气体动力学基本原理

A编

气体动力学诸方程

錢学森

科学出版社

H. W. EMMONS ED.

FUNDAMENTALS OF GAS DYNAMICS

OXFORD UNIVERSITY PRESS

1958

(SECTION A)

內 容 簡 介

本书是埃蒙斯主编的“气体动力学基本原理”的A编，系钱学森回国前所写.

本书系统地阐述了流体动力学的一般问题，提供了分析用的诸方程.对于物理背景、推导方程的基本思路及方程中各项的物理意义等均作了精辟的说明.

全书共分十六节.书中给出了微分形式的和积分形式的流体动力学基本方程组.对理想气体的绝热与非绝热流动、无旋流、二维定常流等有关方程及某些积分均有叙述，并介绍了无旋流的变分法、速度面变换、对完全气体的偏离等问题，最后给出了一般正交坐标系中的运动方程的表达式及其在各种实际重要的正交坐标系中的具体形式.

本书可供高等院校有关专业师生以及有关研究、工程技术人员参考.

气体动力学基本原理

A 编

气体动力学诸方程

钱 学 森 著

徐 华 舫 译

*

科 学 出 版 社 出版

北京朝阳門内大街117号

北京市书刊出版业营业許可証出字第061号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1966年1月第一版　开本：850×1168 1/32

1966年1月第一次印刷　印张：2 3/16

印数：0001—6,000　字数：55,000

統一书号：13031・2241

本社书号：3403・13—2

定价：[科六] 0.36 元

目　　录

A.1. 引　言

对设计航空器或具有流动工质的机械的工程师来说，他所需要的资料是运动流体作用在一个特定物体或多个物体表面上的压力、切应力、温度及热通量矢；这些物体是处于在特定条件下流动着的流体之中的．气体动力学的主要任务就在于提供这些资料．除上述的资料外，再加上流体的速度矢和密度这两项资料，一般地认为有关流体状况的资料就齐全了．所以在指定空间域内各点上，在指定时间范围内每一瞬间，上述各量一旦确定的话，那末气体动力学问题就算是完全解决了．本编的目的在于系统地阐明一般问题，并提供作分析所需的诸方程．

不过在进行仔细分析以前，最好先计算一个在气体动力学中十分重要的量，那就是小扰动的传播速度．这个速度常称为**声速**．由于在流动流体中的物体对流体产生扰动，可以料到，流场的特性会在很大程度上决定于平均运动速度与声速之比．事实上，仅根据这个比值就可以把流动问题划分为四类：一、亚声速流，即流体速度小于声速；二、跨声速流，即流体速度和声速差不多大小；三、超声速流，即流体速度大于声速；最后是高超声速流，即流体速度大大超过声速．

现在来计算小扰动的传播速度：考虑一从左向右的均匀流．这流动越过一微弱突跃面，突跃面位置不动，于是流场是定常的，也就是说流场不随时间变化．流体流过突跃面时，速度由 u 增为 $u+du$，密度由 ρ 增为 $\rho+d\rho$，压強由 p 增为 $p+dp$．现在考虑一具有单位截面面积的流管．在越过突跃面时，流体质量不能有所增减，故

$$\rho u=(\rho+d\rho)(u+du). \tag{1.1}$$

又越过突跃面时，动量的增量必为作用在流体上的压強增量所平

衡，故

$$(\rho + d\rho)(u + du)^2 - \rho u^2 = -dp. \tag{1.2}$$

若仅取一级微量，则从方程(1.1)和(1.2)得

$$u^2 = \frac{dp}{d\rho}.$$

显然，在一个和流体一起运动的观察者看来，流体是不动的，而扰动以速度 u 传播．因此，u 确实就是小扰动的传播速度，也就是声速．令声速为 a，则

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho}. \tag{1.3}$$

只要知道压強和密度之间的关系，就可以从方程 (1.3) 计算出声速．不可压流体的声速是无限大，这是因为它的压強 p 可以变化，而 ρ 不能变的缘故．由于扰动传播不能产生或消灭能量，所以这个传播过程必是绝热的．事实上，一种特有的压強-密度关系是等熵关系．对于完全气体来说，即对于成分分子间的相互作用可以完全忽略的气体来说，压強对密度的变化率是

$$\frac{dp}{d\rho} = \gamma \frac{p}{\rho}, \tag{1.4}$$

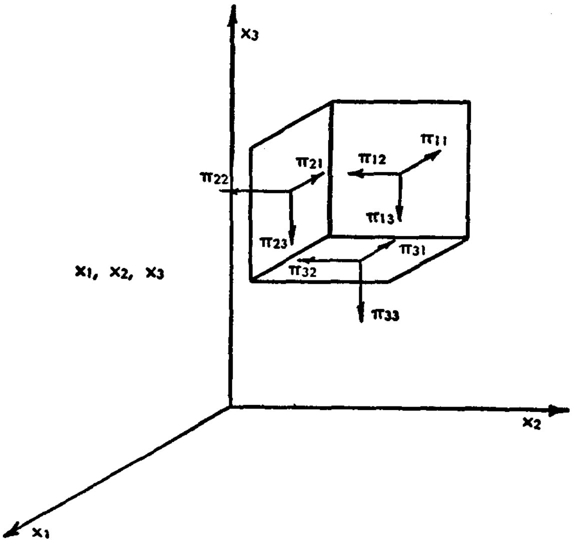
式中的 γ 是比热比．在普通温度和压強之下，大多数气体是完全气体．这时声速的计算十分简单，即

$$a^2 = \gamma \frac{p}{\rho}. \tag{1.5}$$

A.2. 基 本 方 程

令一点的笛卡尔坐标系坐标为 x_i，此处 $i = 1, 2, 3$．在时刻 t，坐标 x_i 点的流体速度分量记为 u_i，$i = 1, 2, 3$．其密度和温度分别记为 ρ 与 T．流体的温度是指，用一种滞后时间可以忽略的幷和流体一起运动的温度计所测得的温度．令 $q_i (i = 1, 2, 3)$ 为热通量矢，即单位时间流经单位面积的热流量．

流体中的应力可以表示为一微元流体各个表面各方向受力的強度． 图 A.2 a 示边长为 dx_1，dx_2，dx_3 的立方微元体上所具有的



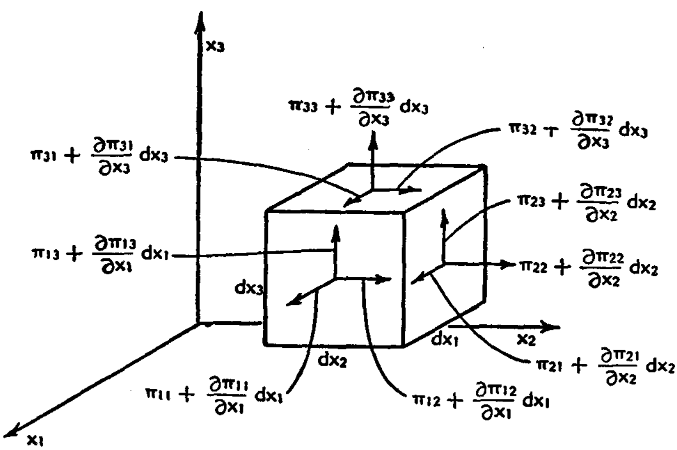


图 A.2 a

这些应力. 具体说来, π_{11} 指作用在与 x_1 轴垂直的面上而指向为 x_1 轴的单位面积上的拉力,或说拉应力. π_{12} 是作用在与 x_1 轴相垂直的面上而指向为 x_2 轴的单位面积上的剪切力, 或说剪应力. 所以, π_{ij} 代表作用在与 x_i 轴垂直的面上而指向为 x_j 轴的应力,这九

个应力的组合简称为**应力张量**(见第IV卷*, B编). 当然微元立方体有两面垂直于同一坐标轴. 例如与 x_1 轴垂直的在 x_1 处有一个面, 在 x_1+dx_1 处还另有一面. 如果应力是坐标的函数, 并且在左边的面上各是 π_{11}, π_{12}, π_{13} 的话, 那末在右边的面上应为 $\pi_{11}+(\partial\pi_{11}/\partial x_1)\,dx_1$, $\pi_{12}+(\partial\pi_{12}/\partial x_1)\,dx_1$, $\pi_{13}+(\partial\pi_{13}/\partial x_1)\,dx_1$. 微元立方体的其他几对面应是同样情况.

现在来计算诸应力的合力分量. 在 x_1 方向的分力是

$$\begin{aligned}
&\left[-\pi_{11}+\left(\pi_{11}+\frac{\partial\pi_{11}}{\partial x_1}\,dx_1\right)\right]dx_2\,dx_3\\
&\quad+\left[-\pi_{21}+\left(\pi_{21}+\frac{\partial\pi_{21}}{\partial x_2}\,dx_2\right)\right]dx_3\,dx_1\\
&\quad+\left[-\pi_{31}+\left(\pi_{31}+\frac{\partial\pi_{31}}{\partial x_3}\,dx_3\right)\right]dx_1\,dx_3\\
&=\left(\frac{\partial\pi_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\pi_{21}}{\partial x_2}+\frac{\partial\pi_{31}}{\partial x_3}\right)dx_1\,dx_2\,dx_3\\
&=\left(\sum_{j=1,2,3}\frac{\partial\pi_{j1}}{\partial x_j}\right)dx_1\,dx_2\,dx_3=\frac{\partial\pi_{j1}}{\partial x_j}\,dx_1\,dx_2\,dx_3.
\end{aligned}$$

最末一式采用"取和约定"(Summation convention), 也就是说凡在一项里下标重覆, 那末该项就对该下标求和**. 所以各应力的合力在 i 向的分力是

$$\frac{\partial\pi_{ji}}{\partial x_j}\,dx_1\,dx_2\,dx_3.$$

合力的诸分力必须与流体的彻体力和惯性力平衡. 显然一立方微元流体的彻体力和惯性力必须正比于其体积 $dx_1\,dx_2\,dx_3$; 否则将无法和应力的合力保持平衡. 当然, 事实上这个条件是得到满足的, 因为彻体力和惯性力与微元立方体的质量成正比, 而其质量正好是 $\rho\,dx_1\,dx_2\,dx_3$. 在建立此平衡方程之前, 先考虑力矩的平衡关

* 指"高速空气动力学及喷气推进"(High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion)丛书的第IV卷; 余类同——编者注.

** 在工程或物理文章中常常要用到 $\sum a_ib_i$ 之类的表达式, 为了方便, 现在一般都采用这样一个约定, 即将求和号省去, 而凡是一项里同一下标出现两次时, 就要理解为它是有求和号的. 如 $a_ib_i=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$; $a_jb_kc_k=a_j(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3)$——译者注.

系. 仍取微元立方体，计算各力对一条平行于 x_3 轴的轴线的力矩. 彻体力和惯性力的力距是与微元体积和 dx_1 或 dx_2 的乘积成正比，是一个四阶微量. 图 A.2 a 表明对经过 (x_1, x_2, x_3) 点而平行于 x_3 轴的一根轴线的力矩平衡关系式如下:

$0 = (\pi_{12}\,dx_2\,dx_3)\,dx_1 - (\pi_{21}\,dx_3\,dx_1)\,dx_2 +$ 四阶微量项. 故得

$$\pi_{12} = \pi_{21}$$

或一般地表示为

$$\pi_{ij} = \pi_{ji}. \tag{2.1}$$

从力矩平衡得出来的这个结论总是成立的，并表明应力张量只有六个独立的分量. 这样的张量称为对称张量.

通常热力学压強 p 是由 p, ρ 和 T 满足流体的状态方程来定义的:

$$p = p(T, \rho), \tag{2.2}$$

这个状态方程是在静止条件下定出来的. 所以"粘性应力张量" τ_{ij} 应定义为

$$\tau_{ij} = \pi_{ij} + \delta_{ij}p, \tag{2.3}$$

式中的 δ_{ij} 是克罗内克尔 δ, 定义为

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= 1, \qquad i = j; \\ &= 0, \qquad i \neq j. \end{aligned} \tag{2.4}$$

因当 $i \neq j$ 时，$\tau_{ij} = \pi_{ij}$，而方程(2.1)又说明 $\tau_{ij} = \tau_{ji}$，所以 τ_{ij} 也是对称张量. 无粘性流体是 τ_{ij} 恆等于零的流体. 关于区分流体静压強 p (hydrostatic pressure) 和粘性张量 τ_{ij} 的基本物理意义将于下节讨论.

取一个边长为 dx_1, dx_2, dx_3 的立方体来看. 单位时间流出立方体的淨质量流量是

$$\left(\frac{\partial \rho u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \rho u_3}{\partial x_3}\right) dx_1\,dx_2\,dx_3.$$

根据质量守恆律,立方体内的流体密度就必须随时间变化,即

$$\left(\frac{\partial \rho u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \rho u_3}{\partial x_3}\right) dx_1\,dx_2\,dx_3 = -\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right) dx_1\,dx_2\,dx_3,$$

所以质量守恆方程或**连续性方程**是

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i}=0, \tag{2.5}$$

这里又用了取和约定. 也就是说

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i}=\sum_{i=1,2,3}\frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i}.$$

根据类似计算办法，得单位时间单位体积在 i 方向的动量增量是

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t}+\frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j}.$$

动量之所以增加乃由于微元立方体內的物质受有淨作用力的缘故. 作用力有两个来源. 设 X_i 代表单位质量所受的来自外源的力的分量，那末加速力的一部分就是 X_i. 另一部分则来自应力张量 π_{ij}. 如前面计算所示，作用在单位体积上的 i 向淨分力为

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\pi_{ji}) \text{ 或 } \frac{\partial}{\partial x_j}(\pi_{ij}),$$

根据张量 π_{ij} 的对称性此两项可以互换. 单位时间单位体积的 i 向动量淨增量必等于作用于单位体积的 i 向力，表明这个关系的动力学方程便是

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j)=\rho X_i+\frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_j}, \tag{2.6}$$

把左侧各项展开，并用上连续性方程(2.5)，方程(2.6)又可写为

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=X_i+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_j}. \tag{2.7}$$

如引入粘性应力张量 τ_{ij}，则方程(2.6)和(2.7)变成

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j)=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\rho X_i+\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \tag{2.8}$$

及

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+X_i+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \tag{2.9}$$

方程(2.6)至(2.9)是**动力学方程**的四种形式.

在方程(2.7)及(2.9)中，左侧是随流体运动计算出来的流体微

团的加速度，也就是流体的实际加速度．为了证明这一点是正确的，可以拿任何一个量 $f(t, x_i)$ 来看，这是时刻 t 及空间点 x_i 的函数．假设观察者和流体微团一起运动，到了 $t + \delta t$ 时刻，这个空间点的坐标为 $x_i + u_i\delta t$．所以对于这个观察者说来，物理量 f 随时间的变化率是

$$\lim_{\delta t \to 0} \frac{[f(t + \delta t, x_i + u_i\delta t) - f(t, x_i)]}{\delta t} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) f.$$

如记随流体微团的时间导数为 D/Dt，则

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_i \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{2.10}$$

如 e 代表单位质量流体的内能，则单位时间内单位体积此内能的增量为

$$\rho \frac{De}{Dt}.$$

此能量增量来自三方面：第一，来自象吸收辐射热、化学反应及燃烧的外加热．记单位时间内加给单位质量的热能为 Q．第二，来自热传导，其热通量矢 q_i 实际是减少微元立方体中的能量．故单位时间单位体积的热能增量是

$$-\frac{\partial q_i}{\partial x_i}.$$

第三，来自应力张量 π_{ij} 对流体所做的功．兹对此作仔细分析：

先考虑 x_i 轴方向的一维流动的简单情况．取一根单位截面的流管（见图 A.2b）．在 t 时刻一微段流体处于从 x_1 到 $x_1 + dx_1$ 的位置．在稍后的时刻 $t + dt$，原在 x_1 点的流体移至 $x_1 + u_1\, dt$ 点，而原在 $x_1 + dx_1$ 点的流体则移至 $x_1 + dx_1 + [u_1 + (\partial u_1/\partial x_1)dx_1]\, dt$ 点．原来这段流体的体积是 $dx_1 \cdot 1$，现在变成了 $[1 + (\partial u_1/\partial x_1)\, dt]\, dx_1 \cdot 1$．所以体积的变化是 $(\partial u_1/\partial x_1)\, dx_1\, dt$．所做的功等于拉应力 π_{11} 乘以体积变化，即

$$\pi_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1\, dt.$$

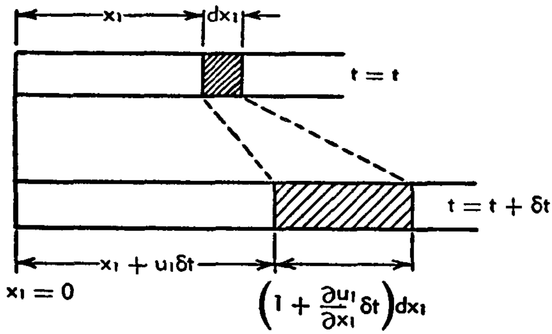


图 A.2 b

单位体积的流体在单位时间内做的功就是

$$\pi_{11}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}.$$

在三维流的一般情况下,还有类似的二附加项: $\pi_{22}(\partial u_2/\partial x_2)$, $\pi_{33}(\partial u_3/\partial x_3)$. 事实上 $\partial u_1/\partial x_1$ 就是流体微团在 x_1 方向的拉应变对时间的变化率, $\partial u_2/\partial x_2$ 是 x_2 向拉应变的变化率, $\partial u_3/\partial x_3$ 是 x_3 向拉应变的变化率. 所以单位时间单位体积所做的功应等于各应力和对应的**应变变化率**的乘积之和，这里面包括切应力及切应变变化率. 问题是切应变率是什么? 为回答这个问题，先观察表达流体微团在运动中的变形率张量 $\partial u_i/\partial x_j$. 这个张量可以分成对称部分和反对称部分:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=\begin{bmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)\\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)\\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}-\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}-\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.11}$$

如此分解的变形张量的物理意义可作如下的理解：反对称部分本来具有三个分量

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right),\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}-\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right),\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right).$$

很容易证明这三个分量就是流体微团绕通过其中心而平行于三坐标轴的三轴线的角转动率分量．显然角转动不会使流体微团发生应变．所以所有的应变必由对称部分而生．已经证明

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1},\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2},\ \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

是拉应变，因而其余的

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right),\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right),\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)$$

必是切应变的变化率．这一点也可以象证明拉应变率 $\partial u_1/\partial x_1$ 那样作一详细计算．每一切应变具有两个对应的切应力．例如

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)$$

有 π_{12} 和 π_{21}．所以单位时间单位体积的总功是

$$\pi_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}.$$

于是，最后得**能量守恒**方程

$$\frac{De}{Dt}=Q-\frac{1}{\rho}\frac{\partial q_i}{\partial x_i}+\frac{1}{\rho}\pi_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \tag{2.12}$$

这个方程可以用动力学方程（2.7）改写一下．把每个动力学方程分别乘以相应的分速；然后加起来，得

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}u_iu_i\right)=u_iX_i+\frac{1}{\rho}u_i\frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_j},$$

式中 $\frac{1}{2}u_iu_i$ 当然是单位质量流体的动能. 把上面这个方程和方程(2.12)相加,得

$$\frac{D}{Dt}\left(e+\frac{1}{2}u_iu_i\right)=Q+u_iX_i-\frac{1}{\rho}\frac{\partial q_i}{\partial x_i}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}(\pi_{ij}u_j), \tag{2.13}$$

这个方程给出流体内能与动能两者之和的变化率.

方程(2.13)的最后一项可以用方程(2.3)和(2.4)所定义的粘性应力张量 π_{ij} 改写为

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}(\pi_{ij}u_j)=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}(\tau_{ij}u_j)-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}(pu_i),$$

右侧第二项还可以用连续方程进一步演化为

$$-\frac{D}{Dt}\left(\frac{p}{\rho}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t}.$$

所以能量方程的又一形式是

$$\frac{D}{Dt}\left(h+\frac{1}{2}u_iu_i\right)=Q+u_iX_i+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial q_i}{\partial x_i}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}(\tau_{ij}u_j), \tag{2.14}$$

此处 $h=e+(p/\rho)$ 是单位质量的焓. 方程(2.14)表示焓与动能之和的变化率. 如果外力 X 有势 $\mathscr{V}$, 即

$$X_i=-\frac{\partial\mathscr{V}}{\partial x_i}, \tag{2.15}$$

那末能量方程还可以变一个形式. 这时方程(2.12)可以写成

$$\frac{D}{Dt}\left(h+\frac{1}{2}u_iu_i+\mathscr{V}\right)=Q+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial\mathscr{V}}{\partial t}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial q_i}{\partial x_i}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}(\tau_{ij}u_j). \tag{2.16}$$

如此形式的能量方程[1]的左侧是焓、动能和势能之和的变化率.

A.3. 粘性应力和热通量

在气体动力学问题里,未知量计有热力学参数 p, ρ 和 T, 速

度矢 u_i，热通量矢 q_i 和粘性应力张量 τ_{ij}. 当热力学参数确定时，内能 e 和焓 h 也随之确定.到现在为止所有推导出来的基本方程，即连续性方程、动力学方程、能量方程和流体的状态方程还不足以求解问题，因为未知量的数目超过现有方程数目. 欲完全确定问题，还需增添方程.

由于从微观的观点看来，任何一种流体都是由极多的分子所组成，所以气体动力学问题的基本处理得通过统计力学的原理进行. 假定经典力学可用，并设质点的总数是 N，每一质点的自由度数目是 n. 这 N 个质点的特定瞬时状态是为 nN 个位置坐标和 nN 个动量坐标组成的吉勃斯（Gibbs）相空间（共是 $2nN$ 维）中的一点所标明的. 统计力学的基本问题是要决定 N 个质点的系统在相空间的任何一点每一时刻的几率，或者说要决定相空间的 $2nN$ 坐标及时间 t 的几率分布函数. 一旦解决这一点，那末流体的任何一种宏观性质，如热通量和应力，便都可以通过平均几率分布函数来计算. 最近欧文（Irving）与寇克伍德（Kirkwood）[2] 曾作过这个平均计算.

决定几率函数的一般问题自然是极其困难的. 好在处于常压及低压下的气体，其分子密度是如此之低，只考虑分子两两相遇就行了. 换句话说，当两个分子接近到相互有显著影响的近距离时，可以认为气体中的其他分子离这两个相互作用的分子十分遥远，因此影响不到它们. 气体的分子运动论就是建立在这两两“相撞”的概念基础上的. 这种理论的几率分布函数还可做相应的大简化，即只考虑一个分子的几率分布函数. 这个分布函数是由一个名叫玻耳兹曼方程的积分-微分方程所决定. 恰浦门（Chapman）和恩斯考格（Enskog）（[3]，第三章）假定分布函数随空间和时间的变化都很小，算得热通量和粘性应力张量是

$$q_i = -k\frac{\partial T}{\partial x_i}, \tag{3.1}$$

$$\tau_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \left(\mu' - \frac{2}{3}\mu\right)\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}, \tag{3.2}$$

式中的 k 是热传导系数，μ 是**普通粘性系数**，μ' 是膨胀粘性系数．所以 μ 和剪应力及拉应力都有关系；但往往只有剪应力是重要的，因为散度 $\partial u_k/\partial x_k$ 和剪应变相比往往很小．但 μ' 却只和拉应力有关，当散度为零时，μ' 的作用也是零．所以 μ' 是体积膨胀率或收缩率的粘性系数．μ 和 μ' 为分子与分子之间的相互作用规律及分子的性质所决定的．例如，当分子沒有內在自由度时，或当內在运动沒有激发起来时，μ' 是零．多原子的分子，其 μ' 不为零．值得注意的是，前面从宏观角度论证过的应力张量的对称性，在分子运动论里还是成立的．

这两个粘性系数 μ 和 μ' 主要是温度的函数，压強对它们只有很微弱的影响．气体的 μ 随温度增高而增大，这个性质和液体的完全不同．有关粘性系数和热传导系数的详细讨论可参看本丛书的第 I 卷，D 编．不过方程 (3.1) 和(3.2)只适用于常压下的气体．在低压下，热通量和粘性应力都出现新的项．这些项曾由伯尼特 (Burnett) ([3]，第 15 章) 算出来过，十分复杂．(关于这个问题的讨论，可参看第 III 卷，H 编.)

方程(3.1) 和 (3.2)说明当温度梯度和速度梯度为零时，不存在热通量和粘性应力．只有当空间变化率存在时，这使得流体从一点流到另一点就需要适应新的情况，热通量和粘性应力才会出现．显然这样的适应并不可能瞬时完成，而是经过分子的多次碰撞才能完成的．所以正是在流场中不同点企图适应不同的热力学平衡这样一个过程才产生热通量和粘性应力的．当流体状态只有很微小的空间变化时，那末流体就简直沒有调整其状态的必要，而且很接近于热力学平衡．所以在热通量和粘性应力小到几乎近于零时，流体的状态，特别是压強、密度和温度之间的关系，必是热力学平衡之下的关系．这就是为什么应力张量 π_{ij} 可以分解为压強 p 和粘性应力张量 τ_{ij} 的缘故，这个压強是按流体处于热力学平衡之下的状态方程计算的．

最近格拉德 (Grad)[4] 发现了一种全新的解玻耳兹曼方程的方法．他的结果适用于象激波內部那样的条件，几率分布函数随

空间和时间作迅速变化的情况．在这种分析法中，热通量矢 q_i 和应力张量 τ_{ij} 不能表为速度及温度的导数的显式． 另一方面他提出的附加方程又包含了所有的未知变量．所以在这种理论里变数 q_i 和 τ_{ij} 和其他的未知量 p, ρ, T 和 u_i 都处于同等地位．格拉德的理论在稀薄气体动力学中的应用是特别重要的（第 III 卷，H 编）．

当然分子运动论不仅仅给出方程(3.1)和(3.2)．它还决定热传导系数和粘性系数与分子属性的关系（第 I 卷，D 编）．如果只需要热通量和应力张量与其他指定的流场变数之间的关系式的话，那末直接根据量纲分析及坐标变换的不变性，一般已足以推导出来．例如，如果规定应力张量为分速的空间导数的线性函数，那末就可以唯一的得出具有未知参数 μ 和 μ' 的方程(3.2)来，μ 和 μ' 数值待定．特鲁斯待尔（Truesdell）[5] 曾作此冗长计算，其结果表达式极为复杂．其初始几项自然就是方程(3.1)和(3.2)所给出的．

分子能量的三种主要形式是平移能、转动能和振动能．三者中以振动能最不易激发（第 I 卷．H 编）．所以如果气体状态发生急骤变化，则振动能一般落后于其平衡值．高温气体，具有可观的分子振动能．这时振动能的滞后是第二粘性系数 μ' 的主要来源．

不过这个问题还有另一种看法，这是堪特劳维兹（Kantrowitz）[6] 首先提出的．当激发分子振动所需的时间远较激发分子其他形式的运动所需时间为长时，这种方法特别适用．其所以如此，是因为粘性作用在运动方程中是以速度导数出现的，所以是局部作用，不可能表现任何长时间的积分影响．令 $e(T)$ 代表单位质量在热力学温度 T 时的平衡内能，$e_{\text{vib}}(T)$ 代表单位质量在 T 时振动能的平衡态值，e'_{vib} 代表实际的振动能． 假定其他形式的内能实际处于平衡状态，那末实际的内能便是

$$e = e(T) - e_{\text{vib}}(T) + e'_{\text{vib}} = e(T) + [e'_{\text{vib}} - e_{\text{vib}}(T)], \quad (3.3)$$

$e'_{\text{vib}} - e_{\text{vib}}(T)$ 是滞后量．现在对小滞后量来说，振动能向平衡态的趋近率可以近似地表为滞后量的线性函数，即

$$\frac{De'_{\text{vib}}}{Dt} = -\beta[e'_{\text{vib}} - e_{\text{vib}}(T)], \quad (3.4)$$

式中 β 是常数，具有时间的倒数量纲． 把方程(3.3)代入能量方程(2.12)和(2.13)，从而就引进一新的因变量 e'_{vib}. 不过这时方程(3.4)就是为这个未知量而增添的一个方程． 不用说，这样做之后，方程系中的 μ 值和 μ' 值应该不包括振动的滞后效应在内了．否则同一效应就算了两遍． 所以 μ' 的适当值根据堪特劳维兹理论则为零，而 μ 的适当值则由通常的分子运动理论计算（第 I 卷，D 编）．振动滞后的淨效果相当于粘性，当然也是消耗能量的．例如堪特劳维兹估计过，一个在纯二氧化碳里的薄物体的阻力可能达到普通粘性单独作用时的两倍．

在普通条件下的气体，用方程(3.1)和(3.2)两式可以给出足够准确的热通量和应力张量．将这两式代入动力学方程和能量方程，未知量的数目恰好等于方程的数目，因此基本方程组齐全．这组方程称为纳维埃-斯道克斯方程，当然这种称法是并不严谨的．本节以下讨论都以纳维埃-斯道克斯方程为基础．具体地说，这时能量方程(2.12)变成了

$$\frac{De}{Dt}=Q+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)-\frac{p}{\rho}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}+\frac{\Phi}{\rho} \tag{3.5}$$

式中的 Φ 称为**耗散函数**，其表达式为

$$\begin{aligned}\Phi&=\tau_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}=\frac{1}{2}\tau_{ij}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\\&=\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2+\left(\mu'-\frac{2}{3}\mu\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)^2,\end{aligned} \tag{3.6}$$

所以 Φ 是粘性耗散所产生的热量．方程(3.5)的另一种形式是

$$\frac{Dh}{Dt}=Q+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{Dp}{Dt}+\frac{\Phi}{\rho}, \tag{3.7}$$

式中 h 当然就是单位质量的焓．

建立了微分方程组之后，气体动力学问题的完全确立就只缺**边界条件**了．边界条件包括在固体物面上对速度分量 u_i、温度 T、或热通量矢 q_i 所作的规定．在历史上，流体与固体物接触表面上的条件曾是个颇有争论的主题（[7]，第 676 页）．所幸的是，在气