工程力学手册

袁文伯　主编

煤炭工业出版社

工 程 力 学 手 册

袁文伯教授 主编

煤 炭 工 业 出 版 社

责任编辑：鲍 仪 王闻升
封面设计：郑玉水

工 程 力 学 手 册

袁文伯 教授 主编

*

煤炭工业出版社 出版
（北京安定门外和平里北街21号）
煤炭工业出版社印刷厂 印刷
新华书店北京发行所 发行

*

开本787×1092 1/16 印张 58 1/2
字数1404千字 印数1—4,969
1988年10月第1版 1988年10月第1次印刷
ISBN 7-5020-0093-3/TD·89
书号 2848 定价 19.65元

主　　编： 袁文伯

副 主 编： 张少如　钟奉俄

编 写 人： 陈光寅（第一篇，第1～4章）

钟奉俄（第一篇，第 5 章）

张少如（第二篇，第1～11、22章、附录）

廖明治（第二篇，第12、14、15、18～20、23章）

丛敬同（第二篇，第13章）

蔡大文（第二篇，第16、17、25、26章）

徐子善（第二篇，第21章）

赵文杰（第二篇，第24章）

吴生玺（第二篇，第27章）

李忠真（第三篇）

剡鸿甲（第四篇）

前　言

本手册内容包括结构计算和机械设计中经常遇到的原理、方法、公式和有关技术资料。

工程技术人员在结构计算和机械设计中，以及解决某些技术问题时，常常需要应用工程力学的原理和公式以及有关技术资料数据。但工程力学的内容非常广泛，公式十分繁多，散见于各种工程和力学的图书资料之中，卷帙浩繁，查阅非常费时费事，给技术人员的工作带来很大麻烦和困难。我们编写这本手册的目的和动机就是想把工程设计和计算中常用的力学原理和公式从各种图书资料中搜集出来，加以整理，集中在一起；同时还收集了一些工程设计计算中常用的各种工程材料规格、品种，以及常用的技术数据等；我们还尽量做到使这些计算方法、工程材料规格和技术数据符合我国现行规范的规定和适合我国国情，便于设计人员和技术人员的应用。工程技术人员有了这样一本手册，对于一般的工程计算问题都可以应用它来解决。手册中有刚体力学，分析力学、材料力学、弹塑性力学、结构力学、板壳理论、薄壁杆件、极限载荷、土压力、断裂力学、机械振动及有限单元法等学科的基本内容和基本理论及主要的计算公式，与计算有关的常用工程材料规格和技术数据等方面的内容。工程技术人员在设计计算时基本上可以在这本手册中找到他们所需要的计算公式和方法以及有关技术资料数据，免得去查许多种图书资料才能找寻到解决问题的方法。这本手册，应用方便，可以成为工程设计人员的常年顾问。当然，由于篇幅所限，只能包括常用的主要内容，不能要求它包罗万象，把所有的内容都包括无遗。内容太多了，会走向反面，对于一般应用反而会感到不那么方便。遇到比较复杂的计算问题，应用本手册不能解决时，可以去查阅有关专门文献。

余燿胜同志对本书的第一篇、第三篇和第四篇进行校阅，对全部公式都作过核对，并提出不少建设性意见和修改。程品三同志和陈进同志对第二篇的部分进行过校阅、改正、核对和补充，并提出了不少建设性意见。在此向他们表示致谢。

由于我们水平所限，缺点和错误之处，在所难免，敬希读者批评指正。

编　者

一九八五年十二月三十日

目　录

第一篇　刚 体 力 学

第一章　静力学……………………………1
　第一节　静力学基础……………………1
　第二节　力系的合成……………………4
　第三节　组合体的重心…………………5
　第四节　平衡条件与平衡方程…………6
　第五节　柔索……………………………6
　第六节　摩擦……………………………7
　第七节　图解静力学原理………………10
第二章　运动学……………………………11
　第一节　点的运动………………………11
　第二节　点的合成运动…………………15
　第三节　刚体的平动和转动……………15
　第四节　刚体的平面运动………………17
　第五节　刚体的定点转动………………19
　第六节　绕相交两轴转动的合成………20
第三章　刚体质量分布的几何性质…21
　第一节　质心……………………………21
　第二节　转动惯量………………………22
　第三节　惯性主轴、回转半径…………23
　第四节　常见均质物体的转动惯量与质心……………………………24
第四章　动力学……………………………29
　第一节　质点动力学……………………29
　第二节　基本定理………………………32
　第三节　动静法…………………………38
　第四节　碰撞……………………………39
　第五节　变质量动力学…………………41
第五章　分析力学基础……………………43
　第一节　约束……………………………43
　第二节　广义坐标………………………43
　第三节　伪坐标…………………………44
　第四节　虚位移…………………………45
　第五节　理想约束………………………46
　第六节　动力学普遍方程和中心方程…47
　第七节　虚位移原理……………………48
　第八节　几个基本的力学量……………49
　第九节　拉格朗日方程…………………51
　第十节　冲击的拉格朗日方程…………53
　第十一节　循环坐标……………………55
　第十二节　哈密顿正则方程……………56
　第十三节　波尔茨曼-哈默方程………58
　第十四节　阿沛尔方程…………………61
　第十五节　哈密顿原理…………………64
　第十六节　凯恩方程……………………66
参考文献……………………………………70

第二篇　变 形 固 体 力 学

第一章　材料的力学性质…………………71
　第一节　低碳钢拉伸时的力学性质……71
　第二节　铸铁压缩时的力学性质………73
　第三节　其它材料的拉伸或压缩试验结果……………………………73
　第四节　影响材料力学性质的因素蠕变和松弛的概念………………75
　第五节　许用应力与安全系数…………77
　第六节　常用材料的力学性质…………77
第二章　平面图形的几何性质……………101
　第一节　平面图形几何性质的定义与公式……………………………101
　第二节　惯性矩的近似公式和图解法……………………………103
　第三节　平面图形几何性质计算用表……………………………106
第三章　应力与应变分析·强度理论……………………………150
　第一节　概述……………………………150
　第二节　平面应力状态分析……………151
　第三节　空间应力状态分析……………156
　第四节　应变状态分析…………………158
　第五节　应力状态与应变状态的关系……………………………160

第六节 强度理论 ……………………162

第四章 直杆的轴向拉伸与压缩……164

第一节 等截面杆的计算 ……………164

第二节 考虑自重时的计算 …………166

第三节 变截面杆的计算 ……………166

第四节 钢丝绳计算 …………………170

第五节 材料不服从虎克定律时的拉伸和压缩 ……………………171

第五章 剪切与扭转 ………………172

第一节 剪切变形与剪切计算 ………172

第二节 连接件的假定计算 …………173

第三节 圆形截面杆的扭转 …………180

第四节 非圆形截面杆的扭转 ………181

第五节 材料不服从虎克定律时的扭转 …………………………183

第六章 弯曲 ………………………183

第一节 弯曲时的内力和内力图 ……184

第二节 等截面梁弯曲时的应力和强度条件 ………………………209

第三节 等截面梁弯曲时的变形和刚度条件 ………………………214

第四节 高梁、短梁、薄腹梁等考虑剪切变形时的挠度计算 ……230

第五节 非均匀温度变化对梁的变形的影响 ………………………232

第六节 变截面梁 …………………232

第七节 宽翼缘薄壁非对称截面梁及其弯曲中心 …………………236

第八节 组合梁 ……………………238

第九节 非线性弹性弯曲 …………241

第七章 组合变形 …………………242

第一节 组合变形问题的计算 ………242

第二节 斜弯曲 ……………………242

第三节 弯曲与拉伸或压缩的组合 …244

第四节 弯曲与扭转的组合 …………247

第八章 动应力 ……………………249

第一节 匀变速直线运动杆 …………249

第二节 匀角速回转杆 ……………250

第三节 匀角加速回转杆 …………252

第四节 变加速运动杆 ……………252

第五节 飞轮 ………………………253

第六节 旋转圆盘 …………………255

第七节 实心和空心的旋转轴 ………259

第八节 受冲击载荷作用的杆 ………260

第九节 应力波的概念 ……………262

第九章 交变应力 …………………263

第一节 概述 ………………………263

第二节 材料的持久极限 …………264

第三节 影响持久极限的因素 ………266

第四节 构件的疲劳强度计算 ………271

第五节 不规则交变应力下的强度条件 ……………………………276

第十章 平面曲梁 …………………280

第一节 大曲率梁的应力 …………280

第二节 大曲率梁的位移 …………288

第三节 圆环、链环、活塞环及吊钩的计算 …………………………289

第四节 矩形和圆形截面曲梁受垂直于曲率平面的内载荷作用时的应力 ……………………………291

第十一章 弹簧 ……………………293

第一节 螺旋弹簧 …………………293

第二节 板弹簧 ……………………299

第三节 其它金属弹簧 ……………300

第十二章 薄壁杆件扭转 …………303

第一节 概述 ………………………303

第二节 薄壁截面的扇性几何特性计算 ……………………………304

第三节 薄壁杆件纯扭转时的应力和变形计算 ……………………315

第四节 薄壁杆件约束扭转时的内力与扭转角计算 ………………317

第五节 薄壁杆件约束扭转时的应力计算 ………………………325

第十三章 弹性与塑性理论基础 …329

第一节 弹性理论的基本方程 ………330

第二节 弹性理论问题的解法 ………343

第三节 塑性理论概述 ……………348

第四节 弹性理论问题的常用公式 …355

第十四章 能量法 …………………452

第一节 应变能和应变余能、势能和余能 ……………………………453

第二节 基于虚位移原理的能量定理………………………………456

第三节　基于虚力原理的能量定理 …457
第四节　线性弹性体系的互等定理 …458
第五节　能量法求结构位移 …………460
第六节　能量法解超静定结构 ………465
第七节　能量法求压杆的临界载荷 …469
第十五章　连续梁与井字梁 …………472
第一节　弯矩分配法计算连续梁 ……472
第二节　三弯矩方程计算连续梁 ……480
第三节　五弯矩方程计算柔性支座连续梁 ……………………………488
第四节　等跨等截面连续梁的计算系数 ……………………………490
第五节　不等跨等截面连续梁的最大弯矩系数 ……………………493
第六节　井字梁的最大弯矩及剪力系数 ……………………………495
第七节　三双力矩方程计算受扭薄壁连续梁 ………………………496
第十六章　桁架 ……………………………501
第一节　桁架计算的基本假定 ………501
第二节　静定桁架的内力计算 ………502
第三节　桁架的位移计算 ……………505
第四节　超静定桁架 …………………506
第五节　桁架的次应力 ………………508
第十七章　刚架 ……………………………509
第一节　静定刚架的内力计算 ………509
第二节　刚架的位移计算 ……………509
第三节　力法计算超静定刚架 ………513
第四节　位移法计算超静定刚架 ……514
第十八章　拱与圆环 ……………………530
第一节　概述 ……………………………530
第二节　三铰拱的计算 ………………532
第三节　双铰等截面圆弧形拱的计算…………………………………533
第四节　双铰变截面抛物线形拱的计算 ……………………………533
第五节　双铰折线形拱的计算 ………540
第六节　无铰等截面圆弧形拱的计算…………………………………542
第七节　无铰变截面抛物线形拱的计算…………………………………545
第八节　无铰等截面椭圆弧形拱的计算…………………………………548
第九节　弹性固定无铰圆弧形拱在对称载荷下的计算 ………………548
第十节　离壁式直墙圆弧形拱在对称载荷下的计算 …………………554
第十一节　圆环的计算 ………………557
第十九章　弹性地基梁 ………………560
第一节　按地基反力为直线分布假设计算弹性地基梁 ………………560
第二节　按温克尔假设计算弹性地基梁 ……………………………561
第三节　按地基为弹性半无限平面体计算弹性地基梁 ………………573
第二十章　薄板 ……………………………576
第一节　板的基本关系式 ……………577
第二节　矩形板的位移与内力计算系数 ……………………………579
第三节　等跨连续板的实用计算 ……592
第四节　圆形板的位移与内力计算公式 ……………………………597
第五节　环形板的位移与内力计算公式 ……………………………600
第六节　杂形板的内力（或应力）与位移计算 ………………………608
第二十一章　壳体 …………………………611
第一节　概述 ……………………………611
第二节　壳体无矩应力状态存在的条件按无矩理论计算壳体 ……612
第三节　用应力函数计算壳体内力 …623
第四节　按有矩理论计算圆柱壳的轴对称问题 ………………………626
第二十二章　厚壁圆筒 …………………633
第一节　受内压和外压作用的厚壁圆筒 ……………………………633
第二节　组合圆筒 ……………………635
第三节　厚壁圆筒的强度计算 ………638
第四节　受压的厚壁球 ………………641
第二十三章　稳定 ………………………641
第一节　弹性稳定概念 ………………641
第二节　轴心受压杆的弹性稳定 ……641
第三节　轴心受压杆的弹塑性稳定 …650
第四节　纵横弯曲 ……………………652

第五节　钢结构轴心受压和偏心受压构件的稳定 ………………655
第六节　圆环和拱的弹性稳定 ………670
第七节　梁、圆环和拱的侧向弹性稳定 ……………………………672
第八节　薄板和薄壳的弹性稳定……672
第二十四章　局部应力 ………………685
第一节　应力集中的概念……………685
第二节　理论集中系数………………685
第三节　有效集中系数………………696
第四节　降低应力集中系数的措施…698
第五节　接触应力的计算……………698
第二十五章　结构的极限载荷………706
第一节　结构极限载荷的基本知识 …706
第二节　极限弯矩和塑性铰 …………706
第三节　静定梁的极限载荷 …………707
第四节　超静定梁的极限载荷 ………708
第五节　比例加载的一般定理 ………712
第六节　圆轴扭转时的极限载荷 ……713
第七节　刚架的极限载荷 ……………714
第八节　拱的极限载荷 ………………716
第九节　厚壁圆筒的极限压力 ………716
第二十六章　土压力和挡土墙 ………717
第一节　一般概念 ……………………717
第二节　无粘性土的土压力 …………718
第三节　粘性土的土压力 ……………724
第四节　总压力图及压力集度图 ……727
第五节　挡土墙的强度计算 …………728
第六节　挡土墙的稳定性计算 ………729
第二十七章　断裂力学基础 …………730
第一节　裂纹尖端应力场和位移场的类型 …………………………731
第二节　应力强度因子及断裂判据 …732
第三节　线性弹性断裂力学应用举例…734
第四节　能量释放率 …………………737
第五节　裂纹尖端的塑性区 …………738
第六节　裂纹扩展阻抗　（R曲线） …740
第七节　裂纹张开位移 ………………741
第八节　J积分 ………………………742
第九节　最大拉应力理论 ……………743
第十节　应变能密度理论 ……………744
参考文献………………………………752

第三篇　机　械　振　动

第一章　机械振动概述 ………………754
第一节　机械振动 ……………………754
第二节　机械振动的分类 ……………755
第三节　机械振动的表示方法 ………755
第二章　机械系统的物理参数 ………757
第一节　实际机械系统的简化 ………757
第二节　振动系统的刚度与阻尼系数 ……………………………758
第三章　机械系统的自由振动 ………765
第一节　单自由度振动系统 …………766
第二节　二自由度振动系统 …………774
第三节　多自由度系统 ………………777
第四节　计算多自由度系统固有频率的近似方法 …………………785
第四章　机械系统的强迫振动 ………798
第一节　单自由度系统的响应 ………798
第二节　两自由度系统的响应 ………808
第三节　多自由度系统的响应 ………812
第五章　弹性体振动 …………………816
第一节　自由振动 ……………………817
第二节　强迫振动 ……………………821
第三节　求固有频率的近似方法 ……823
参考文献………………………………826

第四篇　有　限　单　元　法

第一章　杆系结构有限单元法 ………782
第一节　平面杆系单元 ………………827
第二节　空间杆系单元 ………………844
第二章　弹性力学平面问题有限单元法 ……………………………850
第一节　常应变三角形单元 …………850
第二节　三角形单元的面积坐标 ……866
第三节　六结点二次三角形单元 ……868
第四节　矩形单元 ……………………868
第五节　等参单元 ……………………868
第三章　薄板的有限单元法 …………877
第一节　矩形薄板单元 ………………877
第二节　三角形薄板单元 ……………884

第四章　空间问题有限单元法 ………887
　第一节　轴对称问题有限单元法 ……887
　第二节　一般空间问题有限单元法 …890
第五章　有限单元法电算程序举例 ……………………………894
参考文献 ………………………………………910
附录　常用资料和数据……………………………………………………………911

第一篇 刚 体 力 学

第一章 静 力 学

第一节 静力学基础

1．力

力是物体间的相互机械作用；有大小、方向和作用点；可以用一个定位矢量表示。

2．力的平行四边形定律

作用在物体上同一点的两个力$\mathbf{F}_1$和$\mathbf{F}_2$，可用作用在同一点的一个力$\mathbf{R}$代替。$\mathbf{R}$称为$\mathbf{F}_1$和$\mathbf{F}_2$的合力。它的大小和方向由以$\mathbf{F}_1$和$\mathbf{F}_2$为边构成的平行四边形的对角线所决定（图1-1-1）。力不但可以用矢量表示，而且服从矢量的加法运算。由矢量图可知：

$$\mathbf{R}=\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2$$

$$R=\sqrt{F_1^2+F_2^2+2F_1F_2\cos\alpha}$$

$$\sin\beta=\frac{F_2}{R}\sin\alpha$$

3．合力

作用在同一物体上同一点的n个力$\mathbf{F}_1$、$\mathbf{F}_2$、…、$\mathbf{F}_n$，可用作用在同一点的一个力$\mathbf{R}$代替。$\mathbf{R}$称为$\mathbf{F}_1$、$\mathbf{F}_2$、…、$\mathbf{F}_n$的合力，其大小和方向为：

$$\mathbf{R}=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i \qquad (1\text{-}1\text{-}1)$$

4．平衡的基本定律

使物体保持平衡的力系称为平衡力系，平衡力系的合力为零。作用在同一物体上、大小相等、方向相反并且共线的两个力，其合力为零，这是最简单的平衡力系。

共面的三力平衡时，其作用线必须交于一点或互相平行（图1-1-2）。

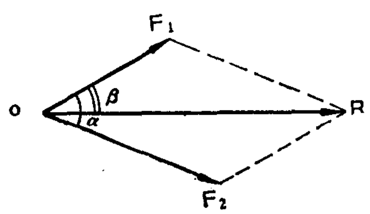

图 1-1-1

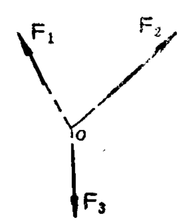

图 1-1-2

5．平衡力系迭加原理

在作用于刚体上的任一力系上，迭加一个平衡力系，不会改变原力系对刚体的作用。由此推知，作用在刚体上的力可以沿其作用线移动。

6．力的投影

力$\mathbf{F}$在任意轴ox上的投影为：

$$X = \mathrm{F}\cos\alpha$$

式中　α——力F与ox轴正方向的夹角（图1-1-3）。

力F在任意平面π上的投影F_π是矢量，它的模

$$\mathrm{F}_\pi = \mathrm{F}\cos\theta$$

式中　θ——力F的作用线与π平面的夹角；

而F始末两点A和B在平面π上的投影a和b决定F_π的方向（图1-1-4）。

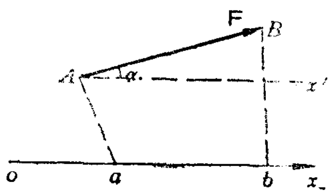

图 1-1-3

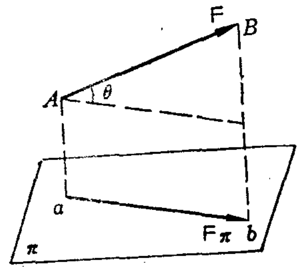

图 1-1-4

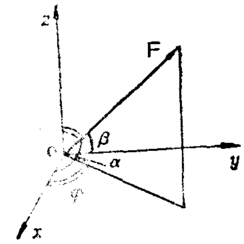

图 1-1-5

力F在笛卡儿坐标轴（图1-1-5）上的投影是：

$$\left.\begin{aligned} X &= \mathrm{F}\cos\alpha \\ Y &= \mathrm{F}\cos\beta \\ Z &= \mathrm{F}\cos\gamma \end{aligned}\right\} \quad (1\text{-}1\text{-}2)$$

或

$$X = \mathrm{F}\sin\gamma\cos\varphi$$

$$Y = \mathrm{F}\sin\gamma\sin\varphi$$

$$Z = F\cos\gamma$$

式中　α、β、γ——力F的方向角；

φ——过力F的作用线且垂直于oxy平面与oxz平面的夹角。

若已知力F在笛卡儿坐标轴上的投影X、Y、Z，则力F的模和方向余弦为：

$$\mathrm{F} = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{X}{\mathrm{F}}$$

$$\cos\beta = \frac{Y}{\mathrm{F}}$$

$$\cos\gamma = \frac{Z}{\mathrm{F}}$$

7. 合力投影定理

设

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i$$

则

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad (1\text{-}1\text{-}3)$$

$$\mathbf{R}_\pi = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_{i\pi} \tag{1-1-4}$$

式中　R_x和$\mathbf{R}_\pi$——合力$\mathbf{R}$在ox轴上和π平面上的投影。

8．力矩

力$\mathbf{F}$对o点之矩简称为力矩。力矩是力$\mathbf{F}$使物体绕o点转动效果的度量，它是一个定位矢量，用$\mathbf{m}_0(\mathbf{F})$表示

$$\mathbf{m}_0(\mathbf{F}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

式中　$\mathbf{r}$——力F作用点A的矢径（图1-1-6）。

在平面力系中，力矩可用一代数量$m_0(\mathbf{F})$表示

$$m_0(\mathbf{F}) = \pm Fd \tag{1-1-5}$$

式中　d——o点到力$\mathbf{F}$作用线的垂直距离，称为力臂；

±号——表示力矩的转动方向，一般以＋号表示逆时针方向，－号表示顺时针方向。

力$\mathbf{F}$对任意轴oz之矩

$$m_z(\mathbf{F}) = \pm F_{xy} h \tag{1-1-6}$$

式中　F_{xy}——力$\mathbf{F}$在oxy平面上的投影$\mathbf{F}_{xy}$的模；

h——o点到力$\mathbf{F}_{xy}$作用线的垂直距离；

±号——表示力$\mathbf{F}$对oz轴之矩的转动方向，一般从oz轴正方向看，以＋号表示$\mathbf{F}_{xy}$对o点之矩为逆时针方向，－号表示顺时针方向（图1-1-7）。

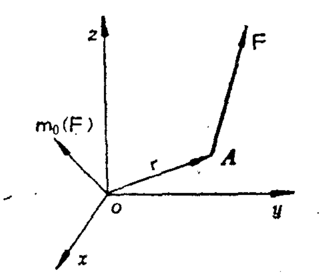

图 1-1-6

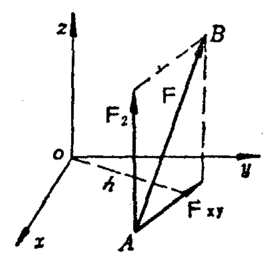

图 1-1-7

9．合力矩定理

设
$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i$$

则
$$\mathbf{m}_0(\mathbf{R}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{m}_0(\mathbf{F}_i) \tag{1-1-7}$$

$$m_x(\mathbf{R}) = \sum_{i=1}^{n} m_x(\mathbf{F}_i) \tag{1-1-8}$$

式中　x——ox轴。

10．力矩矢投影定理

力$\mathbf{F}$对o点之矢$\mathbf{m}_0(\mathbf{F})$，在过o点的任意轴ox上的投影，等于力$\mathbf{F}$对该轴的矩，即

$$[\mathbf{m}_0(\mathbf{F})]_x = m_x(\mathbf{F}) \tag{1-1-9}$$

11．力偶

大小相等、方向相反、不共线的一对力（**F**，**F′**）称为力偶。二力作用线间的距离d称为力偶臂。一个力偶只能使物体转动，其转动效果用力偶矩度量。力偶矩是一个自由矢量，用矢量**m**表示，它的模为Fd，方位垂直于力偶作用面，指向由右手规则确定（图1-1-8）。

数个力偶$\mathbf{m}_1$、$\mathbf{m}_2$、…$\mathbf{m}_n$作用在同一刚体上时，可以合成为一个力偶**m**，这合力偶等于各分力偶的矢量和：

$$\mathbf{m}=\mathbf{m}_1+\mathbf{m}_2+\cdots+\mathbf{m}_n \tag{1-1-10}$$

在平面情况下，力偶矩可以表示为代数量

$$m=\pm Fd$$

式中 ±号——表示力偶的转动方向，一般以＋号表示逆时针方向，－号表示顺时针方向。

n个力偶m_1、m_2、…、m_n的合力偶m为：

$$m=\sum_{i=1}^{n} m_n$$

力偶不可能用一个力来代替。力偶在力偶矩不变的条件下，在平行平面上移动，或在其自身平面内转动移动，或同时改变力和力偶臂的大小，都不影响对刚体的作用。

12．力的平移定理

如果将作用在刚体上A点的力$\mathbf{F}_A$，平行移动到B点为$\mathbf{F}_B$（$\mathbf{F}_B=\mathbf{F}_A$），并加一个力偶，其力偶矩等于力$\mathbf{F}_A$对$B$点的矩，则不改变力$\mathbf{F}_A$对刚体的作用（图1-1-9）。

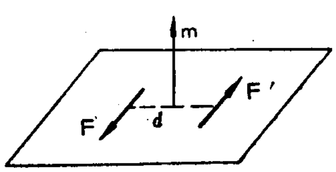

图 1-1-8

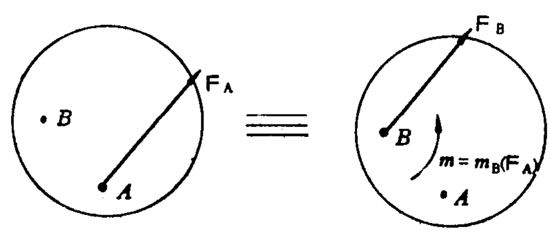

图 1-1-9

第二节　力系的合成

汇交力系$\mathbf{F}_1$、$\mathbf{F}_2$、…、$\mathbf{F}_n$的合力**R**作用在汇交点o上（图1-1-10），其大小和方向为：

$$\mathbf{R}=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_n$$

任意力系$\mathbf{F}_1$、$\mathbf{F}_2$、…、$\mathbf{F}_n$各力的矢量和记为$\mathbf{R}'$，

$$\mathbf{R}'=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i \tag{1-1-11}$$

$\mathbf{R}'$称为力系的主矢；力系各力对任意点o之矩的矢量和记为$\mathbf{M}_0$（在平面力系中为代数和M_0），

$$\mathbf{M}_0=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{m}_0(\mathbf{F}_i) \qquad (1\text{-}1\text{-}12)$$

$\mathbf{M}_0$称为力系对o点的主矩。$\mathbf{R}'$是自由矢量，$\mathbf{M}_0$是定位矢量。

对于任何给定的力系，都可按照$\mathbf{R}'$和$\mathbf{M}_0$确定其合成结果。合成结果如下：

1）当$\mathbf{R}'=0$，$\mathbf{M}_0\neq 0$时，合成为合力偶$\mathbf{m}$，$\mathbf{m}=\mathbf{M}_0$；

2）当$\mathbf{R}'\neq 0$，$\mathbf{M}_0=0$时，合成为合力$\mathbf{R}$，$\mathbf{R}=\mathbf{R}'$，作用线通过o点；

3）当$\mathbf{R}'\neq 0$，$\mathbf{M}_0\neq 0$时，

（1）若$\mathbf{R}'\perp\mathbf{M}_0$，合成为合力$\mathbf{R}$（图1-1-11），$\mathbf{R}=\mathbf{R}'$，作用线通过$o'$点，$oo'$线段与$\mathbf{R}$的作用线垂直，且

$$oo'=\frac{\mathrm{M}_0}{\mathrm{R}'}$$

$$\mathbf{m}_0(\mathbf{R})=\mathbf{M}_0$$

（2）若$\mathbf{R}'\parallel\mathbf{M}_0$，合成为一个力螺旋（图1-1-12）。其中力偶$\mathbf{m}=\mathbf{M}_0$；力$\mathbf{R}=\mathbf{R}'$，而作用线通过$o$点。

（3）若$\mathbf{R}'$与$\mathbf{M}_0$正方向的夹角为θ（$\theta<\pi$），合成为一个力螺旋（图1-1-13）。力偶$\mathbf{m}$，其模

$$m=\mathrm{M}_0|\cos\theta|$$

方位与$\mathbf{R}'$相同，方向由θ决定：$0<\theta<\frac{\pi}{2}$，$\mathbf{m}$与$\mathbf{R}'$同向；$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$，$\mathbf{m}$与$\mathbf{R}'$反向。力$\mathbf{R}=\mathbf{R}'$，作用线通过o'点，oo'线段与$\mathbf{R}$的作用线垂直，且

$$oo'=\frac{\mathrm{M}_0\sin\theta}{R'}$$

$$|\mathbf{m}_0(\mathbf{R})|=\mathrm{M}_0\sin\theta$$

（4）当$\mathbf{R}'=0$，$\mathbf{M}_0=0$时，平衡。

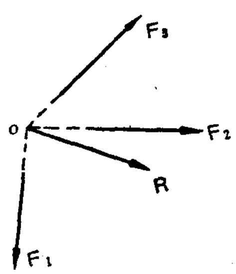

图 1-1-10

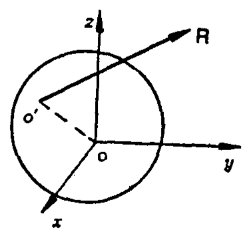

图 1-1-11

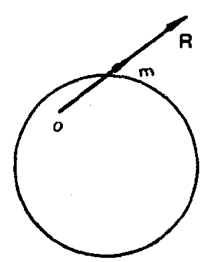

图 1-1-12

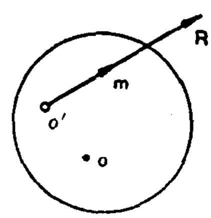

图 1-1-13

第三节　组合体的重心

在地球表面附近的物体，其每一微小部分都受到重力作用，这些重力形成一个重力系。由于一般物体的尺寸比它到地心的距离小得多，这重力系可视为同向平行力系。平行力系的合力作用点，称为物体的重心。物体的重心与它的质心位置重合。关于质心的定义见第三章。

某物体由n部分组成，已知每一部分的重量是G_i（$i=1, \cdots, n$），重心坐标是x_i，y_i，z_i，则该物体重心C的坐标是：

$$\left.\begin{aligned} x_c &= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i G_i}{G} \\ y_c &= \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i G_i}{G} \\ z_c &= \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i G_i}{G} \end{aligned}\right\} \tag{1-1-13}$$

式中　$G=\sum_{i=1}^{n} G_i$。

第四节　平衡条件与平衡方程

作用在刚体上的力系，平衡的必要充分条件是：

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{R}'=0 \\ &\mathbf{M}_0=0 \ (\text{对平面力系为} M_0=0) \end{aligned}\right\} \tag{1-1-14}$$

平面一般力系和空间一般力系的独立的平衡方程数目分别是三个和六个。平衡方程的形式如下：

表 1-1-1　平面一般力系平衡方程

名　称	基　本　式	二　点　式	三　点　式
方　程	$\sum_{i=1}^{n} X_i=0$ $\sum_{i=1}^{n} Y_i=0$ $\sum_{i=1}^{n} m_0(\mathbf{F}_i)=0$	$\sum_{i=1}^{n} X_i=0$ $\sum_{i=1}^{n} m_A(\mathbf{F}_i)=0$ $\sum_{i=1}^{n} m_B(\mathbf{F}_i)=0$ AB不垂直于x轴	$\sum_{i=1}^{n} m_A(\mathbf{F}_i)=0$ $\sum_{i=1}^{n} m_B(\mathbf{F}_i)=0$ $\sum_{i=1}^{n} m_C(\mathbf{F}_i)=0$ A、B、C三点不共线

约束反力一般是未知的。若平衡方程的数目不少于约束反力的个数，那么，约束反力总可以通过平衡方程决定。这种问题称为静定的。反之称为静不定的。

第五节　柔　　索

对于拉得很紧的柔索，用两种分布力计算的柔索拉力和索长相差不大。因此，对于张紧的柔索，为了简化计算，可将悬链线近似地看作抛物线。

表 1-1-2 空间力系平衡方程

力系类型	汇交力系	平行力系	一般力系	
方程	$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0$	$\sum_{i=1}^{n} Z_i = 0$	$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0$	$\sum_{i=1}^{n} m_x(\mathbf{F}_i) = 0$
	$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0$	$\sum_{i=1}^{n} m_x(\mathbf{F}_i) = 0$	$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0$	$\sum_{i=1}^{n} m_y(\mathbf{F}_i) = 0$
	$\sum_{i=1}^{n} Z_i = 0$	$\sum_{i=1}^{n} m_y(\mathbf{F}_i) = 0$	$\sum_{i=1}^{n} Z_i = 0$	$\sum_{i=1}^{n} m_z(\mathbf{F}_i) = 0$
		z轴不垂直于力		

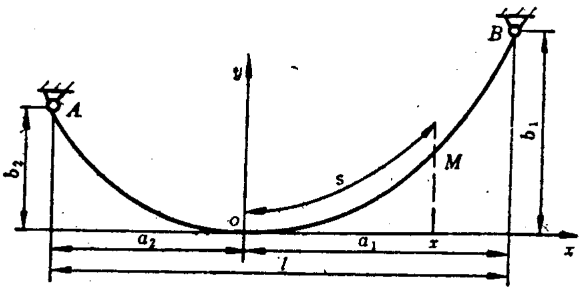

图 1-1-14

表 1-1-3 柔索的计算公式

计算项目 \ 分布力类型	力沿索长L均匀分布	力沿跨度l均匀分布
柔索曲线方程	$y=\frac{H}{q}\left(\operatorname{ch}\frac{qx}{H}-1\right)$	$y=\frac{q}{2H}x^2$
柔索上M点的拉力	$T=H+qy$	$T=\sqrt{H^2+(qx)^2}$
柔索从o点到M点的长度	$s=\frac{H}{q}\operatorname{sh}\frac{qx}{H}$	$s=\int_0^x\sqrt{1+\left(\frac{2b_1x}{a_1^2}\right)^2}\,dx$
柔索的总长度L	$L=\frac{H}{q}\left(\operatorname{sh}\frac{qa_1}{H}+\operatorname{sh}\frac{qa_2}{H}\right)$	$L\approx l+\frac{2}{3}\left(\frac{b_1^2}{a_1}+\frac{b_2^2}{a_2}\right)$

注：H是柔索最低点o之拉力；q是垂直向下的分布力集度。

第六节 摩 擦

1. 静摩擦定律

两个接触面无相对滑动时，其间的摩擦阻力称为静摩擦力。静摩擦力总是与相对滑动趋势的方向相反，其数值F有一个最大值$F_{\max}$，即

$$F\leqslant F_{\max}=fN \tag{1-1-15}$$

式中的f和N分别表示静摩擦系数和正压力。

摩擦力达到最大值时，摩擦面上的总反力**R**与正压力**N**之间的夹角ϕ称为摩擦角。将总反力**R**绕接触面法线（N）旋转，得一顶角为2ϕ的圆锥，称为摩擦锥（图1-1-15）。作用在