线性偏微分方程崭新解法

余本立著

The brand-new method of solution for partial linear differential equations

YU BEN LIH
PEKING CHINA

1993

线性偏微分方程崭新解法

余本立著

The brand—new method of solution for partial linear differential equations

Yu Ben Lih
Peking China

（京）第 164 号

线性偏微分方程崭新解法

The brand—new method of solution for partial linear differential equations

余本立著

北京农业大学出版社出版发行

（北京海淀区圆明园西路 2 号）

广东台山市人民印刷厂印刷

开本 850×1168　1/32　印张 10　字数 250 千字

1993 年 1 月第 1 版　第 1 次印刷 2,500 册

ISBN 7—81002—542—2/O·18

简　介

本书是作者经多年潜心研究而创造的科学成果，书中系统地阐述具有任定变系数的线性偏微分方程之绝对有效解法——三个不同的全新体系及其相应解法，以二维二阶方程为主，旁涉多维及高阶方程。运用本书所述方法，能求出二维二阶线性方程的通解，并以具有两个一元任意函数之有尽微分显式表出之，从而使许多边值问题归结为解常微分方程。

本书的问世，是“数学物理方程”领域中的一场彻底革命，它在数学方面成功地解决了困扰人们240余年的广阔而艰深的课题；而在实际应用方面，则现代物理学各个分支以及工程、技术上的许多复杂疑难问题，从此都将迎刃而解，作为实例之一，本书证明了人们困惑已久的“温度波”之存在性。

阅读本书所需之预备知识，要求不高，读者只须通晓微积分学原理及方法，并了解线性方程的分类法，在这个基础上循序渐进，便能迅速掌握这门科学。可以断言：现有的“数学物理方程”教程，今后将一律由本书及其补充读物所淘汰。

本书的主要服务对象是：高等院校理、工科二年级、高年级学生和研究生；理、工科研究人员和教学人员；以及全体科技工作者。

版隙赘言

纵观一部数理方程发展史，可一言以蔽之曰："自 D'Alembert 氏解出弦振动方程迄今，虽已经历了 240 余年而仍然处在相当原始的摸索阶段。"许多有关著作，仿佛都在说："问题已经解决了"，或者是说："照此办理就能解决问题了"。但是事实又如何呢？除了形式最简单、范围最狭窄的、芝麻点大的零星特例之外，并没有解决任何稍具普遍性之问题。就其方法而论，都不过是以此一桶水倾入彼一桶水，复以彼一桶水倒入此一桶水，总之是倾来倒去还是这一桶水，都是浪费时间、毫无收获的重复性动作罢了。

对于线性偏微分方程这门科学来说，现有各种通用解法的一个共同点是将 n 阶方程之解表为具有 n 个任意函数的含核积分式而使边值问题归结为解积分方程。可是这种方程在绝大多数情形下都不能给出显式解，甚至连核函数也无法确定，因而积分方程本身也就无从建立，欲求解决问题也就成为一句空话，退一步说，积分方程法的唯一可取之处，是具有退化核的情形能够得到显式解；然而，众所周知，在二维、二阶、线性这个领域中，这种情形恒可导出常微分方程而求得相同的结果，采用积分方程，只是换个花样而已，由是言之，解决问题的功劳，也不应当属于积分方程法所有，须知此类问题，前人早已用其他经典方法解决了！于此可见，人们研究了一百多年的"积分方程学"以及随后出现的"核函数学"，不过是作者们自觉地或不自觉地用以敷衍塞责，应付世人的数学游戏而已。

"但是含核积分式在方程定性分析中扮演着重要的角色，否定积分方程，就是否定含核积分式的作用，这样岂不是也同时否定了方程定性分析方面的许多重要成果么？"且慢！方程定性分析方面的成果诚然可观；不过，假如给出一个已知系数的方程，我们分析了许多年，结果既写不出它的解答或解题步骤，又说不出它的核函数究属何物，那么，饶你分析得头头是道，但如单就其价值而论，这种分析法与世俗占卜术究竟有何差异？君不见，人们分析了一、二百年，却连具有实

变数和实系数的抛物型方程有无波动解这样一个根本性问题，也说不出个究竟？试问还有什么理由，值得我们这样长期抱残守缺，故步自封，不思进行一番变革，以便真正有效地解决问题呢？进一步说，假如我们把方程之解求出来了，然后你拿去进行分析，也就是说，把已知方程之定性分析改为已知函数之定性分析，那么，是否仍须花费一、二百年的工夫，才能说出它的各种性质呢？请问当初弦振动方程以及有源区域和无源区域的直角坐标之位势分布方程的一些重要性质，是不是在已经求得解答之前提下轻而易举地分析出来的呢？据此看来，方程定性分析方面的成果即使再多、再重要，也仍然是属于原始的摸索阶段中的、极其粗糙的零星点滴收获而已；何况那个核函数至今仍然是镜花水月，虚无缥缈的东西，如不毅然舍弃，别图良策，就会成为科学道路上的迷雾和障碍，这门科学就不能指望有突破性之进展。

为什么偏微分方程这门科学经历了如此漫长的岁月而依旧毫无起色呢？这种万马齐喑的局面究竟何时才能结束呢？答案很简单，这是因为，在这门科学的研究史上，迄今为止，人们都犯了方向性之错误，所以他们的努力都是徒劳而无功的；应当这样说：当研究方向改正之时，就是问题获得解决之始，甚至还有可能在不长的时间内直达理想的止境，使这门科学真正成为解决应用问题的无坚不摧的犀利武器，而不再是华而不实、徒有其表的装饰品，从而为科学发展史增添最醒目的一页。

"直达止境"，这种说法，岂不是与"学无止境"之说相矛盾吗？这一问难，实际上是对格言的误解。我们通常所说的"学无止境"，是对治学的主体而言，无非是用以激励人们的进取精神而已；至于治学的对象，比方说，每门科学的每个分支、每个领域、乃至每个问题，却都有其自身的止境，岂不闻前人常以"止于至善"为一切事业的目标和归宿么？那么，线性偏微分方程这门科学究竟止境何在呢？这里不妨指出：它应当是使边值问题归结为解常微分方程而不是积分方程，笔者就是以此为目标而确定方向，并成功地解决了根本问题的。

1992，10，15 作者识于北京

绪　论

严格解法的过去与现状　数学这门科学的进展，在许多分支上，都远远地超越了自然科学的各个领域，唯独偏微份方程这个分支则恰恰相反，进展迟缓，远不能适应实际应用的需要，同今天科学技术突飞猛进的形势极不相称。众所周知，偏微分方程的理论是解决物理问题、探索宇宙奥秘的指导性工具，而二维二阶线性方程的有关理论则是这个分支的核心部分，它同实际物理问题联系至为密切，应用至为广泛；可是这个领域的方程至今尚未得到圆满的解决，许多常用的物理方程，迄今未有人求得其显式解，在实际应用中，大都不得不藉助于各种毫无预见性而又不便于应用的数值解法。我们知道，线性方程的一些经典解法大都是不完善的，其中包括分离变数法、变分法以及各种积分变换法，这些方法只能用以求解系数特别简单的少数方程；另外，它们还存在着很大的缺点，都是将方程之解表为收敛极其缓慢的无穷级数，甚至是多重缓敛级数，这是完全不能令人满意的；尽管将无穷级数化为有尽式的理论近世已有长足的进展，但从某种角度看来，多此一举，即使能够实现，也不能算是个好办法，因为对于这种情形，肯定还存在有别的方法可以得到同样的结果。

什么样的方法才算是完善的呢？根据偏微分方程之解的唯一性定理，具有解析系数的二阶方程，其通解是由包函两个任意函数的解析式所唯一确定，它包括了各种边值问题之解的全部集合，因之，只有能够给出这种解式的方法才是完善的解法。早在上一世纪中叶，Riemann 氏运用 Green 氏积分转换公式，将通解表为具有两个任意函数的含核积分式，作出了一般变系数双曲型方程的原则性解答，随后人们又把这个方法推广到椭圆型和抛物型方程，发展成为点源函数理论，构成一个大体上完整的体系，于是可以说，有了一种较为完善的通用解法——Green 公式法；但是为什么说这只是原则性解答

呢？这是因为，为了求取原方程的通解，必须预先求出 Riemann 氏伴随方程的某一特定之解，作为通积分中的核函数，即所谓 Riemann 函数或点源函数；然而，欲求核函数又谈何容易！试问迄今为止，方程之已求出核函数者为数有几？这个方法所能解出的方程委实少得可怜，此法如用于定性分析，固然不失为一件有力工具，而作为一种解法则未免过于牵强，只能说是个笼统的原则性方法罢了。

自从 Riemann 解法问世以来，人们一直陈陈相因，很少能越雷池一步，提出一些新的办法，解决一些新的问题。本世纪初，Darboux 氏曾就双曲型方程设想过一种降阶法，企图将原方程化为一个二重一阶方程[1]，Darboux 氏之意图良属可嘉，可惜他的方法则未能普遍行之而有效。在三十年代，Bergman 氏曾运用函数论方法，对核函数作过系统的研究，创立新公式，开始越出 Riemann 解决的牢笼而有所前进[2,3,4]，目前人们正在致力于这一理论的系统化[5,6,7,8]；但都未能给出确定核函数的有效方法。至五十年代，Rachford 氏首倡交替方向辗转微分法，将某些方程之解，表为由一个任意函数及其各阶导数所构成的无穷级数[9]，此法脱出积分表达式的窠臼，草创了微分表达式的原始模型，给我们提供了新颖的概念，应当说，这是一件值得引人瞩目的新事物；可惜它仍然是适用于少数简单特例而不能普遍解决问题。

鉴于求取通解的极度困难，早在二十年代，Tricomi 氏已开始对某些混合型方程进行颇有价值的探索[10]，现今人们已经总结出一套将原方程化为一阶方程组的办法，直接求取边值问题之解[11]。此法目前方兴未艾，在得不到通解式的情况下无疑是个可取的办法，不过，顾名思义，它的适用范围显然是有局限性的。

综上所述，可见二维二阶线性方程的严格解法问题，迄今尚未得到圆满的解决，求出一个给定系数的方程之显式解，往往是一件偶然的事情，尤其是抛物型，几乎是个空白点，近世人们虽然作了不少的分析，但如隔靴搔痒，全然没有找到解决问题的入门之钥，迄今仍然处在相当原始的摸索阶段，远不能适应现代数学和物理学的需要，这种状况，不能不使人们感到莫大的遗憾。现在笔者认为，创造一种普

遍适用的统一方法，首先求出“二维、二阶、线性”这个领域的所有方程之通解，并以最便于应用的形式表出之；然后进一步设法扩充到多维及高阶领域，应当说，这就是当今数学物理方程研究探索者的首要任务。

一步惊人的进展　回顾 Green 氏公式法中核函数的求法，在一些特例中，关键在于将 Riemann 氏件随方程化为纯常微分方程，此法如能普遍适用，则通解问题即可得到全面的解决。从这一需要出发，笔者详尽地阐明了这个命题成立之普遍性及其最终形式之唯一性[12]，并明确指出：此法施于双曲型方程，可以按照一定的步骤而得解[13]。这一结果，请恕作者自许为当前一步最惊人的进展；美中不足之处是需要解一个二维一阶线性非齐次方程，这种方程并不能保证在任何情况下都能给出显式解；另外，此法施于抛物型，依然很难奏效，因之，欲求问题的彻底解决，仍须继续探索。

问题的症结何在？　为什么现有的各种方法都不能真正解决问题呢？究竟症结何在呢？为了总结规律，确定今后前进的方向，笔者不妨在此试作一番剖析。首先，所谓 Green 公式法，其实只是利用重积分与线积分的转换公式，把原方程的通解求法问题，转化为求取伴随方程的某一特解而已。然而伴随方程却是与原方程等价的，因为它依然是个同维同阶方程，它的特解依然是个未知函数；当然，我们还可设法把伴随方程的特解求取问题，再转化为求取另一个同维同阶方程之特解；但是，这样无限循环下去，问题将是永远不能得到解决的。这种循环现象，在 Green 公式法中如此，在 Bergman 解法以及一切基于预先确定核函数的类似解法中，无不如此。至于笔者在前面所提出的将伴随方程化为纯常微分方程的办法，当然不会例外，以抛物型为例，采用此法必须先解一个高阶非线性方程，它可以通过某种变换而化为具有一般系数的两个二阶线性方程，这就证实了此类方法中循环现象的普遍性[14]。

至于双曲型方程的 Darboux 解法，则出现另一类循环现象。为使原方程化为退化方程，须要采用某种变换，把它化为另一个同阶方程，使其系数不变量之一等于零；然而这个新方程同样也是与原方程

等价的，因为它的系数不变量在一般情况下依然不会等于零，仿此无限循环下去，永远也不等于零，因之，原方程永远也不能解出。

至此便可看出，出现循环现象，说确切些，先解等价方程，这就是现有各种通用解法的共同缺陷与问题的症结所在；这就是人们一直无法摆脱的约束规律；这就是自 Riemann 解法问世以来阻挡人们前进的最大障碍。这一障碍如不突破，那么，任何人休想前进一步；通解求法问题休想取得丝毫的进展；因之，这个领域的问题休想得到彻底的解决。基于这一总结，现在笔者认为，从今以后，假如仍然有人提出一种出现等价方程的“新解法”，那么，我们完全可以评定他对这门科学并没有作出任何新的贡献，这样说，是一点也不算过分的。

以上是仅就通解求法而论，其实，现有解法的缺点尚不止此，如果我们再看边值问题的求解过程，便会发现，即使对于已经求得通解的一些方程来说，其所得结果仍然是不能真正解决问题的，因为它们都是将通解表为具有两个任意函数的含核积分式，而使边值问题归结为解积分方程；可是这种方程除具有退化核的情形外，都不能给出显式解，试问迄今为止，边值问题之已求得显式解者，为数有几？可见导致积分方程乃是现有方法不能真正解决问题的另一症结所在，它不过是聊胜于无的一种不得已的手段罢了。在这个问题上，笔者认为，由于人们对方程解法的研究，长期停滞不前，以致形成一种错误概念，仿佛是只要得到了通解的含核积分式，只要导出了边值问题的积分方程，就算是解题过程的终结，就算是抵达了领域的止境。于是画地为牢、不求进取，历时百载而旧貌依然，致使许多应用问题，始终不能看到解答的全貌。对于这种落后状况，如不施行一番认真的变革，那么，我们的“指导性工具”就不能在科学发展的进程上继续发挥作用，这样说，也是一点都不算过分的。

一个明显的实例　作为一个明显的例子，众所周知，热在空间的传播过程就是红外线的辐射过程，而红外线正如光波一样，也属电磁波谱中的一个波段。这一事实，早在一百多年前就已由物理学家的实验所证明；可是我们的数学家却至今仍然认为空间热传播方程亦即温度与时空之关系方程不存在有波动解，他们充其量只能将

方程之解表为以概率积分为核的积分式，人们也只好承认：热流量与时空之关系应为波动函数而温度与时空之关系则属非波动函数。这样一个不论与客观世界或主观世界都不相容的怪物，便在数学与物理学的夹缝中得以长期生存而无人能够作出解释；甚至曾被认为这就是问题的最终答案，就是事物的真实面目。今天在笔者看来，这种不合理事物之所以出现，应当归咎于数学方法的不完善，只要运用正确的方法，就应当能够得到统一的结果，换言之，温度及热流量都应以波动的形式出现。由此可见，现有数学工具之落后性以及实行变革的必要性，确是无可争辩的了。

崭新的设想　可否设想一种没有循环现象的退化法？详言之，可否构造这样一种变换，它无需先解任何等价方程而可以把问题转化为分别解两个独立的一阶方程？或者是直接将原方程化为一个二重一阶方程或同阶降维方程？甚至可否更加大胆地设想，将原方程之解，由具有两个任意函数的有尽微分式表出之？前一设想如能实现，即可顺利地求得原方程的通解；后一设想一旦实现，就是使边值问题的求解过程归结为解常微分方程而不是积分方程，从而使许多应用问题之显式解成为现实。这无疑是一项巨大的变革，是最理想的结果，这样理想的结果，应当说，就是这个领域的一切研究课题之最终目标。换言之，二维二阶线性方程的解法问题，至此便宣告圆满解决，人们从此便可以转向多维及高阶方程解法的探索，从而为这门科学的系统化、完整化奠定全面的基础。

然而，使一个给定系数的方程实现退化，这个命题，对于双曲型方程来说，昔日 Darboux 的研究，已以失败而告终，嗣后未尝有人再有这项动议；对于抛物型方程来说，则属前所未闻，尤为不可思议，总而言之，命题究竟能否成立？尚属悬而未决，今天竟然提出，不但要完成这一设想，而且还要进一步将通解表为具有两个任意函数的微分式，这实质上是又附加一个限制条件，试问其可实现性岂非空中楼阁，更属渺茫吗？倘若根据常理来判断，那么，第一，退化或可退化方程是属于特定的形式，它的系数不得有任意性，而原方程则是任定系数的方程，两者应当是不相容的，怎么可能把后者化为前者呢？第二，

在各种通用解法的实施过程中，不断地出现等价方程，这一事实，无非说明两种可能性，其一是说明一般系数的方程不可以实现退化；另一是说明先解等价方程乃是求取通解的必由之路，二者必居其一，难道除此之外，还会有什么相反的意味不成！第三，积分是微分过程之逆，微分方程之解须要由积分式来表达，这是人们熟知的自然规律，企图无例外地用微分式来满足微分方程，势必南辕北辙，事与愿违，如果说，这个命题也能普遍成立，那么，这种说法，恐怕只是作者自己的虚构和臆测罢了，难道还会成为自然界或人类活动中的现实么?!

发生上述种种疑问是自然的，不过这些见解实则似是而非。诚然，我们的设想是与传统观念格格不入的，但是人们不能否认：传统观念有其局限性和片面性，按照传统观念来观察和考虑问题，往往容易产生错觉而不能得到正确的结论，倘若我们处处受它迷惑而裹足不前，那么，欲求问题的解决，将是永远没有希望的。现在为了澄清观点，消释疑团，笔者不妨在此再作一番阐述。

第一，所谓退化或可退化方程与一般系数的方程不相容，这只是对于没有中介变换的情形而言，当后者经过适当的变换时，实现退化的可能性是不能完全排除的，这种可能性已在笔者的研究[12,13]中初步得到确立。既然将齐次方程化为纯常微分方程这个命题可以普遍成立，那么，将原方程化为退化抛物型即同阶线性降维方程，当然也可以普遍成立，并且先决条件还将大大放宽；既然双曲型方程可以化为退化抛物型，那么我们就有办法把抛物型方程化为退化双曲型即二重一阶方程，可见命题不但可以普遍成立，而且还具有一定的可塑性和多样性，因之，将求解过程转化为解两个独立的一阶方程这个命题，也将可以实现而无疑了。

第二，关于等价方程问题，在笔者的观点看来，方程既然存在有解，就应当存在有求得显式解的具体方法，出现等价方程，不过是说明人们没有找到正确方法的一个标志而已。如前所言，既然化为纯常微分方程的先决条件，是需要进行某种变换，并解两个等价方程，那么，现在转而化为可退化方程，则由于条件放宽了，就有可能不再需要先解等价方程了，直捷了当地说，等价方程将会无形中消失了，至

此，读者也就恍然大悟而无异议了。

第三，关于通解表达式问题，笔者认为，根据数学的对偶性原理，通解的微分表达式与积分表达式，两者应当是并行不悖的。这是因为，在实际问题中，一个二阶线性方程，不外是由函数场的梯度、旋度、散度等的二重运算而得，而这些量本来就同时存在有两种表达式，如果说，由这些量的运算关系所得到的方程，其通解只有一种表达式，那反而是不合科学规律的见解了。其实不难想像，我们可以在原始问题的方程中，根据上述三种量的积分定义，用积分运算之极限代替相应的微分运算，这样，就得到一个以极限形式出现的二重积分方程，这个方程，同现在讨论的微分方程是完全等效的，于是根据微、积分过程的互逆性质，它的解式就自然是个微分式了。由此可见，方程之解的微分表达式，其存在性是毋庸置疑的。

铁般的论断　论证至此，已雄辩地阐明了：本文的新设想决非虚妄，我们的新解法必能成功，这一断言，已由笔者的反复实践所证明，并且是毫无疑义的了，现在特将所得结论扼述如下：

（一）具有解析系数的二维二阶线性齐次方程，一律可经适当之变换而使求解过程转化为解两个独立的或相关的一阶方程。

（二）具有解析系数的二维二阶线性方程，经适当之变换后，既可化为退化双曲型，又可化为退化抛物型。

（三）具有解析系数的二维二阶线性方程之解，恒可由具有两个一元任意函数及其一阶、二阶导数的有尽显式表出之。

（四）具有实变数和实系数的双曲型及抛物型方程，恒存在有波动解。此处所谓波动解，是具有慢坡包络线（或面）的起伏函数，其包络线之倾斜度则随所在点及方位角之不同而作连续变化。

还有必要指出：二维二阶线性方程的一切有效解法，至少具备上列四个特点之一；反之，举凡与此四点均不符合之任何“解法”，都将是无效的，充其量是适用于一些简单特例而已。

以上论断，经过笔者的深入研究，业已完全得到证实，兹特公诸于世，以资应用，希望能对科学技术的发展有所裨益，起到微小的促进作用，这就是本文的区区用意，作者也将为此而感到不胜欣幸了。

附注 本文论断可用数学语言表述如下：

设已知方程为

$$\delta(x,y) = nf_{xx} + (1-n)f_{xy} + \alpha(x,y)f_x + \beta(x,y)f_y + \gamma(x,y)f,$$
$$(n = 0,1)$$

则（一）、（二）、（三）、（四）各结论如下：

（一）

$$\begin{cases} f = \mathrm{Yu}^{(1)}(f_1, f_2; \alpha, \beta, \gamma; x, y) \\ 0 = F_1(f_1, f_{1x}, f_{1y}; \alpha, \beta, \gamma; x, y; n_1F_{02}(f_2, f_{2x}, f_{2y})), \quad (n_1 = 0,1) \\ 0 = F_2(f_2, f_{2x}, f_{2y}; \alpha, \beta, \gamma; x, y; n_2F_{01}(f_1, f_{1x}, f_{1y})), \quad (n_2 = 0,1) \end{cases}$$

（二）之一

$$\begin{cases} f(x,y) = \mathrm{Yu}^{(2)}(F[\xi(x,y), \eta(x,y)]) \\ D(\xi,\eta) = F_{\xi\eta} + A(\xi,\eta)F_\xi + B(\xi,\eta)F_\eta + (A_\xi + AB)F \end{cases}$$

（二）之二

$$\begin{cases} f(x,y) = \mathrm{Yu}^{(3)}(F[\xi(x,y), \eta(x,y)]) \\ D(\xi,\eta) = F_{\xi\xi} + A(\xi,\eta)F_\xi - C(\xi,\eta)F \end{cases}$$

（三）

$$f = \mathscr{F}\ (u(x,y), v(x,y); \alpha, \beta, \gamma, \delta; x, y;$$
$$U(u), U'(u); V(v), V'(v), nV''(v))$$

（四）

$$\begin{cases} u = f_1(\xi,\eta)f_2(M(\xi,\eta)\Xi(\xi) - N(\xi,\eta)H(\eta)) \\ |f_{1\xi}\cos\varphi + f_{1\eta}\sin\varphi| \ll |f_{2\xi}\cos\varphi + f_{2\eta}\sin\varphi|, (0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi) \\ |M_\xi(\xi,\eta)| \ll |\Xi'(\xi)| \\ |N_\eta(\xi,\eta)| \ll |H'(\eta)| \end{cases}$$

在以上各式中，除原始自变数 (x,y) 及常数 n, n_1, n_2 外，所有各字母（连同下标）都分别代表确定的显函数，而在（四）中者则为非对数型实变显函数；但须注意，除 f、n、u 外，在不同结论中之相同符号各不相关。至于末尾三个不等式，则在除 (ξ,η) 的少数例外之点及其甚小邻域之大部区域内保持成立。

目　录

第一章
用合维变换解二维二阶线性齐次方程

§1 简单线性代换及其不变量

抛物型方程 设以 $f(x,y)$ 为未知函数的齐次抛物型方程为

$$L_0(f) = f_{xx} + A_0(x,y)f_x + B_0(x,y)f_y + C_0(x,y)f = 0 \tag{1—1}$$

其中 A_0、B_0、C_0 为已知函数，现在作代换

$$f = \lambda(x,y)F \tag{1—2}$$

此处 $\lambda(x,y)$ 假定为某一已知函数，命

$$\left.\begin{aligned} A &= A_0 + 2\lambda_x/\lambda \\ B &= B_0 \\ C &= L_0(\lambda)/\lambda \\ &= \lambda^{-1}(\lambda_{xx} + A_0\lambda_x + B_0\lambda_y + C_0\lambda) \end{aligned}\right\} \tag{1—3}$$

即得到一个以 $F(x,y)$ 为未知函数的新方程

$$L(F) = L_0(\lambda F)/\lambda = F_{xx} + AF_x + BF_y + CF = 0 \tag{1—4}$$

请注意，在这一代换前后，系数 B_0 保持不变，此外，新旧系数之间还存在下列恒等式

$$(C - C_0) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{A - A_0}{2}\right) -$$

$$- \frac{A - A_0}{2} \cdot \frac{A + A_0}{2} - B\int \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{A - A_0}{2}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{\lambda}(\lambda_{xx} + A_0\lambda_x + B\lambda_y + C_0\lambda) - C_0$$

$$- \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\lambda_x}{\lambda}\right) - \frac{\lambda_x}{\lambda}\left(\frac{\lambda_x}{\lambda} + A_0\right) - B\int \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\lambda_x}{\lambda}\right) dx$$

$$= \frac{\lambda_{xx}}{\lambda} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\lambda_x}{\lambda}\right) - \left(\frac{\lambda_x}{\lambda}\right)^2 \equiv 0$$

亦即

$$k = C - \frac{A_x}{2} - \frac{A^2}{4} - \frac{B}{2}\int A_y\, dx$$

$$\equiv C_0 - \frac{A_{0x}}{2} - \frac{A_0^2}{4} - \frac{B_0}{2}\int A_{0y}\, dx$$

现在引用符号

$$\begin{cases} \Gamma = C - \dfrac{A_x}{2} - \dfrac{A^2}{4} & (1—5) \\ \Gamma_0 = C_0 - \dfrac{A_{0x}}{2} - \dfrac{A_0^2}{4} & (1—6) \end{cases}$$

则有

$$k = \Gamma - \frac{B}{2}\int A_y\, dx \equiv \Gamma_0 - \frac{B_0}{2}\int A_{0y}\, dx \qquad (1—7)$$

B 及 k 就是抛物型方程在线性代换前后的系数不变量，而(1—7)则