线性代数复习指导

工科数学复习指导（二）

陈宝根　编著

科学出版社

内 容 简 介

本书是根据全国高等学校工科本科基础课程教学基本要求，结合硕士研究生入学考试“数学考试大纲”的要求编写的.

全书共六章，内容包括 n 阶行列式，矩阵及其运算，向量组的线性相关性及矩阵的秩，线性方程组，相似矩阵及二次型，线性空间及线性变换等. 每章均按内容提要，重点、难点，例题分析，以及习题、答案与提示四个部分编写，且以典型例题分析求解为主.

本书内容紧扣大纲，由浅入深，可供高等理工科院校、师范院校师生作为教学参考书，也可作为报考硕士研究生的大学生、科技工作者和在职青年的辅导读物.

图书在版编目（CIP）数据

线性代数复习指导/陈宝根编著.-北京：科学出版社，1999
（工科数学复习指导）
ISBN 7-03-007625-7

Ⅰ.线… Ⅱ.陈… Ⅲ.线性代数-高等教育-教学参考资料
Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（1999）第20312号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码 100717
科地亚印刷厂 印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
1999年8月第 一 版 开本 850×1168 1/32
1999年8月第一次印刷 印张 5
印数 1—5 100 字数 129 000

定价：9.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉）

前 言

线性代数是高等理工科院校一门重要的公共必修基础课程，也是硕士研究生高等数学入学考试的组成内容之一．该课程教学课时少，但概念多，定理多，大学生们在学习过程中，普遍反映很抽象，难理解，不易学．因此，长期以来我们就想编写一本线性代数的辅导教材，把学生在学习中感到困难的问题，容易出错的问题，集中起来进行分析、探讨，以补充课堂教学的不足，又便于学生自学，在总体上提高线性代数的学习和应试水平．

本书根据高等学校工科本科基础课教学基本要求（线性代数部分），结合原国家教委考试中心制定的硕士研究生《数学考试大纲》编写．全书共六章，内容包括 n 阶行列式，矩阵及其运算，向量组的线性相关性及矩阵的秩，线性方程组，相似矩阵及二次型，线性空间及线性变换等．每章均按内容提要，重点、难点，例题分析，以及习题、答案与提示四个部分编写．

对于本书的编写，我们是很认真、很努力的．本书既反映了编著者在长期从事线性代数的教学实践中积累起来的一些有益的经验，同时也吸收了同类教学参考书中某些有效的做法，还考虑到读者对象的一些特点．尤其是例题的选择力求典型充实，内容广，类型多，技巧强，具有启发性．

本书在编写过程中，得到科学出版社的大力支持．吕虹等同志给予了热情的帮助．在此，特致谢意．

由于编著者的水平所限，书中难免会有这样那样的问题，请读者批评指正．

1999 年 2 月 28 日

目　录

第一章　n 阶行列式

1.1　内 容 提 要

1. 了解 n 阶行列式的定义,知道逆序数的定义.

n 阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

其中 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 是自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列,t 是该排列的逆序数,而$\sum$表示对全部排列求和.

n 阶行列式可简记为$\Delta(a_{ij})$或$|a_{ij}|_{n\times n}$.

规定:一阶行列式$|a|=a$.

2. 熟悉 n 阶行列式的性质,并能用来计算行列式.

(1)行列式和它的转置行列式相等.

(2)交换行列式的两行(列),行列式变号.

(3)如果行列式中有两行(列)相同,则此行列式为零.

(4)行列式中某行(列)所有元素的公因子可提出.

(5)行列式中若有两行(列)对应元素成比例,则此行列式为零.

(6)行列式中某行(列)的元素都是两数之和,则此行列式等于两个行列式之和:如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(7)把行列式某行(列)的 k 倍加到另一行(列)上,行列式的值不变.

(8)行列式按行(列)展开性质:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} D, & \text{当 } i = j \\ 0, & \text{当 } i \neq j \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = \begin{cases} D, & \text{当 } i = j \\ 0, & \text{当 } i \neq j \end{cases}$$

3. 熟悉特殊行列式的有关结论.

(1)上(下)三角行列式的值等于其对角线上元素之积,如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(2)分块上(下)三角行列式的值有类似于上面的结论,如

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1n} & & & \\
\cdots & \cdots & & & 0 & \\
a_{n1} & \cdots & a_{nn} & & & \\
c_{11} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
c_{m1} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm}
\end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix}
b_{11} & \cdots & b_{1m} \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
b_{m1} & \cdots & b_{mm}
\end{vmatrix}
$$

(3)范得蒙(Vandermonde)行列式：

$$
\begin{vmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 \\
x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\
x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}
\end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)
$$

4．克莱姆(Cram)法则：

若 n 元 n 个方程的线性方程组

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n
\end{cases} \tag{1}
$$

的系数行列式

$$
D = \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix} \neq 0
$$

则方程组有唯一解 $x_i=\dfrac{D_i}{D}, i=1,2,\cdots,n$,其中 D_i 是把 D 的第 i 列元素,从上到下依次换成 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 而得的行列式.

当 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 不全为零时,称方程组(1)为非齐次的,否则为齐次的.据克莱姆法则,当系数行列式 $D\neq0$ 时,齐次线性方程组仅有零解:$x_1=x_2=\cdots=x_n=0$.

1.2 重点,难点

1. 掌握四阶及四阶以下行列式的计算,会计算较易的高阶行列式.

2. 克莱姆法则在理论上有其重要性,但用来解线性方程组有其局限性.

(1)只能用来求解满足克莱姆法则条件的方程组.

(2)对于满足克莱姆法则条件的方程组,若未知数较多,因高阶行列式计算运算量较大也限制了克莱姆法则的应用.

我们以后将学习一般的线性方程组的求解方法.尽管如此,对满足克莱姆法则条件的二元、三元等线性方程组,用克莱姆法则求解仍是一个较好的解法.

1.3 例题分析

行列式计算的主要方法,可归纳如下:

1. 按行列式定义计算行列式.

对二阶,三阶通常按定义计算,并形象地称之为“对角线”法.但要注意所谓的对角线法对四阶以上的行列式是不能用的.

2. 利用行列式的性质,把行列式化成上三角,或下三角行列式.

3. 把行列式按某行,或某列展开.

4. 利用行列式性质(6),把行列式拆开.

5. 利用已知的结果,如分块上三角或下三角行列式的值等于若干个行列式的值之积.

例 1 填空题

(1)如$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a & -4 \end{vmatrix}=0$,则 $a=$____.

(2)如$\begin{vmatrix} 0 & a \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=0$,则 $a=$____.

答 (1)$a=-2$,(2)$a=0$.

此题不难,通常二阶、三阶行列式的计算都不难,有所谓的对角线法.此题值得读者思考的是:二阶行列式的值为零的充分必要条件是什么?(作为习题)列成比例

要注意:所谓的对角线法对四阶及四阶以上的行列式是不能用的,因此掌握行列式的性质.并能熟练地运用,对行列式的计算就很重要了.

下面举两个初学者易犯的错误:

错 1 有人把行列式$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$的第 1 行加到第 2 行上,再把行列式的第 2 行加到第 1 行上得:$1=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\xlongequal[r_2+r_1]{r_1+r_2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0$.

当然错了,错在把第 1 行加到第 2 行上后,第 2 行不再是(0,1),而是(1,1),再把第 2 行加到第 1 行上,第 1 行不是(1,1),而是(2,1).

在证明某个行列式的值为零时,有些初学者会犯这样的错误.

错 2 一些初学者对行列式性质(6)也会出错.如

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

从而

$$1=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=0$$

正确地应用行列式的性质(6)计算行列式,若把 n 阶行列式

的每一行(列)拆成两行(列)的话,原行列式应为 2^n 个行列式之和.

例 2 计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} a & & & b \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ b & & & a \end{vmatrix}_n$

(3) $\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}_n$ (4) $D_n = \Delta(a_{ij})$,其中 $a_{ij} = |i-j|$

分析:利用行列式的性质把行列式化成上三角或下三角行列式来求值,这是行列式计算的主要方法之一.困难在于什么样的行列式用什么方法计算较简便,这需要读者多做练习,勤思索,从中积累经验.

解 (1)此行列式中数的排列,读者似曾相识.请看杨辉三角形

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \\ 1 & 3 & 6 & & \\ 1 & 4 & & & \\ 1 & & & & \end{array}$$

读者知道:杨辉三角形内部任一数都等于肩上两数之和.因此若从题中行列式的第 k 行减去第 $k-1$ 行,$k=2,3,4$.则有

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \end{vmatrix}$$

对上式右边的行列式,采用类似的方法.

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&1&3&6\\0&1&4&10\end{vmatrix}\overset{r_4-r_3}{\underset{r_3-r_2}{=\!=\!=}}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&0&1&3\\0&0&1&4\end{vmatrix}\overset{r_4-r_3}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{vmatrix}=1$$

故此题的行列式的值为 1.

(2)此题不难,只要把第 n 行加到第 1 行上,就可看出把行列式化成下三角行列式的方法了.

$$\begin{vmatrix}a&&&b\\&a&&\\&&\ddots&\\&&&a&\\b&&&a\end{vmatrix}\overset{r_1+r_n}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}a+b&&&a+b\\&a&&\\&&\ddots&\\&&&a&\\b&&&a\end{vmatrix}$$

$$\overset{c_n-c_1}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}a+b&0&\cdots&0\\&a&\ddots&\vdots\\&&\ddots&\\&&a&0\\b&&&a-b\end{vmatrix}$$

$$=(a^2-b^2)a^{n-2}$$

(3)此题的行列式其对角线以下元素全相同,若此题的行列式第 1 行元素也全相同的话,只要从第 2 行到最后一行都减去第 1 行的适当倍,就可把此行列式化成上三角的.而让第 1 行元素全一样,只要把第 2 行一直到最后一行全加到第 1 行上就可办到.为了运算简便,可先行提出第 1 行的公因子:

$$\begin{vmatrix}a&b&b&\cdots&b\\b&a&b&\cdots&b\\b&b&a&\cdots&b\\&&\cdots\cdots&&\\b&b&b&\cdots&a\end{vmatrix}_n=(a+(n-1)b)\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\b&a&b&\cdots&b\\b&b&a&\cdots&b\\&&\cdots\cdots&&\\b&b&b&\cdots&a\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[k=2,\cdots,n]{r_k-br_1}(a+(n-1)b)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & & 0\\ 0 & \cdots\cdots & 0 & & a-b\end{vmatrix}$$

$$=(a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}$$

(4)此题有一定的难度,先解决

$$D_1=|0|=0,D_2=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1$$

对高阶的看不清解法,不妨具体写出一个行列式来观察.如 D_5:

$$D_5=\begin{vmatrix}0 & 1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1\\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0\end{vmatrix}$$

发现如果把最后一行加到第 1 行上,第 1 行元素就全成了 4,再提取第 1 行公因子,于是

$$D_5=4\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1\\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0\end{vmatrix}$$

再来观察这个行列式,发现对角线以下的元素,从最后一行起一直到第 3 行,都是上一行与第 1 行元素之和.于是,只要从最后一行起一直到第 3 行都减去上一行再减去第 1 行,又从第 2 行中减去第 1 行.就可得到一个上三角行列式.

$$D_5 = 4\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & \times & \times & \times \\ \vdots & \ddots & -2 & \times & \times \\ \vdots & & \ddots & -2 & \times \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2^3 \cdot (-1)^4$$

打×处的元素不必具体算出.

一般地，只不过把上面的解法写成一般形式，读者可自行完成. 此题最后结果是 $D_n = (-1)^{n-1} \cdot (n-1) \cdot 2^{n-2} (n \geqslant 1)$.

例 3 计算行列式 $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$.

说明，此题并不困难，但把它化成三角行列式来计算，因分母不能为零，需进行讨论就较麻烦. 行列式计算另一个主要方法是把行列式按某行(列)展开. 如此题可把行列式按第 1 列展开，再按对角线法计算三阶行列式就较易.

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b & 1 & 0 \\ -1 & c & 1 \\ 0 & -1 & d \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & c & 1 \\ 0 & -1 & d \end{vmatrix}$$

$$= a(bcd + b + d) + (cd + 1)$$

$$= abcd + ab + ad + cd + 1$$

例 4 选择题

下列行列式中哪一个不等于零.

(A) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ (B) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

(C) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ (D) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

解 因

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ b_2 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & b_4 & a_4 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{展开}]{\text{按第一行}} a_1 \begin{vmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ b_3 & a_3 & 0 \\ 0 & b_4 & a_4 \end{vmatrix}$$

$$-b_1 \begin{vmatrix} b_2 & a_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 \\ 0 & 0 & b_4 \end{vmatrix} = a_1a_2a_3a_4 - b_1b_2b_3b_4$$

故选(B).

例 5 计算下列 n 阶行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & -(n-1) \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} a & b & & & & \\ c & a & b & & & \mathbf{0} \\ & c & a & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \mathbf{0} & & c & a & b \\ & & & & c & a \end{vmatrix}$

解 (1)此题中行列式从第2行起到最后一行,每行 n 个元素之和都为0.把第2列到最后一列全加到第一列上,再把得到的行列式按第1列展开:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & -(n-1) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & -(n-1) \end{vmatrix}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} -1 & & & & \\ 2 & -2 & & \text{0} & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & \text{0} & \ddots & \ddots & \\ & & & n-1 & -(n-1) \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}\frac{(n+1)!}{2}$$

(2)此题中的行列式除对角线元素以外全是2,从第1列、第3列一直到最后一列中减去第2列,再把得到的行列式按第2行(或按第1列展开)可得一对角行列式(下三角行列式).

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix} -1 & & & & \\ & 1 & & & \text{0} \\ & & 2 & & \\ & \text{0} & & \ddots & \\ & & & & n-2 \end{vmatrix}$$

$$=-2\cdot(n-2)!$$

(3)解法1.

把题中行列式按第1列展开:

$$D_n=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$
= x\begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}
$$

$$
+(-1)^{n+1}a_n\begin{vmatrix} -1 & & & & \\ x & -1 & & 0 & \\ & \ddots & \ddots & & \\ 0 & & \ddots & \ddots & \\ & & & x & -1 \end{vmatrix}_{n-1}
$$

$$
= xD_{n-1} + a_n
$$

把 $D_n = x\cdot D_{n-1} + a_n$ 作为递推公式,因 $D_1 = |x + a_1| = x + a_1$,故

$$
\begin{aligned}
D_n &= x \cdot D_{n-1} + a_n = x(xD_{n-2} + a_{n-1}) + a_n \\
&= x^2 D_{n-2} + xa_{n-1} + a_n = \cdots \\
&= x^{n-1}D_1 + x^{n-2}a_2 + \cdots + xa_{n-1} + a_n \\
&= x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n
\end{aligned}
$$

解法 2.

把题中行列式的第 2 列的 x 倍,第 3 列的 x^2 倍,一直到第 n 列的 x^{n-1} 倍全加到第 1 列上.得到的行列式的第 1 列中除最后一个元素为:$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ 外,其它元素全是 0.故

$$
D_n = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P(x) & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}
$$