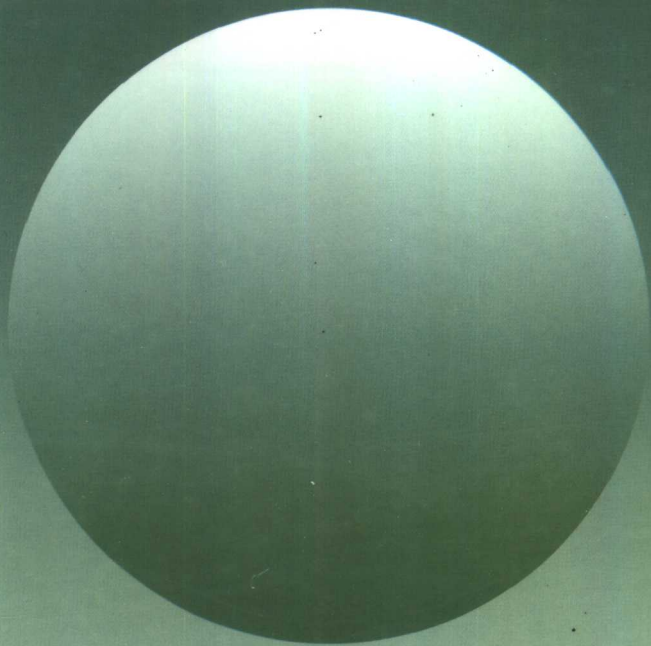


● 研 究 生 用 书 ●

INTRODUCTION TO APPLIED
GROUP THEORY

华中理工大学出版社



张端明 钟志成 编著

应用群论导引



应用群论导引

张端明 钟志成 编著

华中理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

应用群论导引/张端明 钟志成 编著
武汉:华中理工大学出版社,2001年1月
ISBN 7-5609-2329-1

I. 应…

II. ①张… ②钟…

III. 群论

IV. O152

应用群论导引

张端明 钟志成 编著

责任编辑:龙纯曼
责任校对:蔡晓瑚

责任监印:张正林

出版发行:华中理工大学出版社

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87545012

经 销:新华书店湖北发行所

录 排:华中理工大学出版社照排室

印 刷:华中理工大学出版社印刷厂

开本:850×1168 1/32

印张:15 插页:2

字数:357 000

版次:2001年1月第1版

印次:2001年1月第1次印刷

印数:1—1 000

ISBN 7-5609-2329-1/O·221

定价:23.80元

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

内 容 提 要

本书以易于接受的流畅的语言,系统地介绍了群论的基础、有限群和李群的表示论的一般原理、半单李代数的基本概念和具体表示、半单李群的局域性及整体性质;同时重点介绍了置换群、空间点群、李群等在晶体结构、量子力学、核物理、粒子物理及工程技术中的应用。本书一般采用从现实问题引入正题,附有大量的实例与问题,而问题大多有提示,便于读者阅读与自学。在介绍应用中以方法论为重点。本书力求阐明近代群论所蕴含的近代代数、拓扑和流形的科学内涵,尽可能反映群论及其应用研究的最新成果。本书是物理、化学、生物、应用数学及相关工程技术专业的优秀研究生教材,也是相关专业科技工作者的难得的参考书。

Abstract

This book expounds the fundamentals, the general principle of the finite groups and the Lie groups, the basic Concepts and the Concrete Representations of Semisimple Lie Algebras. The local and global properties of Semisimple Lie groups. Systematically by means of acceptable fashion, and outlines the applications of the permutation group. The space-point group and Lie groups for lattice structure. Quantum mechanics, the nuclear physics, the elementary particles physics and The technology. The contents' arrangement are from real concrete examples to the main text, the book has real concrete examples and exercises, which are attached to point out largely for the readers' easy understanding and self-study to this book. In introducing corresponding applications, the methodology is emphasis. The book exposes Scientific intrinsic quality of the modern algebras, the topology and manifold containing by modern group theory deeply, and expresses the latest researching results for group theory and its applications possibly. This book is an excellent, postgraduate textbook for physics, chemistry, biology, Applied mathematics and related project texlogy, and is also a prominent reference's book for related Natural science' specialities.

A handwritten signature in black ink, appearing to be 'L. S. P.' or similar, written in a cursive style.

写在“研究生用书”出版 10 周年

在今天,面对科技的迅速发展,知识经济的已见端倪,国际竞争也日趋激烈,显然,国家之间的竞争是国家综合实力的竞争,国家综合实力的竞争关键是经济实力的竞争,而经济实力的竞争关键又在于科技(特别是高科技)的竞争,科技(特别是高科技)的竞争归根结底是人才(特别是高层次人才)的竞争,而人才(特别是高层次人才)的竞争基础又在于教育。“百年大计,教育为本;国家兴亡,人才为基。”十六个字、四句话,确是极其深刻的论断。目前,国际形势清楚表明:我们国家的强大与民族的繁荣,主要立足于自己,以“自力更生”为主;把希望寄托于他人,只是一种不切实际的幻想。这里,我们决不是要再搞“闭关锁国”,搞“自我封闭”,因为那是没有出路的;我们强调的是要“自信,自尊,自立,自强”,要“自力更生”为主,走自己发展的道路。

显然,知识经济最关键的是人才,是高层次人才的培养,而作为高层次人才培养的研究生教育就在一个国家的方方面面的工作中,占有十分重要的战略地位。可以说,没有研究生教育,就没有威伟雄壮的科技局面,就没有国家的强大实力,就没有国家在国际上的位置,就会挨打,就会受压,就会被淘汰,还说什么知识经济与国家强大?!

“工欲善其事,必先利其器。”教学用书是教学的重要

基本工具与条件。这是所有从事教育的专家所熟知的事实。所以,正如许多专家所知,也正是原来的《“研究生用书”总序》中所指出,研究生教材建设是保证与提高研究生教学质量的重要环节,是一项具有战略性的基本建设。没有研究生的质量,就没有研究生教育的一切。

我校从1978年招收研究生以来,即着力从事于研究生教材与教学用书的建设。积十多年建设与实践的经验,我校从1989年起,正式分批出版“研究生用书”。第一任研究生院院长陈珽教授就为之写了《“研究生用书”总序》,表达了我校编写这套用书的指导思想与具体要求,“要力求‘研究生用书’具备科学性、系统性、先进性”。后三任研究生院院长,也就是各任校长黄树槐教授、我本人和周济教授完全赞同这一指导思想与具体要求,从多方面对这套用书加以关心与支持。

我是十分支持出版“研究生用书”的。早在1988年我在为列入这套书中的第一本,即《机械工程测试·信息·信号分析》写“代序”时就提出:一个研究生应该博览群书,博采百家,思路开阔,有所创见。但这不等于他在一切方面均能如此,有所不为才能有所为。如果一个研究生的主要兴趣与工作不在“这一特定方面”,他也可以选择一本有关的书作为了解与学习这方面专业知识的参考;如果一个研究生的主要兴趣在“这一特定方面”,他更应选择一本有关的书作为主要学习用书,寻觅主要学习线索,并缘此展开,博览群书。这就是我赞成为研究生编写系列教学用书的原因。

目前,这套书自第一本于1990年问世以来,已经渡

过了10个春秋,出版了8批共49种,初步形成规模,逐渐为更多读者所认可。在已出版的书中,有15种分获国家级、部省级图书奖,有16种一再重印,久销不衰。采用此套书的一些兄弟院校教师纷纷来信,赞誉此书为研究生培养与学科建设作出了贡献,解决了他们的“燃眉之急”。我们感谢这些赞誉与鼓励,并将这些作为对我们的鞭策与鼓励,“衷心藏之,何日忘之?!”

现在,正是江南春天,“最是一年春好处”。华工园内,红梅怒放,迎春盛开,柳枝油绿,梧叶含苞,松柏青翠,樟桂换新,如同我们的国家正在迅猛发展、欣欣向荣一样,一派盎然生机。尽管春天还有乍寒时候,我们国家在前进中还有种种困难与险阻,来自国内与来自国外的阻挠与干扰,有的还很严峻;但是,潮流是不可阻挡的,春意会越来越浓,国家发展会越来越好。我们教师所编的、所著的、所编著的这套教学用书,也会在解决前进中的种种问题中继续发展。然而,我们十分明白,这套书尽管饱含了我们教师的辛勤的长期的教学与科研工作的劳动结晶,作为教学用书百花园中的一丛鲜花正在怒放,然而总会有这种或那种的不妥、错误与不足,我衷心希望在这美好的春日,广大的专家与读者,不吝拨冗相助,对这套教学用书提出批评建议,予以指教启迪,为这丛鲜花除害灭病,抗风防寒,以进一步提高质量,提高水平,更上一层楼,我们不胜感激。我们深知,“一个篱笆三个桩”,没有专家的指导与支持,没有读者的关心与帮助,也就没有这套教学用书的今天。我衷心祝愿在我们学校第三次大发展的今天,在百年之交与千年之交的时候,这套教学用书会以更

雄健的步伐,走向更美好的未来。

诗云:“嘒其鸣矣,求其友声。”这是我们的心声。

中国科学院院士

华中理工大学学术委员会主任

杨叔子

于华工园内

1999年5月15日

自 序

群论自 19 世纪伽罗华(Galois)创立以来,不仅成为近代代数的重要分支,而且其应用范围已深入到科学技术各个领域。尤其是自然科学的物理、化学和生物的研究中,群论已成为必不可少的强有力的数学工具。

由于客观世界普遍存在各种各样的对称性,而群论正是描述、反映和研究对称性的数学武器,因此从其诞生至今,就存在一个由纯粹数学领域扩展到其它自然科学领域的有趣现象。伽华罗利用群论方法证明了五次或五次以上的代数方法不能通过初等代数方法求得方程的精确解,随即在 1890 年—1891 年,费德洛夫(Federov)和熊夫利(Schoen files)就牛刀初试,用群论方法系统解决了晶体结构分类问题,证明了具有周期性排列的空间点阵总共有 230 种,使人大开眼界。

1893 年,挪威科学家李(Sophus Lie)和谢弗尔斯(Scheffer)将群论与微分方程结合起来,使有限群的概念扩展到无限群、连续群,导致现代李群的建立。20 世纪,传统群论与现代拓扑学、流形的概念相结合,形成拓扑群的新理论。就在群论不断发展不断现代化的过程中,我们看到许多群论大师,如嘉当(E. Cantan)、维格勒(E. P. Wigner)、魏尔(H. Weyl)、拉卡(G. Racah)等等,同时又是物理大师。群论迅速在光谱学、角动量理论、原子核谱、量子力学等物理学领域得到广泛应用。

应该承认,群论直到 20 世纪 50 年代,对于大多数科学家还是过于抽象、不太切合实际的时髦新玩意。1951 年,著名物理学家诺贝尔奖金获得者萨拉姆(A. Salam),在普林斯顿聆听拉卡关于李群的讲演时,瞠目不知所云。他觉得这些复杂理论过于艰深,自己大概是难于学会的,似乎也无十分必要去弄懂它。

20 世纪 50 年代末到 60 年代中期,在基本粒子研究中, $SU(3)$ 理论(所谓“8 重道”方法)、夸克模型(其理论框架就是群)等的巨大成功,造成群论向物理学的一次“普及”热潮。耐人寻味的是,1963 年,萨拉姆居然作了关于李群的报告,谆谆告诫听众,一定要及早地学好群论这一优美的理论,切勿重犯他的错误。短短 10 余年,潮流所及,影响之巨,从中可以窥见一斑。时至今日,群论的应用领域不仅遍及物理学各个领域,而且扩展到化学、生物、材料科学、流体力学、机械、电工学等等。从 50 年代末开始,群论课已逐渐成为物理专业、化学专业、材料科学技术有关专业等研究生的必修课。

作者自 80 年代主讲物理专业的研究生群论课以来,深感这门课的特殊性。作为一门数学课,其难度跨度极大,涉及的数学领域极广。按英国数学家莱德曼(W. Lederman)所说,群论的初等部分,应该能为有钻研精神的中学六年级(英国中学!)的学生所接受。但就其大多数内容,涉及分析、流形、拓扑、集合、近代代数等领域,要真正“彻底”、“严格”地搞清楚,即令对于萨拉姆这样的大科学家,也颇费周章。因此关于群论的教科书一直有两个系统的“版本”流传于世:一是数学专业用的较为“学院

式”的教本,再一个就是以应用为主要目的的群论教科书。本书是积笔者 20 年教学经验和科研心得编撰而成的,由于教学对象,自然属于以实用为目的的那个系统的教科书。这个系统教科书的共同特点是,不过于追求数学理论的完备与严格,避免使用读者不太熟悉的抽象艰深的数学概念和工具;尽可能从大家较为熟悉的具体事例出发,阐述有关概念;尽可能多地列举应用实例,以帮助读者在群论与应用之间搭起一架桥;语言尽可能浅近、易于接受。

本书取名“应用群论导引”的缘故,并非牺牲群论本身的系统性,去蜻蜓点水式地介绍群论在各领域的实例,而是在保证理论系统性的前提下,在教材内容的可接受性与应用的方法论两方面下了功夫。本书的显著特点是,不仅引入概念,阐述理论内容,附有大量例题,便于读者领悟群论概念的科学含义及深厚应用背景,同时所有习题中,凡是需要提示的地方,尽量给予详尽提示。在作这些提示的时候,我想起朗道(L. Landau)、栗夫希兹(E. Liphishes)的那套著名的多卷本《理论物理教程》,人们从书中的“提示”获得多大教益啊!因此我希望这些提示会帮助读者掌握本书要旨,便于阅读与自学。我们还准备在适当的时候,出一本习题集。

本书的应用实例,以物理科学居多,但是也旁及了化学、材料科学和工程技术诸方面。作为应用的导引,本书着眼于方法论的阐述,希望读者从中收到举一反三之效。群论的应用范围太广,各个领域的应用都可写一本专著,因此本书的介绍只能算作“导引”。细心的读者会发现,在

篇幅允许的情况下,我们尽可能介绍有关领域的最新发展,但是过于专业化的内容也避免涉及。归根结底,本书是一本数学教科书。

全书分十章,其中第九章、第十章可以作为阅读材料,如果课时不足的话。

我的学生钟志成,自始至终参加全书的写作与定稿,不仅对书的内容、安排,多有创意,而且还为全书的校对、订正,付出大量精力。

作者感谢我的夫人彭芳明女士,没有她的鼎力相助,本书是无法完成的。作者还要对大力支持本书出版的华中理工大学出版社和华中理工大学研究生院余津宜同志表示感谢。

张端明

2000年8月16日于喻家山蜗居

目 录

第一章 群论基础	(1)
§ 1.1 对称性	(1)
§ 1.2 群的概念	(4)
§ 1.3 群的重排定理、群表和群的陪集分解	(8)
§ 1.4 共轭类、正规子群和商群	(11)
§ 1.5 群的直积	(18)
§ 1.6 同构、同态与扩张	(20)
§ 1.7 群函数、群代数和群流形	(25)
问题	(30)
第二章 群表示论基础	(33)
§ 2.1 群的表示	(33)
§ 2.2 表示的可约性与么正性	(40)
§ 2.3 舒尔(Schur)引理	(45)
§ 2.4 正交定理及其几何解释	(48)
§ 2.5 正则表示与表示的完备性定理	(53)
§ 2.6 有限群不等价不可约表示的寻找方法	(59)
§ 2.7 表示的直积与直积群的表示	(66)
问题	(72)
第三章 物理学中的置换群	(73)
§ 3.1 维格纳(Wigner)-爱卡特(Eckart)定理	(73)
§ 3.2 置换群的概念	(87)
§ 3.3 置换群的正则表示与维数定理	(92)
§ 3.4 置换群的分支律与外直积	(100)
§ 3.5 杨对称子、杨氏基与 S_n 的基矢	(108)

问题	(119)
第四章 点群与晶体对称性	(121)
§ 4.1 空间对称操作	(121)
§ 4.2 晶格的对称操作	(128)
§ 4.3 第一类点群	(133)
§ 4.4 第二类点群	(139)
§ 4.5 晶体点群	(144)
问题	(151)
第五章 李群基础	(156)
§ 5.1 李群概念	(156)
§ 5.2 李群的无穷小群生成元及其局域性质	(163)
§ 5.3 变换群及无穷小算子	(169)
§ 5.4 李氏三定理	(180)
问题	(183)
第六章 李代数基础	(192)
§ 6.1 李群的整体性质	(192)
§ 6.2 李代数的概念	(198)
§ 6.3 李代数的基本性质与结构分类	(204)
§ 6.4 基林度规与半单李代数的卡当判据	(213)
问题	(218)
第七章 半单李代数	(224)
§ 7.1 半单李代数的标准形式	(224)
§ 7.2 关于根系的基本定理及其图示法	(231)
§ 7.3 单纯根与邓金(Dynkin)图	(245)
§ 7.4 卡当矩阵与李代数结构	(256)
问题	(262)
第八章 李群与李代数的表示论	(270)
§ 8.1 权与权空间	(271)
§ 8.2 最高权、不可约表示的分类与维数	(283)

§ 8.3	权的完全集合的计算	(294)
§ 8.4	直积表示、基本表示与初等表示	(303)
§ 8.5	不可约表示的标记方法与权的内积计算	(316)
问题		(327)
第九章	李群的整体性质与同伦群	(335)
§ 9.1	点集拓扑的若干基本知识	(335)
§ 9.2	同伦路径与基本群	(339)
§ 9.3	李群的拓扑性质	(348)
§ 9.4	高次同伦群及其初步应用	(358)
§ 9.5	相对同伦群与正合序列	(363)
§ 9.6	缺陷与同伦群	(371)
问题		(378)
第十章	李群的若干应用	(384)
§ 10.1	$SO(3)$ 与 $SU(2)$ 群的同态关系	(384)
§ 10.2	$SU(2)$ 与 $SO(3)$ 的不可约表示	(395)
§ 10.3	$SO(3)$ 群的直积表示及其约化	(405)
§ 10.4	$SU(3)$ 与轻夸克模型	(417)
§ 10.5	$SU_c(3) \otimes SU_w(2) \otimes U(1)$ 标准模型与 $SU(5)$ 大统一模型	(436)
§ 10.6	李群在工程技术中的应用大意	(450)
问题		(462)

第一章 群论基础

§ 1.1 对 称 性

对称性是自然界最普遍、最重要特性. 近代科学表明, 自然界的所有重要的规律均与某种对称性有关, 甚至所有自然界中的相互作用, 都具有某种特殊的对称性——所谓“规范对称性”. 实际上, 对称性的研究的日趋深入, 已越来越广泛地应用到物理的各个分支: 量子论、高能物理、相对论、原子与分子物理、晶体物理、原子核物理, 以及化学(分子轨道理论、配位场理论等)、生物(DNA 的构型对称性等)和工程技术.

什么是对称性? 按照英国《韦氏国际辞典》中的定义: “对称性乃是分界线或中央平面两侧各部分在大小、形状和相对位置的对应性.” 这里追溯到最直观、最早为人们熟知的所谓几何对称性. 该辞典又说, 对称性是“适当或协调的比例, 以及由这种和谐产生的形式美”. 这里依然谈的是空间的几何对称性, 尽管涉及对称性的美学属性.

实际上, 对称性的现代科学概念极难定义, 几乎成为了规律和和谐的同义语, 它跟所谓不变性、守恒律往往结下不解之缘.

要而言之, 对称性分两大类: 与时间、空间有关的, 称为几何对称性; 否则称为内禀对称性.

例 1 两端无限延伸的直线, 上面有等距离 a 的刻度(图 1.1).

直线向左或向右平行移动 a 的整数倍, 仍然与原直线重合(不变性), 或相对任一刻度点或两相邻刻度点的中点进行反演, 亦与

原直线重合,故该直线具有等距离 a 的整数倍的平移对称性和相对刻度点(中点)的反演不变性.

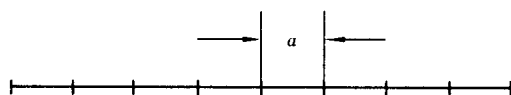


图 1.1 有等距离刻度的无限直线

例 2 等边三角形(图 1.2)和直圆柱体(图 1.3).

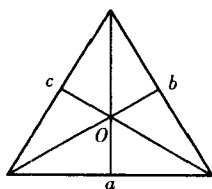


图 1.2 等边三角形

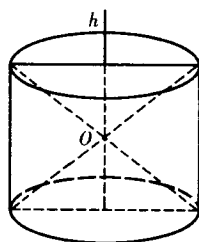


图 1.3 直圆柱体

能使图形复原的变化,称为该图形的对称变换或对称操作. 图

1.2 的全部对称操作是:绕三角形中心 O 转动角 0 (不动)、 $\frac{2\pi}{3}$ 、 $\frac{4\pi}{3}$ (常记为 C_3^0 、 C_3^1 、 C_3^2);关于每个角平分线的反演(常记为 m_a 、 m_b 、 m_c). 图 1.3 的全部对称操作是:绕圆柱轴线 h 转动任意角度(有无穷多个操作);上述转动后,再相对于圆柱的中心 O 反演;相对于过轴线 h 的任一平面反映;绕过中心 O 且垂直于轴线的任一直线转动角 π .

一般物理系统,除了其结构的空问构型用几何对称性描写外,往往系统对称性表现在描写体系的运动学方程在某些变换下不变形. 相应的变换则称该体系或运动方程的对称变换.

例 3 经典力学的相对性原理.