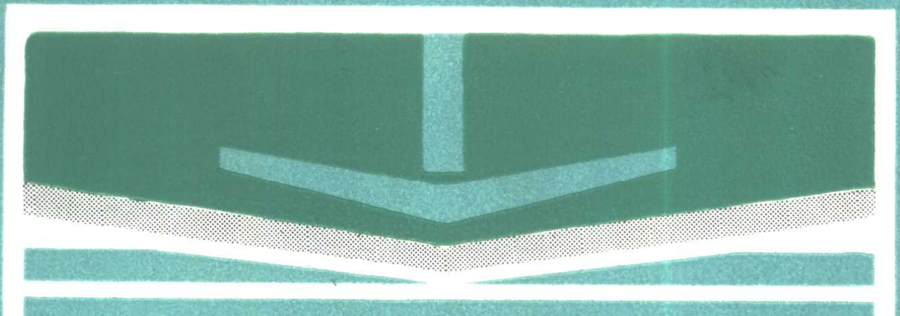
材料力学习题解答

丘益元　周次青 解题
韩耀新　等 审校



科学出版社

材料力学习题解答

丘益元　周次青 解题

韩耀新　等 审校

科学出版社

1983

内 容 简 介

本书对 S. 铁摩辛柯，J. 盖尔著的《材料力学》一书的全部习题（共 606 道）作了较详细的解答．这些习题包括初等的、高等的和专门的问题，有一定的广度、深度和难度．对这些问题的解答不仅有方法、过程，而且还作了必要的分析．

本书可供高等工业院校师生，工程技术人员，自学、进修人员参考．

材料力学习题解答

丘益元　周次青　解题

韩耀新　等　审校

责任编辑　魏茂乐

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1983 年 1 月第 一 版　　开本：787×1092　1/16

1983 年 1 月第一次印刷　　印张：21 1/2

印数：0001—33,900　　字数：539,000

统一书号：13031・2112

本社书号：2883・13—2

定价：压膜平装 3.60 元

平　　装 3.30 元

出 版 说 明

S. 铁摩辛柯（Timoshenko）和 J. 盖尔（Gere）所著的《材料力学》（*Mechanics of Materials*, 1972）是本学科重要的经典著作之一．书中编入的 606 道习题，不但内容丰富，思考性强，而且能把基本概念同实际运用巧妙地结合起来．演算这些习题，对于巩固、加深基本概念和提高解决实际问题的能力，都有很好的作用．

这些习题的答案大部分虽已在原书[1]中给出，但是，初学者常常不满足于此，而希望能有一套完整的示范题解．我们发现一些初学者只注意“凑”出习题的正确答案，而不大注意解题的思路和方法．因此，通过参阅习题解答以提高解题技能就很有必要了．然而，需要强调的是：本习题解答只可作为参考，而不可依赖于它，望读者广开思路，切不要被题解中的方法所局限．

为了适应目前我国和世界其它各国所推行的国际单位制，我们将原著习题中的英制改为国际单位制．具体地说：力的单位用N（牛）或 kN（千牛）；长度单位用m（米）或 mm（毫米）；应力单位用 N/mm^2，按国际单位制的规定，$1N/mm^2 = 1MN/m^2 = 1MPa$；力矩单位用 N · m 或 kN · m 等等，习题中的已知数据是经换算并圆整化后的数据．另外，为紧密配合原书，本书所用原书公式仍用原书编号．

本书系由华南工学院丘益元、周次青同志解题，北京航空学院韩耀新、顾志芬、刘文珽、吴鹤华同志审改并校核，门长华同志描绘本书全部插图．

在本书的出版过程中，得到何技宏同志和阮孟光同志的关心和热情帮助，在此表示衷心感谢．

1）指 S. 铁摩辛柯和 J. 盖尔著的《材料力学》（中译本，科学出版社，1978 年）．

目　　录

第一章　拉伸、压缩和剪切 …… 1

1.2-1—1.2-2　应力和应变 …… 1
1.3-1—1.3-6　强度条件 …… 1
1.4-1—1.4-4　线性弹性和虎克定律 …… 3
1.5-1—1.5-14　拉压杆的变形 …… 4
1.6-1—1.6-10　静不定结构 …… 10
1.7-1—1.7-12　热效应和预应变效应 …… 15
1.8-1—1.8-9　非线性状态 …… 23
1.9-1—1.9-5　剪应力和剪应变 …… 27
1.10-1—1.10-10　应变能 …… 29

第二章　应力和应变的分析 …… 32

2.1-1—2.1-9　斜截面上的应力 …… 32
2.2-1—2.2-11　二向应力 …… 35
2.3-1—2.3-3　纯剪切 …… 40
2.4-1—2.4-12　二向应力的莫尔圆 …… 40
2.5-1—2.5-7　平面应力 …… 45
2.6-1—2.6-8　平面应力的莫尔圆 …… 48
2.7-1—2.7-3　三向应力 …… 52
2.8-1—2.8-3　平面应变 …… 53

第三章　扭转 …… 56

3.1-1—3.1-11　圆杆的扭转 …… 56
3.2-1—3.2-4　空心圆杆的扭转 …… 59
3.3-1—3.3-6　扭转应变能 …… 60
3.4-1—3.4-6　薄壁管 …… 62
3.5-1—3.5-5　圆杆的非弹性扭转 …… 64

第四章　剪力和弯矩 …… 67

4.2-1—4.2-10　梁的内力 …… 67
4.4-1—4.4-20　剪力图和弯矩图 …… 71

第五章　梁的应力 …… 86

5.1-1—5.1-11　梁的正应力 …… 86
5.2-1—5.2-11　梁的设计 …… 90
5.3-1—5.3-8　梁的剪应力 …… 95
5.5-1—5.5-4　组合梁 …… 98
5.6-1—5.6-4　梁的主应力 …… 99
5.7-1—5.7-7　非棱柱梁的应力 …… 102
5.8-1—5.8-6　复合材料梁 …… 105
5.9-1—5.9-7　弯曲和扭转的组合 …… 109
5.10-1—5.10-16　弯曲和轴向载荷的组合 …… 112

第六章　梁的变形 …… 120

6.2-1—6.2-10　简支梁 …… 120
6.3-1—6.3-7　悬臂梁 …… 125
6.4-1—6.4-8　力矩-面积法 …… 129
6.5-1—6.5-15　叠加法 …… 132
6.6-1—6.6-7　非棱柱梁 …… 139
6.7-1—6.7-8　有限差分法 …… 143
6.8-1—6.8-8　弯曲应变能 …… 147
6.9-1—6.9-3　与挠度成比例的载荷——汇聚问题 …… 150
6.10-1—6.10-3　热效应 …… 152

第七章　静不定梁 …… 154

7.2-1—7.2-9　挠度曲线微分方程 …… 154
7.3-1—7.3-15　叠加法 …… 159
7.4-1—7.4-9　力矩-面积法 …… 169
7.5-1—7.5-4　有限差分法 …… 173
7.6-1—7.6-10　三弯矩方程 …… 176
7.7-1—7.7-3　热效应 …… 182
7.8-1—7.8-2　梁端的水平位移 …… 183

第八章　非对称弯曲 …… 185

8.1-1—8.1-8　承受斜向载荷的对称梁 …… 185
8.2-1—8.2-8　非对称梁的纯弯曲 …… 191
8.4-1—8.4-5　开口薄壁截面梁的剪应力 …… 196
8.5-1—8.5-11　开口薄壁截面的剪切中心 …… 200

第九章　非弹性弯曲 …… 209

9.3-1—9.3-11　塑性弯曲 …… 209
9.4-1—9.4-2　塑性铰 …… 214
9.5-1—9.5-12　梁的塑性分析 …… 215
9.6-1—9.6-3　梁的变形 …… 223
9.7-1—9.7-7　非弹性弯曲 …… 228
9.8-1—9.8-2　残余应力 …… 234

第十章　柱 …… 236

10.1-1—10.1-7　承受偏心轴向载荷的柱 …… 236
10.2-1—10.2-13　柱的临界载荷 …… 240
10.3-1—10.3-7　柱的应力 …… 245
10.4-1—10.4-6　柱的正割公式 …… 247
10.5-1—10.5-5　柱的缺陷 …… 250
10.6-1—10.6-3　柱的设计公式 …… 253

第十一章 结构分析和能量法……………… 256
11.3-1—11.3-32 单位载荷法 ……………… 256
11.5-1—11.5-7 互等定理……………………… 273
11.6-1—11.6-13 柔度法 …………………… 277
11.7-1—11.7-8 刚度法……………………… 288
11.9-1—11.9-2 应变能法…………………… 296
11.10-1—11.10-3 势能法…………………… 298
11.11-1—11.11-7 瑞利-里兹法 ………… 299
11.12-1—11.12-5 余能原理………………… 306
11.14-1 卡斯提安诺第二定理 ……………… 309
附录 A 截面图形的几何性质……………… 311
A.1-1—A.1-2 截面的形心………………………… 311
A.2-1—A.2-4 组合截面的形心………………… 312
A.3-1—A.3-6 截面的惯性矩…………………… 313
A.4-1—A.4-3 极惯性矩………………………… 314
A.5-1—A.5-5 平行移轴定理…………………… 315
A.6-1—A.6-5 惯性积…………………………… 317
A.7-1—A.7-2 转轴公式………………………… 318
A.8-1—A.8-6 主轴……………………………… 319
附录 B 截面图形的几何性质……………… 325
附录 C 型钢表………………………………… 327
附录 D 梁的挠度和斜率……………………… 333

第一章　拉伸、压缩和剪切

1.2–1　用静力学证明：棱柱形杆在受拉时(图 1.2–1)，若横截面上的应力为均匀分布，则其截面上合力的作用线将通过截面的形心.(提示：假设该杆的横截面为任意形状，在截面所在的平面上选择一对轴，然后得出合力作用点的坐标表达式.)

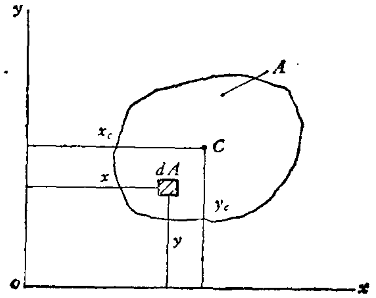


图　1.2–1

【解】　已知作用在横截面 A 上的应力为一常数 σ，则合力大小为 σA. 为求其合力作用线的位置，我们在截面 A 所在的平面上，任选一参考系 xOy，假设合力作用在 $C(x_c, y_c)$ 点. 另外，围绕截面上任一点 $i(x, y)$ 取一微面积 dA，其上所受的力为 σdA，根据合力矩定理得：

$$\sigma A x_c = \int_A \sigma dA x = \sigma \int_A x dA$$

$$\sigma A y_c = \int_A \sigma dA y = \sigma \int_A y dA$$

$$\therefore \quad x_c = \frac{\int_A x dA}{A}; \qquad y_c = \frac{\int_A y dA}{A}$$

上式即为形心的表达式，它说明了若横截面上的应力均匀分布时，合力作用线必通过截面形心.

1.2–2　一截面为矩形 ($25\text{mm} \times 50\text{mm}$)、长 $L = 3.5\text{m}$ 的棱柱形杆，承受 90kN 的轴向拉力. 实测得该杆伸长了 1mm. 试计算该杆的拉应力和应变.

【解】　根据方程 (1–1)，该杆的拉应力为

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{90000}{25 \times 50} = 72\text{N/mm}^2$$

根据方程 (1–2)，该杆的拉应变为

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{1}{3500} = 0.000287$$

1.3–1　一长线在其自重作用下铅垂悬挂着. 试问在下列情况下使它不会拉断的最大长度是多少？(a) 该线为具有极限应力等于 2kN/mm^2 的钢线；(b) 该线为具有极限应力等于 350N/mm^2 的铝线 (钢的单位体积重量为 77kN/m^3，铝的为 27kN/m^3).

【解】　该金属线在自重作用下，悬挂处的截面所受的轴向力最大，其值必与线重相等，它的表达式为

$$F = \gamma A L$$

式中 γ——单位体积的重量，A——该线的横截面积，L——线长.

为了求得不使该线拉断的最大长度 $L_{\max}$，应力 σ 必须等于极限应力. 即

$$\sigma = \frac{F}{A} = \gamma L_{\max} = \sigma_u$$

$$\therefore \qquad L_{\max} = \frac{\sigma_u}{\gamma}$$

(a) 对钢线来说：

$$L_{\max} = \frac{2 \times 10^6}{77} = 25974\text{m}$$

(b) 对铝线来说：

$$L_{\max} = \frac{0.35 \times 10^6}{27} = 12963\text{m}$$

1.3–2　一段短钢管 ($\sigma_y = 270\text{N/mm}^2$)，承受着 1MN 的压力，其抗屈服的安全系数为 1.8，若钢管的壁厚是它的外径的八分之一. 试求所需的最小外径 d.

【解】　根据容许应力设计 (亦即强度条件)，$\sigma \leqslant \sigma_w$，即

$$\frac{1.0\times10^6}{A}\leqslant\frac{270}{1.8}$$

∴ $$A\geqslant 6.67\times10^3\text{mm}^2$$

又

$$A=\frac{\pi}{4}[d^2-(d-2t)^2]$$
$$=\frac{\pi}{4}\left[d^2-\left(d-2\cdot\frac{d}{8}\right)^2\right]$$
$$=\frac{7}{64}\pi d^2=6.67\times10^3\text{mm}^2$$

于是，钢管所需的最小外径为

$$d_{\min}=139.3\text{mm}$$

1.3-3 一圆形截面的实心杆（直径 $d=40\text{mm}$），从旁侧钻有一穿过杆的中心的小孔，孔的直径是 $d/4$. 假设在该孔处杆的净截面上(见图)的容许拉应力为 $\sigma_w=70\text{N/mm}^2$. 试求杆在受拉时所能承受的容许载荷 P.

【解】 杆在小孔处的净截面面积为

$$A\doteq\frac{\pi d^2}{4}-d\left(\frac{d}{4}\right)=\frac{\pi-1}{4}\times40^2$$
$$=856.6\text{mm}^2.$$

由强度条件，杆在受拉时所能承受的容许载荷为

$$P_w=\sigma_w\cdot A=70\times856.6$$
$$=60000\text{N}=60\text{kN}$$

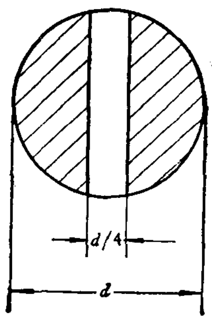


图 1.3-3

1.3-4 AB 和 BC 两杆(如图 a 所示)承受一铅垂载荷 P. 这两杆系由同一材料制成，且水平杆 BC 的长度 L 保持不变，而 θ 角随 A 点沿铅垂方向的移动和 AB 长度的相应改变而改变. 假设容许应力在拉伸和压缩时是一样的，并假设这两根杆受力均完全达到容许应力值. 试求该结构具有最小重量时的 θ 角.

【解】 由节点 B 的平衡条件(图 b)，得 AB 杆和 BC 杆的轴向力为:

$$F_1=\frac{P}{\sin\theta},\qquad F_2=\frac{P}{\operatorname{tg}\theta}$$

两杆中的应力分别为:

$$\sigma_1=\frac{F_1}{A_1}=\frac{P}{A_1\sin\theta},\qquad \sigma_2=\frac{F_2}{A_2}=\frac{P}{A_2\operatorname{tg}\theta}$$

由假设，两根杆的应力均达到容许应力值. 于是，由上式可得:

$$A_1=\frac{P}{\sigma_w\sin\theta},\qquad A_2=\frac{P}{\sigma_w\operatorname{tg}\theta}$$

若两杆的比重为 γ，则结构的重量为

$$W=\gamma\left(A_1\frac{L}{\cos\theta}+A_2\cdot L\right)$$
$$=\frac{\gamma PL}{\sigma_w}\left(\frac{2}{\sin2\theta}+\frac{1}{\operatorname{tg}\theta}\right)$$

利用 $dW/d\theta=0$ 的条件，就可求得使结构具有最小重量时的 θ 角.

$$\frac{dW}{d\theta}=\frac{\gamma PL}{\sigma_w}\left(-\frac{4\cos2\theta}{\sin^2 2\theta}-\frac{1}{\sin^2\theta}\right)=0$$

化简得

$$\sin^2\theta-2\cos^2\theta=0$$

即

$$\operatorname{tg}^2\theta=2$$

∴ $$\theta=\operatorname{tg}^{-1}\sqrt{2}=54°44'$$

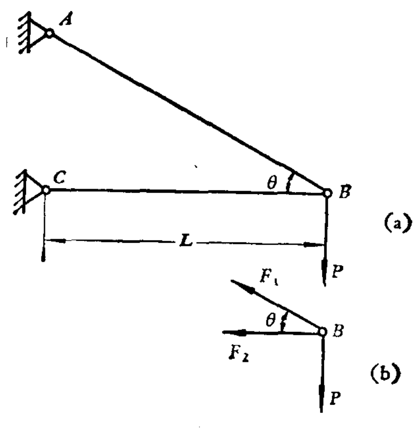


图 1.3-4

1.3-5 重物W附于一长L的细长臂上，此臂在光滑的水平面上绕铅垂枢轴旋转（如图示）. 臂和重物以等角速度 ω 转动，略去臂的重

量，若容许应力为 σ_w，试导出该臂所需要的横截面积的公式.

【解】 重物 W 在作等速转动时，作用于臂上的离心力为

$$P = \frac{W}{g} L\omega^2$$

由强度条件，该臂所需要的横截面积为

$$A = \frac{P}{\sigma_w} = \frac{W L\omega^2}{g\sigma_w}$$

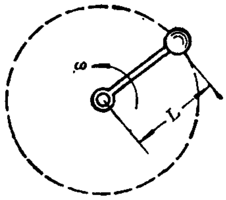


图 1.3-5

1.3-6 若考虑臂重（假设 γ 是臂的材料的单位体积重量），试解上题.

【解】 设臂的横截面积为 A，考虑自重后，

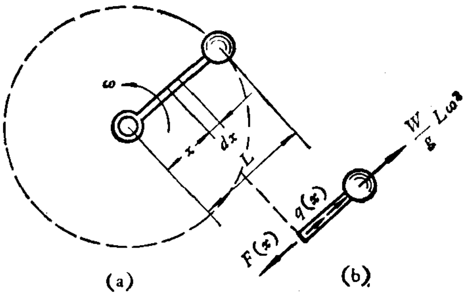


图 1.3-6

臂上每单位长度所受的离心力与到转轴的距离 x 成正比，其表达式为

$$q(x) = \frac{\gamma A}{g} x\omega^2 = \frac{\gamma A\omega^2}{g} x$$

作用于微段 dx 上的离心力为

$$\frac{\gamma A\omega^2}{g} x dx$$

于是，作用于 x 截面上的轴向力（图 b）为

$$F_{(x)} = \int_x^L \frac{\gamma A\omega^2}{g} x dx + \frac{W}{g} L\omega^2$$

$$= \frac{\gamma A\omega^2}{2g}(L^2 - x^2) + \frac{W}{g} L\omega^2$$

显然，在 $x = 0$ 的截面上，轴向力达最大值，其值为

$$F_{\max} = \frac{\gamma A\omega^2 L^2}{2g} + \frac{W}{g} L\omega^2$$

则由强度条件，可求出臂的横截面积为

$$A = \frac{F_{\max}}{\sigma_w} = \frac{1}{\sigma_w}\left(\frac{\gamma A\omega^2 L^2}{2g} + \frac{W}{g}\omega^2 L\right)$$

$$\therefore \quad A = \frac{2W\omega^2 L}{2g\sigma_w - \gamma\omega^2 L}$$

1.4-1 一直径为 50mm 的钢制螺栓（$E = 200\text{kN/mm}^2$），必须承受 260kN 的拉伸载荷. 若螺栓受力部分的初始长度为 550mm，试问它的最后长度为多少？

【解】 根据方程（1-5），螺栓的伸长为

$$\delta = \frac{PL}{EA} = \frac{260 \times 550}{200 \times \frac{\pi}{4} \times 50^2} = 0.36\text{mm}$$

所以，螺栓的最后长度为

$$L = L_0 + \delta = 550 + 0.36 = 550.36\text{mm}$$

1.4-2 一圆钢杆（$E = 200\text{kN/mm}^2$），长 6m，必须承受 7kN 的拉伸载荷. 若杆的容许应力为 120N/mm^2，且其端点的容许变位为 2.5mm. 试问该杆所需的最小直径为多少？

【解】 首先，根据强度条件（即容许应力设计）可求出杆的最小直径. 杆的横截面积为

$$A_1 = \frac{P}{\sigma_w} = \frac{7000}{120} = 58.3\text{mm}^2$$

所以，杆的最小直径为

$$d_1 = \sqrt{\frac{4A_1}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \times 58.3}{3.14}} = 8.62\text{mm}$$

其次，根据刚度条件（即容许变位设计），也可求出杆的最小直径. 此时杆的横截面积为

$$A_2 = \frac{PL}{E\delta} = \frac{7000 \times 6000}{200 \times 10^3 \times 2.5} = 84\text{mm}^2$$

于是，杆的最小直径这时为

$$d_2 = \sqrt{\frac{4A_2}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \times 84}{3.14}} = 10.3\text{mm}$$

为了同时满足上述两个条件，杆的最小直径应为

$$d = d_2 = 10.3\text{mm}$$

1.4-3 一用钢管构成的拉杆（$E = 200\text{kN/mm}^2$，$\gamma = 0.30$），其外径为 90mm，横截面积为

1400mm². 试问轴向力 P 应为何值才能使直径减少 0.0129mm?

【解】 杆的横向应变为

$$\varepsilon' = \frac{0.0129}{90} = \gamma \varepsilon$$

所以，其纵向应变为

$$\varepsilon = \frac{0.0129}{90 \times 0.3} = 4.78 \times 10^{-4}$$

则所需的轴向力 P 应为

$$P = \sigma A = E\varepsilon A = 200 \times 4.78 \times 10^{-4} \times 1400 = 134\text{kN}$$

1.4-4 一直径为 60mm 的实心圆杆，受到 200kN 的轴向压力. (a) 假设 $E = 86\text{kN/mm}^2$, $\nu = 0.30$, 试求该杆直径的增量 Δd; (b) 若杆长为 380mm, 试求该杆的体积增量 ΔV.

【解】 (a) 杆的纵向应变为

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{EA} = \frac{200}{86 \times \frac{\pi}{4} \times 60^2} = 8.225 \times 10^{-4}$$

横向应变为

$$\varepsilon' = \frac{\Delta d}{d} = \nu\varepsilon$$

则该杆直径的增量为

$$\Delta d = \nu\varepsilon d = 0.3 \times 8.225 \times 10^{-4} \times 60 = 0.0148\text{mm}.$$

(b) 根据方程 (1-7), 单位体积的改变为

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon(1 - 2\nu)$$

于是，该杆的体积增量为

$$\Delta V = V\varepsilon(1 - 2\nu) = \frac{\pi}{4} \times 60^2 \times 380 \times 8.225 \times 10^{-4} \times (1 - 2 \times 0.3) = 354\text{mm}^3$$

1.5-1 等截面杆的受力如图 1.5-1 所示，杆的横截面积为 A, 弹性模量为 E. 试求杆下端的变位 δ 的公式，且问该杆是伸长了还是缩短了?

【解】 方法 I:

1) 首先，求出杆各段的轴向力：用假想截面 I-I 将杆的下段分离出一部分作为自由体 (图 b). 由平衡条件得下段的轴向力

$$F_1 = P$$

同样，用假想截面 II-II 和 III-III 分别将中段和上段分离出一部分作为自由体 (图 c 和 d), 由平衡条件得中段和上段的轴向力分别

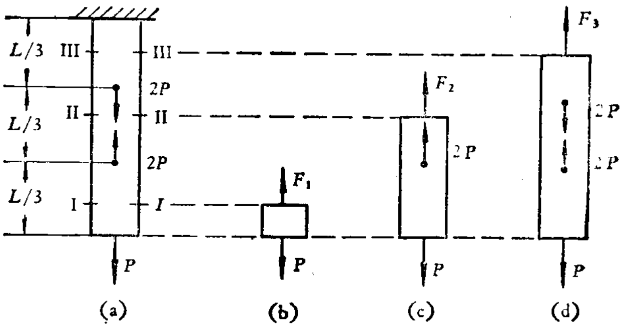


图 1.5-1(1)

为:

$$F_2 = -P, \qquad F_3 = P$$

2) 按方程 (1-5), 分别计算各段的伸长量或缩短量:

$$\delta_{CD} = \frac{F_1 \frac{L}{3}}{EA} = \frac{PL}{3EA} \quad \text{(伸长)}$$

$$\delta_{BC} = \frac{F_2 \frac{L}{3}}{EA} = -\frac{PL}{3EA} \quad \text{(缩短)}$$

$$\delta_{AB} = \frac{F_3 \frac{L}{3}}{EA} = \frac{PL}{3EA} \quad \text{(伸长)}$$

3) 杆下端的变位为

$$\delta = \sum_{i=1}^{n} \delta_i = \delta_{CD} + \delta_{BC} + \delta_{AB} = \frac{PL}{3EA} - \frac{PL}{3EA} + \frac{PL}{3EA} = \frac{PL}{3EA} \quad \text{(伸长)}$$

上述解法，在有些教科书中称为分段法.

方法 II:

分别考虑这三个力单独作用时对杆下端变位的影响，然后叠加起来，即得这三个力同时作用时杆下端的变位(图 (2)), 这个方法称为叠加法. 只要在因变量与自变量成线性关系的条件下，都能使用叠加原理. 拉压杆的弹性变形

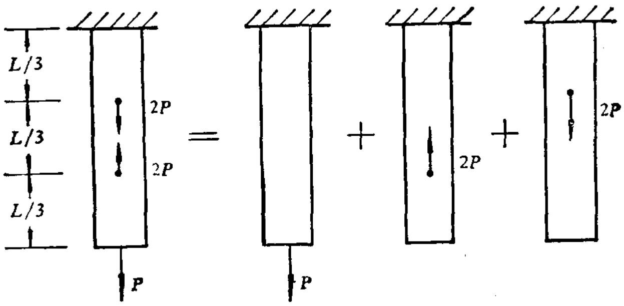


图 1.5-1(2)

是和外力成线性关系的，所以可以使用叠加法．计算如下：

$$\delta=\frac{PL}{EA}-\frac{2P\cdot\frac{2}{3}L}{EA}+\frac{2P\cdot\frac{1}{3}L}{EA}=\frac{PL}{3EA}$$

（伸长）

与解法 I 所得结果完全相同．

1.5-2 图示短柱承受载荷 $P_1=580\mathrm{kN}$，$P_2=660\mathrm{kN}$．其上面部分的长度 $a=0.6\mathrm{m}$，截面为方形（边长为 70mm）；下面部分的长度 $b=0.7\mathrm{m}$，截面也为方形(边长为 120mm)．假设 $E=200\mathrm{kN/mm^2}$，试求：(a) 短柱顶面的变位；(b) 上面部分的轴向应变和下面部分的轴向应变之比值．

【解】 (a) 短柱每段的缩短量分别为：

$$\delta_{\mathrm{I}}=\frac{F_1a}{EA_1}=\frac{P_1a}{EA_1}=\frac{580\times600}{200\times70^2}$$

$$=0.355\mathrm{mm}$$

$$\delta_{\mathrm{II}}=\frac{F_2b}{EA_2}=\frac{(P_1+P_2)b}{EA_2}$$

$$=\frac{(580+660)\times700}{200\times120^2}=0.301\mathrm{mm}$$

所以，短柱的总缩短量为

$$\delta=\delta_{\mathrm{I}}+\delta_{\mathrm{II}}=0.355+0.301=0.656\mathrm{mm}$$

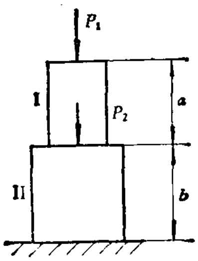


图 1.5-2

(b) 上、下两部分的轴向应变之比值为

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}=\frac{\delta_{\mathrm{I}}/a}{\delta_{\mathrm{II}}/b}=\frac{0.355/600}{0.301/700}=1.375$$

1.5-3 一具有圆形截面的钢杆长 3m，其下半段圆截面的直径为 $d_1=20\mathrm{mm}$，上半段的直径为 $d_2=12\mathrm{mm}$．(a) 试求在 $P=20\mathrm{kN}$ 的拉伸载荷的作用下杆的伸长量；(b) 若把同样体积的材料锻成长为 3m，等直径 d 的杆件，试求在同样载荷下的伸长量（假设 $E=200\mathrm{kN/mm^2}$）．

【解】 (a) 钢杆的总伸长为

$$\delta=\frac{P_1L_1}{EA_1}+\frac{P_2L_2}{EA_2}=\frac{P\frac{L}{2}}{E\frac{\pi d_1^2}{4}}+\frac{P\frac{L}{2}}{E\frac{\pi d_2^2}{4}}$$

$$=\frac{2PL}{\pi E}\left(\frac{1}{d_1^2}+\frac{1}{d_2^2}\right)$$

$$=\frac{2\times20\times3000}{\pi\times200}\left(\frac{1}{20^2}+\frac{1}{12^2}\right)$$

$$=1.803\mathrm{mm}$$

(b) 根据体积相同的条件，可求得把材料锻成为长 3m 时的杆直径 d．原杆的体积为

$$V'=L_1A_1+L_2A_2$$

$$=\frac{L}{2}\cdot\frac{\pi d_1^2}{4}+\frac{L}{2}\cdot\frac{\pi d_2^2}{4}=\frac{\pi L}{8}(d_1^2+d_2^2)$$

锻成的等直杆的体积为

$$V''=LA=\frac{\pi Ld^2}{4}$$

$$\because\quad V'=V'',$$

$$\therefore\quad d=\sqrt{\frac{d_1^2+d_2^2}{2}}=\sqrt{\frac{20^2+12^2}{2}}=16.49\mathrm{mm}$$

于是，其伸长量为

$$\delta=\frac{PL}{EA}=\frac{4PL}{\pi Ed^2}$$

$$=\frac{4\times20\times3000}{200\times\pi\times16.49^2}=1.405\mathrm{mm}$$

1.5-4 试导出长为 L，横截面积为 A 的棱柱形杆，在铅垂悬挂时，在其自重作用下，总伸长量的公式(假设 W 为杆的总重量)．

【解】 因杆的总重量为 W，所以，单位长度的重量为

$$q = \frac{W}{L}$$

为求任意截面上的轴向力，可用假想截面将杆的一部分作为自由体(图 b). 由平衡条件可知

$$F_{(x)} = qx = \frac{W}{L}x$$

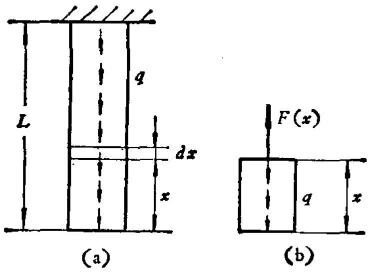


图 1.5-4

由于杆的轴向力不是常量，所以应先计算微段 dx 的伸长量

$$d\delta = \frac{F_{(x)}dx}{EA} = \frac{Wx}{EAL}dx$$

于是,整个杆的伸长为

$$\delta = \int_0^L \frac{Wx}{EAL}dx = \frac{WL}{2EA}$$

1.5-5 一均匀钢杆置于水平面上时长度为 5m，试确定当将其一端铅垂悬挂时，它的伸长值为多少?（假设 $E = 200\text{kN/mm}^2$，单位体积的重量 $\gamma = 80\text{kN/m}^3$.）

【解】 利用上题的结论，并将 $W = \gamma AL$ 代人,得

$$\delta = \frac{\gamma L^2}{2E} = \frac{80 \times 5^2}{2 \times 200 \times 10^6} = 0.005\text{mm}$$

1.5-6 试确定铅垂悬挂的棱柱形杆，在其自重作用下体积的增量 ΔV.（假设杆的总重量为W，杆长为 L，泊松比为 ν，弹性模量为 E.）

【解】 杆的体积增量为

$$\Delta V = \varepsilon V(1 - 2\nu)$$

利用 1.5-4 题的结论，知杆在自重作用下的伸长为

$$\delta = \frac{WL}{2EA}$$

而

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{W}{2EA}$$

$$\therefore \quad \Delta V = \left(\frac{W}{2EA}\right)(AL)(1 - 2\nu)$$

$$= \frac{WL}{2E}(1 - 2\nu)$$

1.5-7 一长L的杆，在水平面内绕铅垂轴以等角速度ω转动(见图 1.3-6). 杆的横截面积为 A，重量为 W_1. 一重物W附于杆端，试求由于离心力的作用,杆所产生的总伸长量.

【解】 由 1.3-6 题得到杆的任意截面上的轴向力为

$$F_{(x)} = \frac{\gamma A\omega^2}{2g}(L^2 - x^2) + \frac{W}{g}L\omega^2$$

由于轴向力不是常量,因此先计算微段 dx 的伸长量

$$d\delta = \frac{F_{(x)}dx}{EA} = \frac{1}{EA}\left[\frac{\gamma A\omega^2}{2g}(L^2 - x^2) + \frac{W}{g}L\omega^2\right]dx$$

于是,杆的总伸长量为

$$\delta = \int d\delta = \int_0^L \frac{1}{EA}\left[\frac{\gamma A\omega^2}{2g}(L^2 - x^2) + \frac{W}{g}L\omega^2\right]dx$$

$$= \frac{\gamma AL^3\omega^2}{3gEA} + \frac{WL^2\omega^2}{gEA} = \frac{W_1L^2\omega^2}{3gEA} + \frac{WL^2\omega^2}{gEA} = \frac{L^2\omega^2}{3gEA}(W_1 + 3W)$$

1.5-8 一等厚度 t、截面为矩形的锥形杆，其上作用有力 P(如图所示). 杆的宽度在固定端处为 b_1，在自由端处为 b_2，呈线性变化. 试导出在P力的作用下，杆所产生的伸长量δ的公式.

【解】 在距杆上端 x 处切出一微段 dx，该处的横截面积为

$$A_{(x)} = t\left[\frac{(b_1 - b_2)(L - x)}{L} + b_2\right]$$

$$= \frac{t}{L}[Lb_1 + (b_2 - b_1)x]$$

则 dx 微段的伸长量为

$$d\delta = \frac{Pdx}{EA_{(x)}} = \frac{PLdx}{Et[Lb_1 - (b_1 - b_2)x]}$$

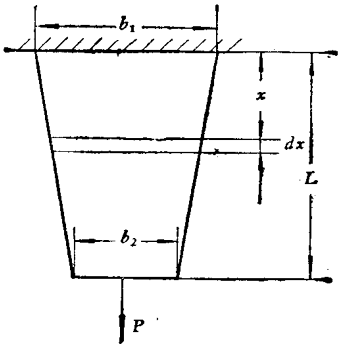


图 1.5-8

因此，整个杆的伸长量为

$$\delta = \int d\delta = \frac{PL}{Et}\int_0^L \frac{dx}{Lb_1 - (b_1 - b_2)x}$$

$$= -\frac{PL}{Et(b_1 - b_2)}\ln[Lb_1 - (b_1 - b_2)x]_0^L$$

$$= \frac{PL}{Et(b_1 - b_2)}\ln\frac{b_1}{b_2}$$

1.5-9 试导出上例中杆的体积增量ΔV的公式.

【解】 微段 dx 的体积为

$$d\Delta V = A_{(x)}dx$$

由方程(1-7)，知单位体积的变化的公式为

$$\frac{d\Delta V}{dV} = \varepsilon(1 - 2\nu)$$

$$\therefore \quad d\Delta V = \varepsilon(1 - 2\nu)dV$$

$$= \frac{P}{EA_{(x)}}(1 - 2\nu)\cdot A_{(x)}dx$$

$$= \frac{P(1 - 2\nu)}{E}dx$$

因此，整个杆的体积增量为

$$\Delta V = \int d\Delta V = \int_0^L \frac{P(1 - 2\nu)}{E}dx$$

$$= \frac{PL(1 - 2\nu)}{E}$$

1.5-10 一长 $L = 3$m 的圆截面锥形钢杆($E = 200$kN/mm^2)，承受拉力 $P = 45$kN，杆的大端直径为 $d_1 = 50$mm，小端直径为 $d_2 = 25$mm. 试问由于 P 力的作用，杆的伸长量为多少？

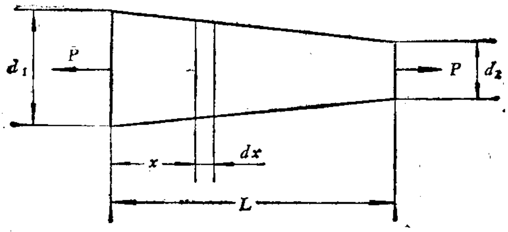


图 1.5-10

【解】

在距左端 x 处切出一微段 dx，在该处的横截面积为

$$A_{(x)} = \frac{\pi}{4}\left[\frac{(d_1 - d_2)(L - x)}{L} + d_2\right]^2$$

$$= \frac{\pi}{4L^2}[d_1L - (d_1 - d_2)x]^2$$

微段的伸长量为

$$d\delta = \frac{Pdx}{EA_{(x)}} = \frac{4PL^2dx}{\pi E[d_1L - (d_1 - d_2)x]^2}$$

于是，整个杆的伸长量为

$$\delta = \int_0^L d\delta = \int_0^L \frac{4PL^2}{\pi E[d_1L - (d_1 - d_2)x]^2}dx$$

$$= \frac{4PL^2}{\pi E(d_1 - d_2)}\left[\frac{1}{d_1L - (d_1 - d_2)x}\right]_0^L$$

$$= \frac{4PL}{\pi Ed_1d_2}$$

将各已知数据代入上式，求得

$$\delta = \frac{4\times 45\times 3000}{\pi\times 200\times 50\times 25} = 0.688\text{mm}$$

1.5-11 试导出使变截面圆柱的体积为最小时的半径 r 的方程(见图). 圆柱承受着加在顶面上的压力 P 和自身的重量. 已知柱身材料的单位体积重量为 γ，容许压应力为 σ_w. 并计算柱的上、下端的截面积和柱的体积. (提示：研究一长为 dx 的微段，因为应力在所有横截面上必须相同，且等于 σ_w，微段的上、下两个截面的面积之差 dA 必须补偿其压力差，此压力差等于微段自身的重量. 于是 $\sigma_w\ dA = \gamma Adx$，即 $dA/A = \gamma dx/\sigma_w$. 将此方程的两边进行积分，即可求得其解.)

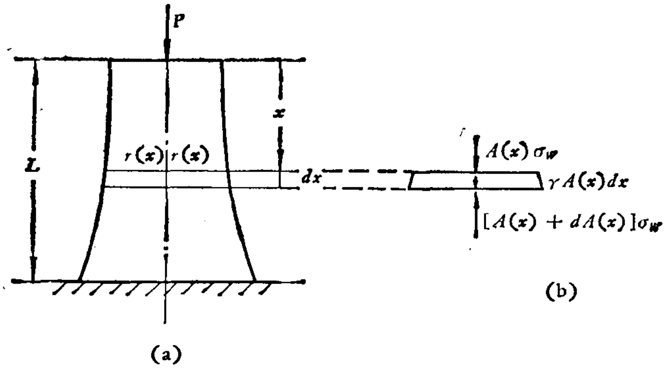


图 1.5-11

【解】

(a) 求 $V=V_{\min}$ 时，截面半径 r 的表达式.

要使变截面圆柱的体积为最小，应力在所有横截面上必须都等于容许应力 σ_w.

设柱在 x 处的截面积为 $A_{(x)}$，在 $x+dx$ 处的截面积则为 $A_{(x)}+dA_{(x)}$. 由微段 dx 的平衡(图 b)可知

$$[A_{(x)}+dA_{(x)}]\sigma_w=A_{(x)}\sigma_w+\gamma A_{(x)}dx$$

$$\therefore \qquad dA_{(x)}\sigma_w=\gamma A_{(x)}dx$$

即

$$\frac{dA_{(x)}}{A_{(x)}}=\frac{\gamma dx}{\sigma_w}$$

两边进行积分，得

$$\int_0^x\frac{dA_{(x)}}{A_{(x)}}=\int_0^x\frac{\gamma dx}{\sigma_w}$$

$$\ln\frac{A_{(x)}}{A_{(0)}}=\frac{\gamma x}{\sigma_w},\quad \frac{A_{(x)}}{A_{(0)}}=e^{\frac{\gamma x}{\sigma_w}}$$

$$\therefore \qquad A_{(x)}=A_{(0)}e^{\frac{\gamma x}{\sigma_w}}$$

圆柱的上端截面只受 P 力，所以，上端截面面积为

$$A_{(0)}=\frac{P}{\sigma_w}$$

而柱的下端截面面积为

$$A_{(L)}=\frac{P}{\sigma_w}e^{\frac{\gamma L}{\sigma_w}}$$

于是，变截面柱体积为最小时，半径 $r(x)$ 必须满足的方程为

$$\pi r_{(x)}^2=\frac{P}{\sigma_w}e^{\frac{\gamma x}{\sigma_w}}$$

即

$$r_{(x)}=\left(\frac{P}{\pi\sigma_w}e^{\frac{\gamma x}{\sigma_w}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

(b) 求体积的表达式.

微段 dx 的体积为

$$dV=A_{(x)}dx=\frac{P}{\sigma_w}e^{\frac{\gamma x}{\sigma_w}}dx$$

于是，柱的体积为

$$V=\int dV=\int_0^L\frac{P}{\sigma_w}e^{\frac{\gamma x}{\sigma_w}}dx$$

$$=\frac{P}{\sigma_w}\left[\frac{\sigma_w}{\gamma}e^{\frac{\gamma x}{\sigma_w}}\right]_0^L=\frac{P}{\gamma}\left(e^{\frac{\gamma L}{\sigma_w}}-1\right)$$

1.5-12 试计算图示结构中，节点 B 位移的水平分量和铅垂分量. AB 是直径为 3mm，长为 0.9m 的钢绳($E_s=200\text{kN/mm}^2$)；木制支柱 BC 的长度为 1.5m，截面是边长等于 25mm 的正方形($E_w=10\text{kN/mm}^2$)，力 $P=2\text{kN}$.

【解】

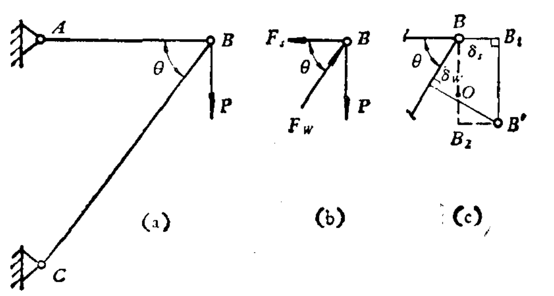


图 1.5-12

由节点 B 的平衡(图 b)得:

$$F_s=\frac{P}{\operatorname{tg}\theta}=\frac{3}{4}P\,(\text{拉}),$$

$$F_w=\frac{P}{\sin\theta}=\frac{5}{4}P\,(\text{压})$$

AB 绳的伸长为

$$\delta_s=\frac{F_sL_s}{E_sA_s}=\frac{\frac{3}{4}\times2\times900}{200\times\frac{\pi}{4}\times3^2}=0.955\text{mm}$$

BC 杆的缩短为

$$\delta_w=\frac{F_wL_w}{E_wA_w}=\frac{\frac{5}{4}\times2\times1500}{10\times25^2}=0.6\text{mm}$$

利用 Williot 图解法(即用切线代圆弧)，求得变形后 B 点的新位置 B'(图 c). 显然，节点 B 位移的水平分量为

$$BB_1 = \delta_s = 0.955\text{mm}$$

其铅垂分量为

$$B_1B' = BO + OB_2 = \frac{\delta_w}{\sin\theta} + \frac{\delta_s}{\text{tg}\,\theta}$$

$$= 0.6 \times \frac{5}{4} + 0.955 \times \frac{3}{4}$$

$$= 1.466\text{mm}$$

1.5-13 图示桁架结构 ABC，在节点 B 处有一 P 力作用，其作用线与铅垂线成 θ 角．杆 AB 和 BC 的横截面积分别为 A_1 和 A_2．试求使节点 B 的位移与力 P 的方向相同时的 θ 角．

【解】

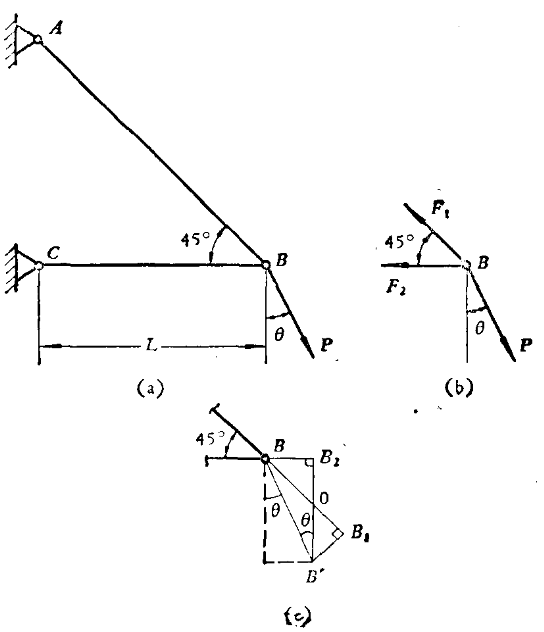


图 1.5-13

由节点 B 的平衡(图 b)，求得杆 AB 和 BC 的轴向力为：

$$F_1 = \sqrt{2}\,P\cos\theta \qquad (\text{拉})$$

$$F_2 = P(\sin\theta - \cos\theta) \qquad (\text{拉})$$

杆 AB 和 BC 的伸长分别为：

$$\delta_1 = \frac{F_1\sqrt{2}\,L}{EA_1} = \frac{2PL\cos\theta}{EA_1}$$

$$\delta_2 = \frac{F_2L}{EA_2} = \frac{PL(\sin\theta - \cos\theta)}{EA_2}$$

利用 Williot 图解法(即用切线代圆弧)，求出变形后节点 B 的新位置 B'(图 c)．假设 BB' 与 P 力方向一致，则 θ 角可根据节点 B 的水平位移和垂直位移求出．

节点 B 的水平位移为．

$$BB_2 = \delta_2$$

节点 B 的铅垂位移为

$$B_2B' = B_2O + OB' = B_2O + \frac{BB_1 - BO}{\cos 45^\circ}$$

$$= \delta_2 + (\delta_1 - \sqrt{2}\,\delta_2)\sqrt{2}$$

$$= \sqrt{2}\,\delta_1 - \delta_2$$

而

$$\text{tg}\,\theta = \frac{BB_2}{B_2B'} = \frac{\delta_2}{\sqrt{2}\,\delta_1 - \delta_2}$$

$$= \frac{PL(\sin\theta - \cos\theta)/EA_2}{\dfrac{2\sqrt{2}\,PL\cos\theta}{EA_1} - \dfrac{PL(\sin\theta - \cos\theta)}{EA_2}}$$

$$= \frac{(\sin\theta - \cos\theta)A_1}{2\sqrt{2}\,A_2\cos\theta - A_1(\sin\theta - \cos\theta)}$$

经化简，得

$$A_1\sin\theta\cos\theta - A_1\cos^2\theta = 2\sqrt{2}\,A_2\sin\theta\cos\theta - A_1\sin^2\theta + A_1\sin\theta\cos\theta$$

$$A_1(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = -2\sqrt{2}\,A_2\sin\theta\cos\theta$$

$$A_1\cos 2\theta = -\sqrt{2}\,A_2\sin 2\theta$$

$$\cot 2\theta = -\frac{\sqrt{2}\,A_2}{A_1}$$

$$\therefore \qquad \theta = \frac{1}{2}\cot^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}\,A_2}{A_1}\right)$$

1.5-14 题 1.3-4 中图示的桁架结构 ABC，是由长 L，横截面积为 2500mm^2 的水平钢杆 BC 和截面积为 312.5mm^2 的钢连接杆 AB 所构成．其角度 θ 可由改变钢连接杆的长度和支点 A 的铅垂位置（长度 L 不变）调到所需要的值．试确定在载荷 P 的作用下，使节点 B 的铅垂位移为最小时的 θ 角．

【解】

由节点 B 的平衡(图 b)，求出：

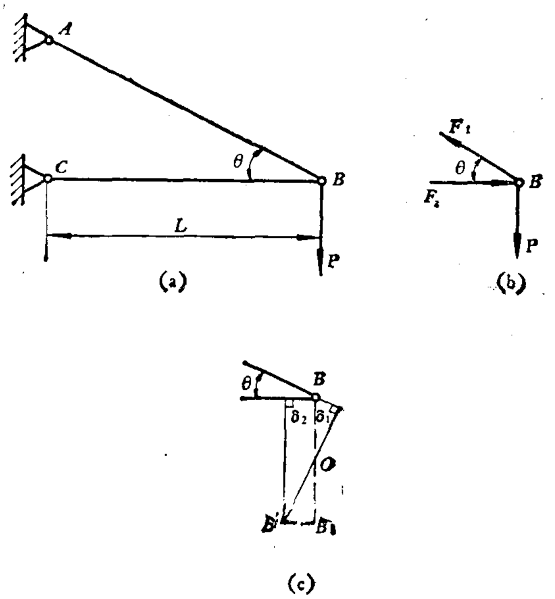


图 1.5-14

$$F_1 = \frac{P}{\sin\theta}\ (\text{拉}),\quad F_2 = \frac{P}{\text{tg}\,\theta}\ (\text{压})$$

AB 杆的伸长和 BC 杆的缩短分别为:

$$\delta_1 = \frac{F_1 \dfrac{L}{\cos\theta}}{EA_1} = \frac{PL}{EA_1 \sin\theta\cos\theta}$$

$$\delta_2 = \frac{F_2 L}{EA_2} = \frac{PL}{EA_2 \text{tg}\,\theta}$$

根据 Williot 图求出节点 B 的铅垂位移 BB_1(图 c),

$$BB_1 = BO + OB_1 = \frac{\delta_1}{\sin\theta} + \frac{\delta_2}{\text{tg}\,\theta}$$

$$= \frac{PL}{EA_1 \sin^2\theta\cos\theta} + \frac{PL}{EA_2 \text{tg}^2\theta}$$

$$= \frac{PL}{EA_1}\left(\frac{1}{\sin^2\theta\cos\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\dfrac{A_2}{A_1}\sin^2\theta}\right)$$

$$= \frac{PL}{300E}\left(\frac{8 + \cos^3\theta}{8\sin^2\theta\cos\theta}\right)$$

由 $d(BB_1)/d\theta = 0$, 有

$$[-3\cos^2\theta\sin\theta(8\sin^2\theta\cos\theta) - (\cos^3\theta + 8)(16\sin\theta\cos^2\theta - 8\sin^3\theta)]/(64\sin^4\theta\cos^2\theta) = 0$$

即

$$\sin^2\theta\cos^3\theta + \cos^5\theta + 8\cos^2\theta - 4\sin^2\theta = 0$$

亦即

$$\cos^3\theta + 12\cos^2\theta - 4 = 0$$

解之,得

$$\cos\theta = 0.5642,\qquad \theta = 55°39'$$

1.6-1 讨论图 a 所示的静不定结构. 取 R_b 作为多余约束反力,试求反力 R_a 和 R_b.

【解】 取 R_b 作为多余约束反力,解除约束后的受力简图如图 b 所示.

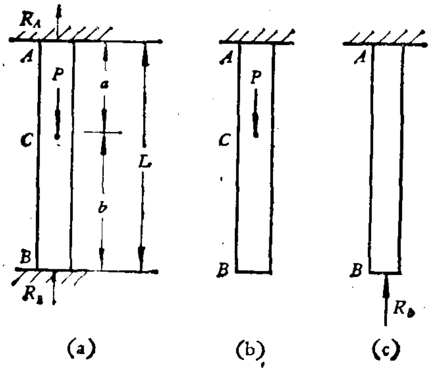


图 1.6-1

根据平衡条件,得到

$$R_a + R_b = P$$

在载荷 P 的作用下, B 点的位移方向向下(图 b),其值为

$$\delta_P = \frac{Pa}{EA}$$

在多余约束反力 R_b 的作用下,B 点的位移方向向上(图 c), 其值为

$$\delta_R = \frac{R_b L}{EA}$$

$$\therefore\qquad \delta_b = \delta_P - \delta_R = \frac{Pa}{EA} - \frac{R_b L}{EA}$$

而 B 点的实际位移为零,位移协调条件则为

$$\delta_b = 0$$

即

$$\frac{Pa}{EA} = \frac{R_b L}{EA}$$

解之,得 B 端的反力为

$$R_b = \frac{Pa}{L}$$

代入平衡条件,求得 A 端的反力为

$$R_a = P - R_b = P - \frac{Pa}{L} = \frac{Pb}{L}$$

1.6-2 一钢筋混凝土方柱，其上作用有轴向压力 P. 已知钢筋的横截面积是混凝土的 1/10，而钢的弹性模量是混凝土的 10 倍. 试求混凝土能承受多大的载荷?

【解】 设钢筋和混凝土所受的压力分别为 P_s 和 P_c，由平衡条件可得

$$P_s + P_c = P \tag{1}$$

在压力 P_s 的作用下，钢筋的缩短量为

$$\delta_s = \frac{P_s L}{E_s A_s}$$

在压力 P_c 的作用下，混凝土的缩短量为

$$\delta_c = \frac{P_c L}{E_c A_c}$$

因钢筋和混凝土的压缩量是相等的，所以位移协调条件为

$$\delta_s = \delta_c$$

即

$$\frac{P_s L}{E_s A_s} = \frac{P_c L}{E_c A_c}$$

已知 $A_s = A_c/10$，$E_s = 10E_c$；代入上式，得

$$P_s = P_c \tag{2}$$

于是，根据方程 (1)，我们得到

$$P_s = P_c = \frac{P}{2}$$

1.6-3 一长为 L 的 AB 杆，在它的两端用两根铅垂的绳索将其水平地悬挂着（如图所示）. 这两根绳索具有相同的长度和相同的横截面积；但 A 端的绳索是用弹性模量为 E_1 的材料制成的，B 端绳索的弹性模量则为 E_2. 略去 AB 杆的自重，试求在铅垂载荷 P 的作用下，欲使该杆仍保持水平，P 力作用线至杆端的距离 x 的公式（x 自 A 端计量）.

【解】

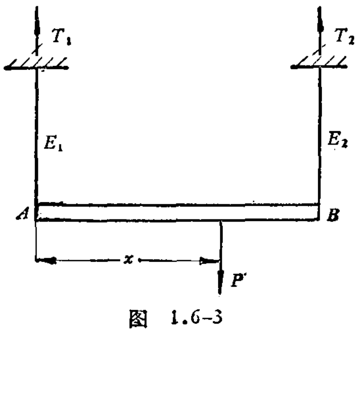


图 1.6-3

设绳索 AC 和 BD 所受的拉力分别为 T_1 和 T_2，根据平衡条件，得到

$$T_1 + T_2 = P \tag{1}$$

绳索 AC 在拉力 T_1 的作用下，其伸长量为

$$\delta_1 = \frac{T_1 L}{E_1 A}$$

绳索 BD 在拉力 T_2 的作用下，其伸长量为

$$\delta_2 = \frac{T_2 L}{E_2 A}$$

因为在铅垂载荷 P 的作用下，要求杆仍保持水平状态；所以位移协调条件为

$$\delta_1 = \delta_2$$

即

$$\frac{T_1 L}{E_1 A} = \frac{T_2 L}{E_2 A}$$

$$\therefore \quad T_1 = \frac{E_1 T_2}{E_2} \tag{2}$$

方程 (1)，(2) 联立解之，得到：

$$T_1 = \frac{E_1 P}{E_1 + E_2}, \qquad T_2 = \frac{E_2 P}{E_1 + E_2}$$

最后，根据对 A 点的力矩平衡方程，我们有

$$Px = T_2 L$$

于是，P 力作用线至杆端 A 的距离应为

$$x = \frac{T_2 L}{P} = \frac{E_2 L}{E_1 + E_2}$$

1.6-4 一变截面杆 AB（如图 a 所示），两端为刚性固定连结，其上作用有一对大小相等、方向相反的轴向力 P. 试求杆中间的应力（已知 AC 段和 DB 段的横截面积为 $A_1 = 500\text{mm}^2$，CD 中段的横截面积为 $A_2 = 750\text{mm}^2$，$P = 21\text{kN}$，$b = 3a = 375\text{mm}$）.

【解】

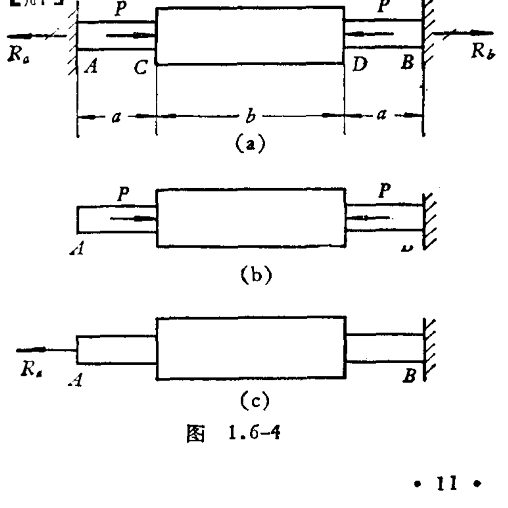


图 1.6-4