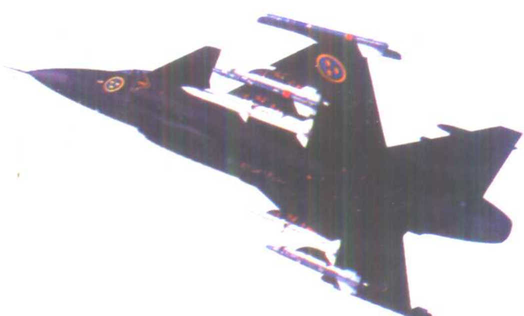
工科课程提高与应试丛书

- 涵盖课程重点及难点
- 精设典型题详解及评注
- 选配课程考试模拟及全真试卷

张凯院 徐仲 陆全 编

矩阵论

典型题解析及自测试题



西北工业大学出版社

矩阵论

典型题解析及自测试题

西北工业大学出版社

工科课程提高与应试丛书

矩阵论
典型题解析及自测试题

张凯院　徐　仲　陆　全　编

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书分为二部分。第一部分为典型题解析，通过简明的理论介绍与方法总结，以及对大量有代表性的典型例题进行的分析、求解和评注，揭示了矩阵论的解题方法与技巧。第二部分按课程要求给出了5套自测试题。附录为习题及自测试题答案。阅读本书，能够帮助研究生和本科高年级学生加深对矩阵理论的理解，提高数学推理能力和计算能力。

本书叙述简明，内容丰富，可作为理、工科研究生和本科高年级学生学习矩阵论课程的辅导书，也可供科技工作者参考。

出版发行：西北工业大学出版社
通信地址：西安市友谊西路127号 邮编：710072 电话：029—8493844
网 址：http://www.nwpup.com
印 刷 者：西安市向阳印刷厂
开 本：850 mm×1 168 mm 1/32
印 张：9.25
字 数：231千字
版 次：2001年3月 第1版 2001年3月 第1次印刷
书 号：ISBN 7-5612-1313-1/O·175
印 数：1～8 000册
定 价：13.00元

前　言

矩阵论是高等学校和研究院所理、工科研究生的一门重要基础课程。作为一种数学工具，矩阵理论在数学学科与其它科学技术领域都有广泛的应用。对于将来从事工程技术工作的研究生来说，掌握矩阵理论和方法是必不可少的。

矩阵论课程的理论性强，概念比较抽象，而且有独特的数学思维方式和解题技巧。编者根据多年从事矩阵论课程教学工作的经验，将该门课程的主要内容按知识点归纳为一些小专题，在简明的理论介绍及方法总结之后，通过对大量有代表性的典型例题进行分析、求解和评注，揭示了矩阵论的解题方法与技巧。阅读本书，能够帮助读者加深对矩阵理论的理解，提高数学推理能力和计算能力。

本书分为六章，由张凯院（第一、二、五章及自测试题）、徐仲（第三、四章）、陆全（第六章）分工编写，张凯院负责统稿。本书的出版得到了西北工业大学出版社的大力支持，在此表示衷心的感谢。

本书可作为理、工科研究生和本科高年级学生学习矩阵论课程的辅导书，也可供科技工作者参考。

由于作者水平所限，在编写中难免有疏漏和不妥之处，恳请读者指正。

编　者

2000 年 10 月于西北工业大学

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

符号说明

$\mathbf{R}(\mathbf{C})$	实(复)数集合
$\mathbf{R}^n(\mathbf{C}^n)$	实(复)n维向量集合
$\mathbf{R}^{m\times n}(\mathbf{C}^{m\times n})$	实(复)$m\times n$矩阵集合
$\mathbf{R}_r^{m\times n}(\mathbf{C}_r^{m\times n})$	秩为r的实(复)$m\times n$矩阵集合
$P[t]_n$	次数不超过n的一元多项式集合
V^n	n维线性空间
$W^{\perp}$	子空间W的正交补
$\dim V$	线性空间V的维数
$\mathrm{L}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m)$	由元素$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$生成的子空间
$\mathbf{0}$	零向量或线性空间的零元素
$\boldsymbol{e}_i$	第i个分量为1,其余分量为0的向量
$\boldsymbol{O}$	零矩阵
$\boldsymbol{I}$	单位矩阵
$\boldsymbol{E}_{ij}$	第i行j列元素为1,其余元素为0的矩阵
$\boldsymbol{J}$	Jordan标准形矩阵
$\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$	以$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$为对角元素的对角矩阵
$\det\boldsymbol{A}$	方阵$\boldsymbol{A}$的行列式
$\mathrm{tr}\boldsymbol{A}$	方阵$\boldsymbol{A}$的迹
$\rho(\boldsymbol{A})$	方阵$\boldsymbol{A}$的谱半径
$\mathrm{adj}\boldsymbol{A}$	方阵$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵
$\mathrm{rank}\boldsymbol{A}$	矩阵$\boldsymbol{A}$的秩
$R(\boldsymbol{A})$	矩阵$\boldsymbol{A}$的值域
$N(\boldsymbol{A})$	矩阵$\boldsymbol{A}$的零空间

$R(T)$	线性变换 T 的值域
$N(T)$	线性变换 T 的零空间
$\overline{\mathrm{vec}}(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 按行拉直的列向量
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的共轭转置
$\boldsymbol{A}^{+}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Moore-Penrose 逆
$\boldsymbol{A}^{(1)}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的$\{1\}$-逆
$\boldsymbol{A}^{(1,j)}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的$\{1,j\}$-逆
$A\{1\}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的$\{1\}$-逆的集合
$A\{1,j\}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的$\{1,j\}$-逆的集合
$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的直积
$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$	元素 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的内积
$\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{y}$	元素 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 正交
$\lVert\boldsymbol{x}\rVert_p$	向量 $\boldsymbol{x}$ 的 p-范数
$\lVert\boldsymbol{A}\rVert_{\mathrm{F}}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Frobenius 范数
$V_1\cap V_2$	子空间 V_1 与 V_2 的交
$V_1\cup V_2$	子空间 V_1 与 V_2 的并
V_1+V_2	子空间 V_1 与 V_2 的和
$V_1\oplus V_2$	子空间 V_1 与 V_2 的直和
$\mathrm{Re}(\lambda)$	复数 λ 的实部
$\mathrm{Im}(\lambda)$	复数 λ 的虚部
$\partial f(\lambda)$	多项式 $f(\lambda)$ 的次数

目　录

第一部分　典型题解析

第二部分　自测试题

附录　习题与自测试题答案

第一部分　典型题解析

第一章　线性空间与线性变换

线性空间是向量空间的推广，它在形式上具有多样性，但在理论上又有统一性．线性空间的核心内容是线性变换．在有限维线性空间中，线性变换及其运算可以转化为矩阵问题进行讨论，其联系方式涉及到三个重要矩阵，即两个基之间的过渡矩阵、线性变换在给定基下的矩阵以及欧氏（酉）空间中基的度量矩阵．

一、线性空间的判定

（一）内容提要

线性空间的概念建立于非空集合 V 与数域 K 之上，其中的加法运算和数乘运算（合称为线性运算）不仅要满足封闭性，即

（1）对于任意的 $x, y \in V$，有 $x + y \in V$；

（2）对于任意的 $x \in V$ 及任意的 $k \in K$，有 $kx \in V$.

而且还要满足相应的 8 条运算律．

在线性空间的判定中，确定零元素的方法如下：设 $y \in V$ 满足

$$x + y = x \quad （任意\ x \in V）$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

根据加法运算规则求出 $x+y$，代入上式左端可求出 y，那么 $\mathbf{0}=y$；确定 V 中元素 x 的负元素的方法如下：设 $y\in V$ 满足

$$x+y=\mathbf{0}$$

根据加法运算规则求出 $x+y$，代入上式左端可求出 y，那么 $(-x)=y$.

常用的线性空间有以下两类：

(1) 矩阵空间　给定自然数 m 和 n，数域 K 与集合

$$V=\{\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},\ a_{ij}\in K\}\tag{1.1}$$

对于 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 及 $k\in K$，定义加法运算和数乘运算如下：

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n},\quad k\boldsymbol{A}=(ka_{ij})_{m\times n}$$

那么，V 是 K 上的线性空间，称为矩阵空间．当 K 为实数域 $\mathbf{R}$ 时，将 V 记作 $\mathbf{R}^{m\times n}$；当 K 为复数域 $\mathbf{C}$ 时，将 V 记作 $\mathbf{C}^{m\times n}$. 特别地，称 $\mathbf{R}^{1\times n}(\mathbf{C}^{1\times n})$ 为行向量空间，记作 $\mathbf{R}^n(\mathbf{C}^n)$；称 $\mathbf{R}^{m\times 1}(\mathbf{C}^{m\times 1})$ 为列向量空间，也记作 $\mathbf{R}^m(\mathbf{C}^m)$.

(2) 多项式空间　给定自然数 n，数域 K 与集合

$$V=\{f(t)\mid f(t)=a_0+a_1t+\cdots+a_nt^n,\ a_i\in K\}\tag{1.2}$$

对于 $f(t)=a_0+a_1t+\cdots+a_nt^n$，$g(t)=b_0+b_1t+\cdots+b_nt^n$ 及 $k\in K$，定义加法运算和数乘运算如下：

$$f(t)+g(t)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)t+\cdots+(a_n+b_n)t^n$$

$$kf(t)=(ka_0)+(ka_1)t+\cdots+(ka_n)t^n$$

那么，V 是 K 上的线性空间，称为多项式空间，记作 $P[t]_n$.

(二) 典型题解析

例 1.1　设 V 是数域 K 上的线性空间，证明：

(1) 对于任意的 $x\in V$，有 $0x=\mathbf{0}$；

(2) 对于任意的 $k\in K$，有 $k\mathbf{0}=\mathbf{0}$；

(3) 对于任意的 $x\in V$，有 $(-1)x=-x$.

证　根据 V 中的线性运算规则,有

$$
\begin{aligned}
0\boldsymbol{x} &= 0\boldsymbol{x} + [\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x})] = (0\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}) + (-\boldsymbol{x}) = \\
&(0\boldsymbol{x} + 1\boldsymbol{x}) + (-\boldsymbol{x}) = (0+1)\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \\
&1\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k\boldsymbol{0} &= k\boldsymbol{0} + [k\boldsymbol{x} + (-k\boldsymbol{x})] = (k\boldsymbol{0} + k\boldsymbol{x}) + (-k\boldsymbol{x}) = \\
&k(\boldsymbol{0} + \boldsymbol{x}) + (-k\boldsymbol{x}) = k\boldsymbol{x} + (-k\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(-1)\boldsymbol{x} &= (-1)\boldsymbol{x} + [\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x})] = \\
&[(-1)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}] + (-\boldsymbol{x}) = \\
&[(-1)\boldsymbol{x} + 1\boldsymbol{x}] + (-\boldsymbol{x}) = \\
&[(-1) + 1]\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = 0\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \\
&\boldsymbol{0} + (-\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{x}
\end{aligned}
$$

例 1.2　设 $n \geqslant 1$,给定数域 $\mathbf{R}$ 与集合

$$V = \{f(t) \mid f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n, a_i \in \mathbf{R}, a_n \neq 0\}$$

对于通常的多项式加法和数乘运算,判断 V 是否构成 $\mathbf{R}$ 上的线性空间.

解　取 V 中的多项式 $f(t) = 1 + 2t^n$, $g(t) = 3 - 2t^n$,因为

$$f(t) + g(t) = 4 \overline{\in} V$$

即 V 中的加法运算不封闭,所以 V 不构成 $\mathbf{R}$ 上的线性空间.

【评注】　定义的加法运算与数乘运算之一不封闭,或者 8 条运算律之一不成立时,所论集合不构成线性空间.

例 1.3　设数域为 $\mathbf{R}$,集合为 $V = \{\boldsymbol{\alpha} \mid \boldsymbol{\alpha} = (\xi_1, \xi_2), \xi_i \in \mathbf{R}\}$. 对于 $\boldsymbol{\alpha} = (\xi_1, \xi_2)$, $\boldsymbol{\beta} = (\eta_1, \eta_2)$ 及 $k \in \mathbf{R}$,指定两种线性运算如下:

(1) 加法运算　$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2)$

数乘运算　$k \circ \boldsymbol{\alpha} = (k\xi_1, \xi_2)$

(2) 加法运算　$\boldsymbol{\alpha} \oplus \boldsymbol{\beta} = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2 + \xi_1\eta_1)$

数乘运算　$k \odot \boldsymbol{\alpha} = (k\xi_1, k\xi_2 + \frac{1}{2}k(k-1)\xi_1^2)$

分别判断 V 是否构成 $\mathbf{R}$ 上的线性空间.

解 在运算方式(1)之下，考虑 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1)\in V$ 及 $k,l\in\mathbf{R}$. 因为

$$(k+l)\circ\boldsymbol{\alpha}=(k+l,1)$$

$$k\circ\boldsymbol{\alpha}+l\circ\boldsymbol{\alpha}=(k,1)+(l,1)=(k+l,2)$$

所以元素对数加法的分配律不成立，故 V 不构成 $\mathbf{R}$ 上的线性空间．

在运算方式(2)之下，易见 $\boldsymbol{\alpha}\oplus\boldsymbol{\beta}\in V$，$k\odot\boldsymbol{\alpha}\in V$，即线性运算封闭．再设 $\boldsymbol{\gamma}=(t_1,t_2)\in V$ 及 $l\in\mathbf{R}$，则有

(ⅰ) $$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}\oplus(\boldsymbol{\beta}\oplus\boldsymbol{\gamma})&=(\xi_1,\xi_2)\oplus(\eta_1+t_1,\eta_2+t_2+\eta_1t_1)=\\&(\xi_1+(\eta_1+t_1),\xi_2+(\eta_2+t_2+\eta_1t_1)+\xi_1(\eta_1+t_1))=\\&((\xi_1+\eta_1)+t_1,(\xi_2+\eta_2+\xi_1\eta_1)+t_2+(\xi_1+\eta_1)t_1)=\\&(\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2+\xi_1\eta_1)\oplus(t_1,t_2)=\\&(\boldsymbol{\alpha}\oplus\boldsymbol{\beta})\oplus\boldsymbol{\gamma}\end{aligned}$$

(ⅱ) $$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}\oplus\boldsymbol{\beta}&=(\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2+\xi_1\eta_1)=\\&(\eta_1+\xi_1,\eta_2+\xi_2+\eta_1\xi_1)=\boldsymbol{\beta}\oplus\boldsymbol{\alpha}\end{aligned}$$

(ⅲ) 对于任意的 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，由 $\boldsymbol{\alpha}\oplus\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}$ 可得

$$(\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2+\xi_1\eta_1)=(\xi_1,\xi_2)$$

即 $$\xi_1+\eta_1=\xi_1,\quad \xi_2+\eta_2+\xi_1\eta_1=\xi_2$$

解之得 $\eta_1=0,\eta_2=0$，于是 $\mathbf{0}=(0,0)$ 满足 $\boldsymbol{\alpha}\oplus\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$.

(ⅳ) 对于任意给定的 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，由 $\boldsymbol{\alpha}\oplus\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$ 可得

$$(\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2+\xi_1\eta_1)=(0,0)$$

即 $$\xi_1+\eta_1=0,\quad \xi_2+\eta_2+\xi_1\eta_1=0$$

解之得 $\eta_1=-\xi_1,\eta_2=\xi_1^2-\xi_2$，于是 $-\boldsymbol{\alpha}=(-\xi_1,\xi_1^2-\xi_2)$ 满足 $\boldsymbol{\alpha}\oplus(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$.

(ⅴ) $$\begin{aligned}k\odot\boldsymbol{\alpha}\oplus k\odot\boldsymbol{\beta}&=(k\xi_1,k\xi_2+\frac{1}{2}k(k-1)\xi_1^2)\oplus\\&(k\eta_1,k\eta_2+\frac{1}{2}k(k-1)\eta_1^2)=\end{aligned}$$

$$(k\xi_1 + k\eta_1, k\xi_2 + \frac{1}{2}k(k-1)\xi_1^2 + k\eta_2 +$$

$$\frac{1}{2}k(k-1)\eta_1^2 + (k\xi_1)(k\eta_1)) =$$

$$(k(\xi_1 + \eta_1), k(\xi_2 + \eta_2) +$$

$$\frac{1}{2}k(k-1)(\xi_1^2 + \eta_1^2) + k^2\xi_1\eta_1) =$$

$$(k(\xi_1 + \eta_1), k(\xi_2 + \eta_2 + \xi_1\eta_1) +$$

$$\frac{1}{2}k(k-1)(\xi_1 + \eta_1)^2) =$$

$$k \odot (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2 + \xi_1\eta_1) = k \odot (\boldsymbol{\alpha} \oplus \boldsymbol{\beta})$$

(vi) $k \odot \boldsymbol{\alpha} \oplus l \odot \boldsymbol{\alpha} = (k\xi_1, k\xi_2 + \frac{1}{2}k(k-1)\xi_1^2) \oplus$

$$(l\xi_1, l\xi_2 + \frac{1}{2}l(l-1)\xi_1^2) =$$

$$(k\xi_1 + l\xi_1, k\xi_2 + \frac{1}{2}k(k-1)\xi_1^2 + l\xi_2 +$$

$$\frac{1}{2}l(l-1)\xi_1^2 + (k\xi_1)(l\xi_1)) =$$

$$((k+l)\xi_1, (k+l)\xi_2 +$$

$$\frac{1}{2}(k+l)(k+l-1)\xi_1^2) = (k+l) \odot \boldsymbol{\alpha}$$

(vii) $k \odot (l \odot \boldsymbol{\alpha}) = k \odot (l\xi_1, l\xi_2 + \frac{1}{2}l(l-1)\xi_1^2) =$

$$(kl\xi_1, kl\xi_2 + \frac{1}{2}kl(l-1)\xi_1^2 +$$

$$\frac{1}{2}k(k-1)(l\xi_1)^2) =$$

$$((kl)\xi_1, (kl)\xi_2 + \frac{1}{2}(kl)(kl-1)\xi_1^2) =$$

$$(kl) \odot \boldsymbol{\alpha}$$

(viii) $1\odot\boldsymbol{\alpha}=(1\times\xi_1,1\times\xi_2+\frac{1}{2}\times1\times(1-1)\xi_1^2)=$

$$(\xi_1,\xi_2)=\boldsymbol{\alpha}$$

即 8 条运算律成立．故 V 构成 $\mathbf{R}$ 上的线性空间，记作 $\mathbf{R}^2(\oplus\ \odot)$.

【评注】 给定了数域 K 与集合 V，如果指定的线性运算方式不同，那么，可能在一种运算方式之下 V 能构成 K 上的线性空间，而在另外一种运算方式之下 V 不能构成 K 上的线性空间；也可能在两种不同的运算方式之下 V 都不能构成 K 上的线性空间，或者 V 都能构成 K 上的线性空间（此时应视 V 为两个不同的线性空间）. 另外，对于一个具体的线性空间，如果指定的线性运算方式不是通常的，那么，相应的零元素和负元素可能与通常的形式不同．比如，本例给出的线性空间 $\mathbf{R}^2(\oplus\ \odot)$ 中的负元素形式与通常的负元素形式不同．

二、线性子空间的判定

（一）内容提要

线性子空间简称为子空间．子空间的概念建立于线性空间 V 的非空子集 V_1 之上．如果 V_1 对 V 中定义的线性运算封闭，V_1 就构成 V 的子空间．子空间本身也是一个线性空间．

常用的子空间有以下 6 类：

(1) 生成子空间　给定数域 K 上的线性空间 V 中的元素 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$，则

$$\mathrm{L}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m)=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{x}_m,k_i\in K\}\tag{1.3}$$

是 V 的子空间，称为由 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 生成的子空间．

(2) 矩阵的值域　设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{m\times n}$ 的 n 个列向量为 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$，则

$$R(\boldsymbol{A})=\mathrm{L}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n)=\{\boldsymbol{y}\mid\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\in\mathbf{C}^n\}\tag{1.4}$$

是 $\mathbf{C}^m$ 的子空间，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的值域．

（3）矩阵的零空间　设 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{m\times n}$，则

$$N(\boldsymbol{A}) = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^n\} \tag{1.5}$$

是 $\mathbf{C}^n$ 的子空间，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的零空间．

（4）线性变换的值域　设 T 为线性空间 V 的线性变换，则

$$R(T) = \{\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y} = T\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \in V\} \tag{1.6}$$

是 V 的子空间，称为线性变换 T 的值域．

（5）线性变换的核　设 T 为线性空间 V 的线性变换，则

$$N(T) = \{\boldsymbol{x} \mid T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{x} \in V\} \tag{1.7}$$

是 V 的子空间，称为线性变换 T 的核．

（6）线性变换的特征子空间　设 λ 为线性空间 V 的线性变换 T 的特征值，则

$$V_\lambda = \{\boldsymbol{x} \mid T\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \in V\} \tag{1.8}$$

是 V 的子空间，称为线性变换 T 的特征子空间．

（二）典型题解析

例 1.4　判断 $\mathbf{R}^{m\times n}$ 的下列子集是否构成子空间：

（1）　$V_1 = \{\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}, \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} = 1\}$；

（2）　$V_2 = \{\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}, \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} = 0\}$．

解　（1）设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n} \in V_1$，则有 $\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$，因为

$$2\boldsymbol{A} = (2a_{ij})_{m\times n}, \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(2a_{ij}) = 2$$

所以 $2\boldsymbol{A} \overline{\in} V_1$，即 V_1 对数乘运算不封闭，故 V_1 不是子空间．

（2）因为 $\boldsymbol{O}_{m\times n} \in V_2$，所以 V_2 非空．设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n} \in V_2$，$\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{m\times n} \in V_2$，则有

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com