个主应力之和。

## 二、应力椭球面

如果物体任一点的主应力已知，可用另一种几何方法来表达一点的应力状态。使坐标面与一点的主微分面重合，则在这些微分面上没有切应力，而只有主应力

$$\sigma_x = \sigma_1 \quad \sigma_y = \sigma_2 \quad \sigma_z = \sigma_3$$

(1-3) 式可化简为

$$S_x = \sigma_1 l \quad S_y = \sigma_2 m \quad S_z = \sigma_3 n$$

从所考察的点 $o$ ，作矢量 $oP$ 与外法线为 $N$ 的微分面上的全应力相等（图1-10），这个矢量末端的坐标为



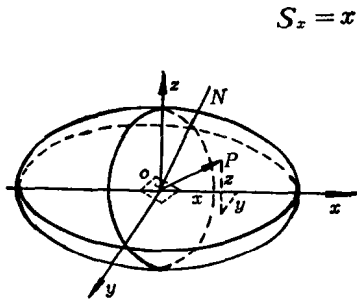


图 1-10 应力椭球面

$$S_x = x$$

$$S_y = y$$

$$S_z = z$$

当微分面的方向变化时，点P将画成一个椭球面。

根据上列关系，得

$$x = \sigma_1 l$$

$$y = \sigma_2 m$$

$$z = \sigma_3 n$$

因为

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

可得出

$$\frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2} + \frac{z^2}{\sigma_3^2} = 1$$

这是椭球面的方程，其半径（半轴）的长度分别等于主应力  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 、 $\sigma_3$  的值。这个椭球面称为应力椭球面。

如两个主应力相等，例如  $\sigma_1 = \sigma_2$ ，应力椭球面变为回转椭球面，则该点的应力状态对于主轴  $oz$  是对称的。

如果三个主应力都相等， $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ ，应力曲面变为圆球面，则通过该点的任一微分面均为主微分面，而作用于其上的应力都相等。

### 三、主应力图

在一定的应力状态的条件下，变形物体内任意点存在着互相垂直的三个主平面及主应力轴。为了简化以后的分析，在金属塑性变形理论中多采用主坐标系，这时应力张量可写成

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

金属塑性加工时，变形体的轮廓多为规则的几何形状，变形区的体积也多属对称图形，作为一级近似，可采用物体主轴作为分析物体应力状态的主轴，这样可以很简便地使用主应力图来分析许多实际问题。

所谓主应力图，是表示所研究点（或所研究物体某部分）各主轴方向上，有无主应力及主应力性质的定性图形，它可简单而明晰地描述物体变形时所承受的应力状态的型式。

从一个轴向看，所能产生的主应力不外拉力及压力两种，结合各种具体情况进行分析，可得出图1-11所示的九种可能有的主应力图。其中，线应力状态两种，面应力状态三种、体应力状态则有四种。

由大量实践明确，在金属塑性变形过程中，拉应力最易导致材料的破坏，压应力则有利于减少或抑制破坏的发生与发展。为以后应用方便起见，可以把九种主应力图按其有利程度作如图1-11所示的排列，并用“+”号表示拉应力，“-”号表示压应力。

金属塑性加工操作中遇到最多的是体应力状态的图形。如平辊间的板材轧制、平锤下的锻造、通过模孔的挤压，都可以用  $B_1$  图形来描述变形区内的应力状态。

由于许多金属塑性加工过程是连续进行的，变形物体为一个完整体，变形区内外的金

属体积是相互联系的，因而互为影响。在今后研究有关问题时，特别是变形问题，应注意不要脱离它们之间的联系来分析发生于整个变形过程中的有关现象。

主应力图是金属塑性加工理论中，用来分析金属受力情况，以及因之所产生的一些后果时最常用的工具之一。

下面对各种应力状态加以分析。

在体应力状态图中，应力符号相同的 ( $B_1$  及  $B_4$ ) 称为同号图，应力符号不相同的 ( $B_2$  及  $B_3$ ) 称为异号图。在同号图  $B_1$  中，若三个主应力相等，即  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ 。（这相当于三向均匀压缩）时，若金属内部没有空隙、疏松和其它缺陷，则由于不可能产生滑移（完全没有自由度），从理论上讲是不可能发生塑性变形的；但是三向均匀压缩，由于可迫使金属内部缝隙的贴紧（也可加强晶间的联系）、特别是在高温下，借助原子的扩散，可消除裂缝等内部缺陷，有利于提高金属的强度和塑性性能。这种三向相等的压缩应力，一般称为静水压力。静水压力值的大小，可用来判别某个实际的  $B_i$  图形——某个具体的金属塑性加工过程的优越性。

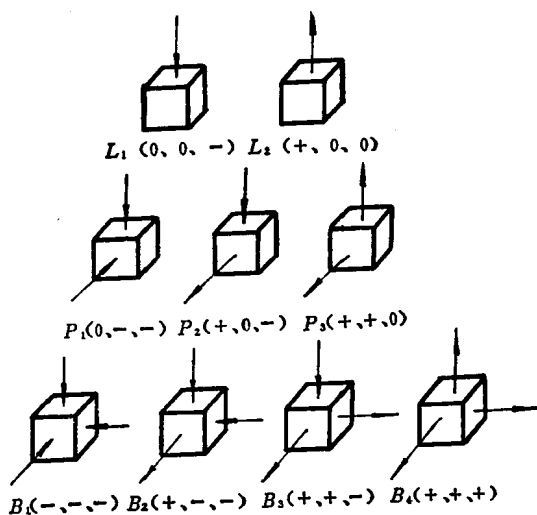


图 1-11 九种主应力图

从金属塑性加工的观点来看，要使金属发生塑性变形，不可能采用  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  的  $B_1$  图形，即直接应用纯静水压力式的应力状态（要特别指出，这里讨论的问题是实体金属加工的情况，并不是研究粉末冶金技术方面的问题，对粉末制品，可以直接采用液体静压成型），但是可以人为地利用近乎静水压力型应力状态的优点来提高塑性变形过程的效果。挤压法，在模型中的封闭锻造等，都可近似地认为是运用了静水压力优点的塑性变形过程，因为将变形金属置于几乎封闭的挤压筒中而强制其变形时，金属是处于很强烈的三向不相等的压缩应力状态之中，其静水压力强度相当高。

在金属塑性变形理论中，用

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

来表示体应力状态下的平均应力（平均应力  $\bar{\sigma}$  的物理意义，下节将进一步讨论）。如果平均应力为压缩应力，则

$$|\bar{\sigma}| = -\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

那么这个平均应力的绝对值就称为静水压力。挤压法与轧制法相比，挤压时的静水压力值要大得多。许多塑性较低的金属和合金，在相同情况下，用轧制法成型难度较大，甚至不能成型，但可采用挤压法来加工。

一般静水压力的强度越大，一次加工所能获得的变形程度也越大，甚至像脆性很高的砂岩和大理石等，当在近乎液体静压条件下进行压缩时，也可获得相当高的变形程度。