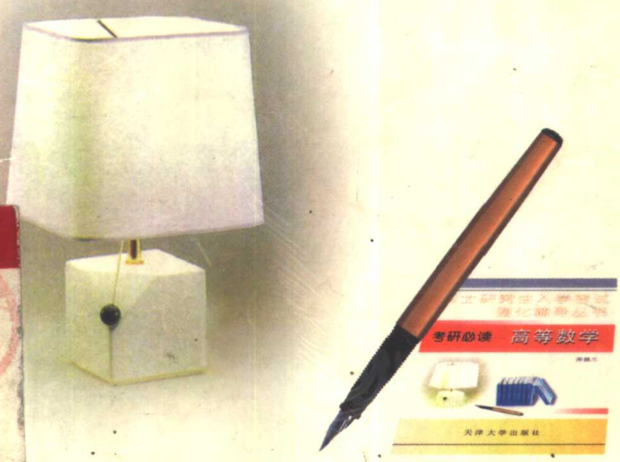
硕士研究生入学考试强化辅导丛书

考研必读——高等数学

齐植兰



天津大学出版社

内容提要

本书内容包括函数、极限、连续，一元函数微分学，一元函数积分学，向量代数与空间解析几何，多元函数微分学，多元函数积分学，无穷级数，常微分方程共八章，每章包括考试内容与要求，基本内容与例题分析两部分，例题中多数是历届研究生的入学试题. 在附录中还给出了1997年至2000年全国工学、经济学硕士研究生入学试题及各章练习题的答案，供读者参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学：考研必读/齐植兰编.—天津：天津大学出版社，2000.5
(硕士研究生入学考试强化辅导丛书)
ISBN 7-5618-1288-4

Ⅰ.高…　Ⅱ.齐…　Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料　Ⅳ.G643

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第22313号

出　版　天津大学出版社
出版人　杨风和
地　址　天津市卫津路92号天津大学内(邮编:300072)
电　话　发行部:022-27403647　邮购部:022-27402742
印　刷　河北省昌黎县印刷总厂
发　行　新华书店天津发行所
开　本　850mm×1168mm　1/32
印　张　17.875
字　数　530千
版　次　2000年5月第1版
印　次　2000年5月第1次
印　数　1-5 000
定　价　22.00元

前　言

高等数学是高等学校理工科一门重要的基础课,也是工学、经济学硕士研究生入学考试的一门主要课程.按考试的基本要求,考生要比较系统地理解数学的基本概念和基本理论,掌握数学的基本方法.要求考生具有抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想像能力、运算能力和综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力.

本书是依据全国高校工科数学课程教学指导委员会所制订的高等数学教学基本要求以及教育部制订的《2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》(简称《数学考试大纲》)编写的.目的在于帮助读者系统复习总结归纳高等数学的重要概念、基本理论和基本方法,通过大量例题的分析帮助读者提高综合运用有关理论解决具体问题的方法与技巧.例题中多数是历届研究生的入学试题,以便读者能了解和熟悉试题的题型和特点.

本书按教育部制订的《数学考试大纲》中有关高等数学的要求顺序按章编写,包括"函数、极限、连续","一元函数微分学","一元函数积分学","向量代数与空间解析几何","多元函数微分学","多元函数积分学","无穷级数","常微分方程"共八章.每章开始先给出《数学考试大纲》中相关的考试内容与要求,再给出基本内容与例题分析.结合有关内容举出各种不同类型的例题,通过分析解题思路启发读者思维,提高解题能力.

本书在内容编排上,不完全局限于高等数学的原有体系,有些是按解题方法将相关内容组织归纳整理,目的在于使读者对所学内容有一个综合的理解和更灵活的运用.每章最后都附有较多的练习题,并给出了练习的参考答案.

为了让读者了解硕士研究生入学考试数学试题的各类题型，深度与广度，重点与难点，本书在附录中给出了 1997 年至 2000 年全国工学、经济学硕士研究生入学考试数学一、二、三、四试卷，以便读者能更有针对性地复习和准备.

本书除作为准备参加硕士研究生入学考试者的复习参考书外，还可作为理工科院校高等数学的教学参考书和学习指导书.

本书在编写过程中得到天津大学数学系和天津大学出版社的大力支持和帮助.本书的初稿曾作为研究生入学考试辅导班的讲义，陈荣胜教授多次使用，提出了许多宝贵意见.吕源熙教授参与部分编写与审核工作.责任编辑杨秀雯教授为本书的编辑出版付出了辛勤的劳动.编者在此表示诚挚的谢意.

本书在编写过程中如有缺点和错误，恳请读者给予指正.

编者

2000.2

目　　录

第一章　函数　极限　连续

一　考试内容与要求

考试内容

函数的概念及表示法　函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性　反函数、复合函数和隐函数　基本初等函数的性质及其图形　初等函数　简单应用问题的函数关系的建立　数列极限与函数极限的定义以及它们的性质　函数的左、右极限　无穷小　无穷大　无穷小的比较　极限的四则运算　极限存在的两个准则：单调有界准则和夹逼准则　两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$$

函数连续的概念　函数间断点的类型　初等函数的连续性　闭区间上连续函数的性质(最大值、最小值定理和介值定理)

考试要求

(1)理解函数的概念，掌握函数的表示方法.

(2)了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性.

(3)理解复合函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.

(4)掌握基本初等函数的性质及其图形.

(5)会建立简单应用问题中的函数关系式.

(6)理解极限的概念，理解函数左、右极限的概念以及极限存在与左右极限之间的关系.

(7)掌握极限的性质及四则运算法则.

(8)掌握极限存在的两个准则,并会利用它们求极限,掌握利用两个重要极限求极限的方法.

(9)理解无穷小、无穷大以及无穷小的阶的概念,会用等价无穷小求极限.

(10)理解函数连续性的概念,会判别函数间断点的类型.

(11)了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质(最大值、最小值定理和介值定理),并会应用这些性质.

二　基本内容与例题分析

函数是高等数学的研究对象,它反映了客观世界变量间的依从关系.极限是高等数学的重要思想方法和研究工具,微积分的基本概念,如连续概念、导数概念、定积分概念、无穷级数的敛散性概念等都是通过极限方法建立起来的.函数的连续性是函数的一个重要性质.高等数学中主要是研究连续函数.

§1.1　函　　数

1　函数概念

设有两个数集 A 与 B,f 是一个确定的对应规律.如果对于 A 中每一个数 x,通过 f,B 中都有惟一的数 y 和它对应,记为 $x\xrightarrow{f}y$,或 $f(x)=y$,称 f 是 A 到 B 的函数,A 为函数的定义域,$B_f=\{y\mid y=f(x),x\in A\}$ 称为函数的值域.

2　函数的性质

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义.

(1)有界性.若存在数 K,使 $f(x)$ 在区间 I 上恒满足 $f(x)\leqslant K(f(x)\geqslant K)$,则称 $f(x)$ 在 I 上有上(下)界.若 $f(x)$ 在 I 上既有上界又有下界,换言之,存在正数 M,使 $|f(x)|\leqslant M$ 在 I 上恒

成立，则称函数 $f(x)$ 在 I 上有界.

(2)单调性.若对区间 I 上的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，$f(x_1)<f(x_2)$($f(x_1)>f(x_2)$)，则称 $f(x)$ 在区间 I 上为单调增(减)函数，也称为严格单调增(减)函数.

若当 $x_1<x_2$ 时，$f(x_1)\leqslant f(x_2)$($f(x_1)\geqslant f(x_2)$)，则称 $f(x)$ 在区间 I 上为广义增(减)函数.

(3)周期性.若存在异于零的常数 l，使 $f(x+l)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，使上式成立的最小正数 l 称为 $f(x)$ 的周期.

(4)奇偶性.若 I 为对称区间 $(-a,a)$，如果对 $(-a,a)$ 上任意 x，$f(-x)=-f(x)$($f(-x)=f(x)$)恒成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 $(-a,a)$ 上为奇(偶)函数.

3 初等函数

以函数的结构为标准，可以将函数分为初等函数与非初等函数.幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数称为基本初等函数.由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和复合步骤构成，并用一个解析式表示的函数称为初等函数.初等函数在定义域上具有重要的特性，如连续性，可积性，一般还具有可微性.工程技术中所讨论的函数多为初等函数，但也常常出现一些其它形式的函数，例如以下几种常见的函数.

(1)幂指函数 $y=f(x)^{\varphi(x)}$，$(f(x)>0)$.

研究这种函数一般将其化为 $y=\mathrm{e}^{\varphi(x)\ln f(x)}$ 的形式，或将其视为二元复合函数

$$y=u^v,u=f(x),v=\varphi(x).$$

(2)分段函数

$$y=f(x)=\begin{cases}\varphi(x),a\leqslant x\leqslant b,\\ \psi(x),b<x\leqslant c.\end{cases}$$

对于分段函数 $f(x)$，特别要注意它在分点 $x=b$ 处的特性.

$f(x)$在点 $x=b$ 处的性质,应分左右两侧,分别按 $\varphi(x)$和 $\psi(x)$进行讨论.例如研究 $f(x)$在 $x=b$ 点的连续性、可导性等.

(3)由变上限或变积分限的定积分所确定的函数.例如

$$y=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,\quad y=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\mathrm{d}t,$$

由方程

$$\int_0^y \sin^3 t\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=a$$

所确定的函数.

(4)由幂级数确定的函数.幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域内定义了一个函数,即幂级数的和函数 $f(x)$.例如,正弦积分函数

$$\begin{aligned} Si(x)&=\int_0^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t \\ &=x-\frac{1}{3\cdot 3!}x^3+\frac{1}{5\cdot 5!}x^5-\cdots+ \\ &\quad(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)(2n-1)!}x^{2n-1}+\cdots. \end{aligned}$$

(5)由依赖于参量的函数取极限或取积分所确定的函数.例如

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}};$$

$$f(x)=\int_a^x (x-2t)\varphi(t)\mathrm{d}t.$$

例 1.1 已知 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$, $f[\varphi(x)]=1-x$,且 $\varphi(x)\geqslant 0$.求 $\varphi(x)$,并给出 $\varphi(x)$的定义域.

分析 由已给条件知 $f[\varphi(x)]=\mathrm{e}^{\varphi^2(x)}=1-x$,由此即可求出 $\varphi(x)$.

解 由 $f[\varphi(x)]=\mathrm{e}^{\varphi^2(x)}=1-x$ 及$\varphi(x)\geqslant 0$ 知

$$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}.$$

又 $\ln(1-x)\geqslant 0$，故 $1-x\geqslant 1$，即 $x\leqslant 0$. 故 $\varphi(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0]$.

例 1.2 已知

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & ,|x|<1, \\ \dfrac{1}{x} & ,|x|\geqslant 1; \end{cases} \quad \varphi(x)=\begin{cases} 2-x^2 & ,|x|\leqslant 2, \\ 2 & ,|x|>2. \end{cases}$$

求 $f[\varphi(x)]$.

分析 $f(x)$ 及 $\varphi(x)$ 皆为分段函数，按复合函数概念，求 $f[\varphi(x)]$ 需分别讨论 $|\varphi(x)|<1$ 及 $|\varphi(x)|\geqslant 1$ 两种情况.

解 当 $|x|\leqslant 2$ 时 $\varphi(x)=2-x^2$，若 x 使 $|2-x^2|<1$，即 $1<|x|<\sqrt{3}$，则 $f[\varphi(x)]=2-x^2+1=3-x^2$. 当 $|x|\leqslant 1$ 或 $\sqrt{3}\leqslant|x|\leqslant 2$ 时，则 $|2-x^2|\geqslant 1$，此时 $f[\varphi(x)]=\dfrac{1}{2-x^2}$.

当 $|x|>2$，$\varphi(x)=2$，即 $|\varphi(x)|\geqslant 1$，所以 $f(\varphi(x))=\dfrac{1}{2}$. 由以上讨论得

$$f(\varphi(x))=\begin{cases} \dfrac{1}{2-x^2}, & |x|\leqslant 1 \text{ 或 } \sqrt{3}\leqslant|x|\leqslant 2, \\ 3-x^2, & 1<|x|<\sqrt{3}, \\ \dfrac{1}{2}, & |x|>2. \end{cases}$$

例 1.3 设 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数，且满足 $f(1)=a$，$f(x+2)=f(x)+f(2)$. 求 $f(2)$，$f(3)$ 及 $f(5)$，且问 a 取何值时 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数.

分析 $f(x)$ 为奇函数，$f(-x)=-f(x)$. 由 $f(1)=a$ 可得 $f(-1)=-a$，再利用 $f(x+2)=f(x)+f(2)$，给 x 以特定值可分别求出 $f(2)$，$f(3)$ 及 $f(5)$. 若 $f(2)=0$ 则 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=f(x)$，由此可定出 a.

解 $f(-1)=-a$. 在 $f(x+2)=f(x)+f(2)$ 中令 $x=-1$，

得 $$f(2)=f(1)-f(-1)=2a.$$
再令 $x=1$,得
$$f(3)=f(1)+f(2)=3a.$$
又令 $x=3$,得
$$f(5)=f(3)+f(2)=5a.$$
若 $f(2)=0$,即 $2a=0$,则 $f(x)$满足 $f(x+2)=f(x)$. 故当 $a=0$ 时,$f(x)$为以 2 为周期的周期函数.

例 1.4 设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义,且满足

(1) $f(x+\pi)=f(x)+\sin x$,

(2) 当 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 时,$f(x)=0$.

证明 $f(x)$是周期函数.

分析 由条件(2)知,当 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 时,$f(x)=0$,当 $-\pi\leqslant x\leqslant 0$ 时,$0\leqslant x+\pi\leqslant\pi$,此时 $f(x+\pi)=0$,由条件(1)得 $f(x)=-\sin x$. 即
$$f(x)=\begin{cases}-\sin x, & -\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ 0, & 0<x\leqslant\pi.\end{cases}$$
再由(1)式可知,当 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 时,$\pi\leqslant x+\pi\leqslant 2\pi$,$f(x+\pi)=f(x)+\sin x=\sin x$,即当 $\pi\leqslant x\leqslant 2\pi$ 时,$f(x)=\sin(x-\pi)=-\sin x$,由此可观察出 $f(x)$的周期为 $T=2\pi$.

证 由(1)式知,对任意 x 有
$$\begin{aligned}f(x+2\pi)&=f(\underline{x+\pi}+\pi)=f(x+\pi)+\sin(\underline{x+\pi})\\&=f(x)+\sin x-\sin x=f(x),\end{aligned}$$
即 $f(x)$是以 2π 为周期的周期函数.

§ 1.2 极　　限

1 极限概念

(1)数列的极限. 设$\{u_n\}$为一个数列,A 为一个常数. 若对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在一个正整数 N,使得对于 $n>N$ 的一切 u_n 都

满足 $|u_n - A| < \varepsilon$，则称 A 为数列u_n当 $n \to \infty$时的极限. 记为 $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = A$. 也称数列$\{u_n\}$收敛于 A.

(2)函数的极限. 自变量 $x \to \infty$时函数的极限　设函数 $f(x)$ 在$|x|$充分大时有定义，A 为一个常数. 若对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在一个正数 N，使得适合$|x| > N$ 的一切 x 所对应的函数值$f(x)$都满足$|f(x) - A| < \varepsilon$，则称 A 为函数$f(x)$当 $x \to \infty$时的极限. 记作$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$.

若定义中仅考虑 x 取正(负)值趋于无穷大，则记作 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A\left(\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A\right)$.

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ 与 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$ 同时成立.

自变量 $x \to x_0$ 时函数的极限　设函数 $f(x)$在点 x_0 的邻域内有定义(点 x_0 可除外)，A 为一个常数. 若对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存咱 $\delta > 0$，使得满足$0 < |x - x_0| < \delta$ 的一切 x 所对应的$f(x)$都满足$|f(x) - A| < \varepsilon$，则称 A 为函数$f(x)$当 $x \to x_0$ 时的极限，记为$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

函数的左极限与右极限　若在以上定义中仅考虑 x 从 x_0 的右(左)边趋于 x_0，即对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得满足 $0 < x - x_0 < \delta\ (0 < x_0 - x < \delta)$的一切 x 所对应的$f(x)$都满足$|f(x) - A| < \varepsilon$，则称 A 为函数$f(x)$当 x 趋于x_0 时的右(左)极限. 记作 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0 + 0) = A\left(\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0 - 0) = A\right)$.

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$.

2　无穷小与无穷大(以下包含 $x \to x_0$，$x \to \infty$两种情况)

(1)无穷小. 若 $\lim f(x) = 0$，则称 $f(x)$为无穷小量.

(2)无穷大. 若对任意给定的 $M>0$,存在 $\delta>0(N>0)$,使得满足 $0<|x-x_0|<\delta(|x|>N)$的一切 x 所对应的函数值$f(x)$都满足$|f(x)|>M$,则称 $f(x)$当 $x\to x_0(x\to\infty)$时为无穷大量. 记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty(\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty)$.

(3)无穷小的阶. 设 $f(x),g(x)$都是无穷小量.

若 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$,称 $f(x)$关于 $g(x)$是高阶无穷小,记作 $f(x)=o(g(x))$.

若 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$,称 $f(x)$关于 $g(x)$是低阶无穷小.

若 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=A\neq0$,称 $f(x)$关于 $g(x)$是同阶无穷小,记作 $f(x)=O(g(x))$. 当 $A=1$ 时,称 $f(x)$与 $g(x)$是等价无穷小,记作 $f(x)\sim g(x)$.

若 $\lim\dfrac{f(x)}{(g(x))^k}=A\neq0,k>0$,称 $f(x)$关于 $g(x)$是 k 阶无穷小.

3　几个重要定理

定理 1(同号性定理)　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,且 $A>0(A<0)$,则必存在 x_0 的一个邻域,在该邻域内的一切 x 值(不考虑 x_0 点),都有 $f(x)>0(f(x)<0)$.

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,且在点 x_0 的某邻域内(不考虑点 x_0)恒有 $f(x)\geqslant0(f(x)\leqslant0)$,则必定有 $A\geqslant0(A\leqslant0)$.

定理 2(有界性定理)　若当 $x\to x_0(x\to\infty)$时,函数 $f(x)$的极限存在,则在 x_0 的某邻域中(不考虑 x_0)(当$|x|>N$ 时),函数 $f(x)$必有界. 特别是收敛数列必为有界数列.

定理 3(无穷小与无穷大的关系)　若当 $x\to x_0(x\to\infty)$时,

$f(x)$是无穷大,则$\frac{1}{f(x)}$是无穷小;若 $f(x)$是无穷小,且 $f(x)\neq 0$,则$\frac{1}{f(x)}$是无穷大.

定理 4(极限与无穷小的关系) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A$ 的充分必要条件是$f(x)=A+\alpha(x)$,且 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \alpha(x)=0$.

定理 5(等价无穷小的代换定理) 若 $\alpha\sim\alpha'$,$\beta\sim\beta'$且 $\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$存在,则 $\lim\frac{\alpha}{\beta}$也存在,且

$$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}.$$

定理 6 有界函数与无穷小之积仍为无穷小.

定理 7 海涅(Heine)定理 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)$存在的充分必要条件是任选数列$\{x_n\}$,$x_n\neq x_0$,$x_n\to x_0$ $(x_n\to\infty)$,所对应的数列$\{f(x_n)\}$有同一极限.

4 求极限的方法

求数列与函数的极限,通常要依据数列和函数的类型,利用极限的运算法则,极限的存在准则,两个重要的极限等寻求具体的计算方法.现将求极限的方法总结归纳如下.

(1)利用函数的连续性及极限的运算法则求极限.

若函数 $f(x)$在点 x_0 连续,则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.初等函数在定义域内是连续的,因此,求初等函数当自变量趋于有定义之点的极限,就等于求该点的函数值.

极限的运算法则 设 $\lim f(x)$和 $\lim g(x)$存在,则

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x);$$