可剖形在欧氏空间中的实现问题

吴文俊

科学出版社

内 容 简 介

一个空间嵌入另一空间(例如欧氏空间)是否可能以及这些嵌入所依据的同痕的分类问题，已成为拓扑学中重要的中心问题之一，也是许多拓扑学家从各种不同角度用各种不同方法研究的对象之一. 本书是作者从1954年以来在这方面研究工作的一个总结报告，它的方法在于研究空间的去核 p 重积，即将 p 重积除去对角以后所余的空间，这一概念可追溯到 Van Kampen 早在1932年的一篇重要论文. 其次再应用 P. A. Smith 有关周期变换的理论以获得若干作为 Smith 特殊群中上类的不变量，它们之为0是嵌入的必要条件而在某些极端情形又同时为充分条件. 关于嵌入的许多已知结果以及一些新的结果，虽有着种种不同的来源，都可用这一统一的方法得出. 浸入与同痕也可用同样办法处理并得出相应的类似结果.

可剖形在欧氏空间中的
实现问题

吴 文 俊

*

科 学 出 版 社 出版
北京朝阳门内大街137号
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1978年5月第一版　　开本：787×1092　1/16
1978年5月第一次印刷　　印张：17
印数：0001—5,330　　字数：347,000

统一书号：13031·685
本社书号：988·13—1

定价：2.60元

目 录

绪　　论

§1. 实现或嵌入问题

依照 F. Klein 的经典的理论，几何学研究某种类型图象的某种类型的性质，而且也正由于所考虑的图象与性质各不相同，相应地形成了种种不同的几何学分支．如果细加分析，那么各种几何图象，尽管来源有别，归根到底往往归结为位于某一欧氏空间中的“具体”的图象，这个欧氏空间可以是有限维的，也可以是无限维的，即 Hilbert 空间．特别是当图象来源导自分析时是如此．另一方面，为了要研究这些图象的内在的特性，也就是属于图象本身而与所在空间无关的那种特性，就有必要从一开始就以抽象而独立的形式来加以定义，例如从 Cantor 关于欧氏空间中点集的研究逐渐发展成的拓扑空间的概念，以及根据欧氏空间中光滑曲线、曲面等引伸而成的 Riemann 流形或微分流形的概念等．一个自然引起的问题是：如何能把“抽象”概念与“具体”事物恒同起来，或更明确地说，决定是否一个“抽象”的事物可“实现”为在某一有限维或无限维欧氏空间中“具体”的事物．这样一个问题的正面的答案我们称之为“实现”定理或“嵌入”定理，许多几何学中的基本定理正是属于这样一种性质．仅从拓扑学方面来说，就可以提到下面两个例子：

1° Urysohn 定理：Hilbert 空间中的子空间，即正则而有可数基的那种拓扑空间．

2° Menger-Nöbeling 定理：欧氏空间中的闭囿集，即维数有限、有可数基而紧致的那种拓扑空间．

这些定理给与了某种类型的图象以一个总的概括．所谓空间的正则性、紧致性等等本来是对于欧氏空间中图象观察分析而抽象出来的，上面的两条定理说明，在某种类型图象所具有的无数的拓扑性质里面，这些性质是具有代表意义的，因此它们在拓扑中占据着重要地位乃是当然的．

对于这一类问题，我们还可进一步提出，在一特定维数的欧氏空间中所能容纳的图象，例如平面中所有可能的线性图，三维空间中所有可能的 Riemann 曲面等．就拓扑学而论，我们将特别从事于以下问题：

问题 I（空间的拓扑实现）．一个拓扑空间可实现为 N 维欧氏空间中的拓扑子空间的条件为何？

问题 II（复形的半线性实现）．一个复形具有剖分可实现为一 N 维欧氏空间中的欧氏复形的条件为何？

问题 III（微分流形的微分实现）．一个微分流形可实现为一 N 维欧氏空间中的光滑流形的条件为何？

这样的问题要求完全解决，自然希望是极少的．如果与 Riemann 流形在N维欧氏空间中的实现问题相比较，后者自 E. Cartan 以来即使在“局部实现”问题上成果也不多，由此就可以想到前述问题的困难程度如何，事实上，我们的工作也只限于提供一些方法，对上述问题 I—III（主要是问题 II)求得部分成果而已．

这就是本书的目的．

§2. 已知的成果及其分析

在文献中曾经出现过研讨问题 I—III 的几种比较一般的方法，它们对于在N维欧氏空间中实现的可能性问题都曾提供了重要的知识，以下我们将逐一叙述这些方法中的三个方法．

方法 I. 假设一个紧致空间X已实现为一N维欧氏空间 R^N 中的子空间，那么考虑 $R^N - X$ 与X的性质间的关系，即将给出X可实现于这样一个 R^N 中的某些条件．这一方法可以追溯到 Alexander 的早期工作，例如，由 Alexander 对偶定理可知在整系数或 mod 2 Betti 数间有以下关系：$p^i(R^N - X) = p^{N-i-1}(X)$，$i \neq 0$，$p^0(R^N - X) = p^{N-1}(X) + 1$．由此即得 $p^N(X) = p^{-1}(R^N - X) = 0$，而这给出了$X$可实现于 R^N 中的一个必要条件，特别是一个n维闭流形不能在 R^n 中实现．Hantzsche 应用了同样的方法，研究了当一个n维闭流形X实现于 R^{n+1} 中时，在X与 $R^{n+1} - X$ 的下同调群之间的对偶关系，由此推得了X可实现于 R^{n+1} 中时用 Betti 数与挠系数来表达的一些必要条件．同样，在X是n维投影空间时，Hopf 通过对于X与 $R^{n+1} - X$ 间同调环的对偶关系以证明了一个n维投影空间不能在 R^{n+1} 中实现这一定理．与 Hopf 同样的想法使 Thom 获得了更一般的结果：一个n维闭流形X实现于 R^{n+1} 中时用X的同调环表达的某些必要条件．近年来 Peterson 更研究了X与 $R^N - X$（或更正确些说 $S^N - X$、这里 S^N 是假定X已在其中实现的一个n维球)间同调运算的关系，由此而获得若干有趣的实现定理．

方法 II. 假设X已实现于 R^N 中，与第 I 方法有所不同，我们可以不考虑X与其余集 $R^N - X$ 的性质间的关系，而考虑X与它在 R^N 中的邻域的性质之间的关系，这个方法似乎是首先由 Whitney 用之于微分流形在欧氏空间中的微分实现这一问题上的，依据这种思考 Whitney 又创立了球纤维丛理论并引入了微分流形 M 的所谓 Stiefel-Whitney 示性类 $W^i \in H^i(M, \bmod 2)$，以及对偶 Whitney 示性类 $\overline{W}^i \in H^i(M, \bmod 2)$，这些类在拓扑学以及微分几何中都起了重要的作用，就仅与实现问题有关者而论，我们暂时可以提到下面已成经典的 Whitney 定理：

定理 1 (Whitney). 一个n维微分流形 M^n 若能微分实现于一N维欧氏空间中，则必须有

$$\overline{W}^k(M^n) = 0, \quad k \geqslant N - n. \tag{1}$$

微分流形上 Stiefel-Whitney 示性类这一概念曾被 Pontrjagin 推广为更一般的示性类，

其中除 Stiefel-Whitney 示性类外，最重要者为所谓 Pontrjagin 示性类 $P^{4k} \in H^{4k}(M)$ 与对偶 Pontrjagin 示性类 $\bar{P}^{4k} \in H^{4k}(M)$，与上面的 Whitney 定理同样，我们也有下面的

定理 2. 一个 n 维微分流形 M^n 如果能微分实现于一 N 维欧氏空间 R^N 中，必须有

$$\bar{P}^{4k}(M^n) = 0, \quad 2k > N - n. \tag{2}$$

Thom 依据了同一原则但应用拓扑空间的拓扑实现，研究了实现于 R^N 中的空间 X 的 Steenrod 平方运算以及它在 R^N 中邻域的 Steenrod 平方运算间的关系，获得了下面的

定理 3. 一个局部可缩紧 Hausdorff 空间 X 如果可在 R^N 中拓扑实现，必须有

$$Sm^i H^r(X, \bmod 2) = 0, \; 2i + r \geqslant N, \tag{3}$$

这里

$$Sm^i: \; H^r(X, \bmod 2) \to H^{r+i}(X, \bmod 2)$$

是由 Steenrod 平方运算从下关系所确定的某种同态：

$$\sum_{i+j=k} Sm^i Sq^j = \begin{cases} 0, & k > 0 \text{ 时}, \\ \text{恒同同态}, & k = 0 \text{ 时}. \end{cases} \tag{4}$$

同一原则还曾被不少学者用以研究微分流形的微分实现问题，例如 Massey 研究了流形实现于欧氏空间中时它的“管形”的上同调环，Atiyah 则把这一管形作为所谓流形的 Grothenthick 环的一个元素来研究它，等等，似乎循着这一方向还有着广阔的前景.

方法 III. 在 1932 年时 Van Kampen 发表了一篇非常有趣的论文，其内容是关于复形在欧氏空间中的半线性实现，而所用方法的原则则与前二者完全不同. 由于它的重要性我们将在以下作较详细的描述.

很早以前就已经知道，一个 n 维单纯复形 K^n 必可在一 $2n+1$ 维欧氏空间中线性实现，Van Kampen 进一步从事了 K^n 在 $2n$ 维欧氏空间 R^{2n} 中线性实现的问题并依下面的想法来进行：

设想把一个 n 维有限单纯复形 K^n“尽量可能”地线性实现于 R^{2n} 中，一般说来，我们自然不可能期望得到一个真正的实现，但将得到一个几乎近似于真正的实现，换言之，只有有限多个“奇点”的近似真正实现，这些奇点乃是 K^n 中两个本不相遇的 n 维单形放入 R^{2n} 中后可能有的交点. 现在的问题是：(i) 从这些奇点的探讨是否可以导出一些只与 K^n 有关但与放法无关的不变量？(ii) 有什么方法以及在什么条件之下可以除去这些奇点以得到一个真正的(半线性)实现？

为此设 K^n 中的 k 维单形为 S_i^k. K^n 中两个没有公共顶点的单形将称为是分离的. 命 A 为所有无序指数偶 (i, j) 的集合. 对应于分离的 n 维单形 S_i^n 与 S_j^n 所成的偶，作一整数环上的向量空间 L，其维数恰为 A 中元素的个数. 于是 L 中任一向量可表作一组整数 (α_{ij})，这里 $(i, j) \in A$. 对 K^n 中每一对分离的单形 S_α^{n-1} 与 S_l^n 可作一 L 中的向量 $V_{l\alpha} = (\alpha_{ij})$ 如下：如果 i, j 都 $\neq l$，或其中之一，例如 $j = l$，但 S_α^{n-1} 非 S_i^n 的面时，即置 $\alpha_{ij} = 0$，否则置 $\alpha_{il} = \pm 1$（符号适当地选取）. 如果 $P - P'$ 是上面这种向量 $V_{l\alpha}$ 间的一个整系数线性组合，则 L 中的两个向量 P, P' 将称为等价的. 于是 L 中的向量分成了若

干等价类，任一 K^n 到 R^{2n} 中依前面所说的那种近似真正实现，将确定一 L 中的向量 $P=(\alpha_{ij})$，其中 α_{ij} 为 S_i^n 与 S_j^n 在确定定向 R^{2n} 中的交截数．Van Kampen 的工作指出，不论 K^n 到 R^{2n} 中的近似真正实现为何，相应向量 P 的等价类总是相同的，因之是复形 K^n 的一个不变量，而这给出了上面问题（I）的一个答案，记此不变量为 $V(K^n)$，则显然有下面的定理．

定理 4 （**Van Kampen**）．一个 n 维有限单纯复形 K^n 如能在 R^{2n} 中线性实现（或甚至半线性实现），必须有

$$V(K^n)=0 \tag{5}$$

（即等价类 $V(K^n)$ 含有 L 中的 0 向量）．

由 $V(K^n)$ 的定义可见由一 K^n 到 R^{2n} 中的近似真正实现 f 所确定的向量 P，可以视为是 f 成为一个真正实现的某种"阻碍"，它体现了 f 与一真正实现之间差距的某种度量，因此自然地引起这样的猜测，即 $V(K^n)$ 之为 0 将使奇点的除去成为可能，以致条件(5)不仅是 K^n 可线性或半线性地实现于 R^{2n} 中的必要条件，同时也是充分条件．在 $n>2$ 时，Van Kampen 也曾发表了这样的一个证明，但其中一个根本性的错误使这一证明本身不能成立，这一问题因之虚悬直至晚近始获解决，这在下面还将论及．

如果 Van Kampen 只考虑了复形在欧氏空间中的线性或半线性实现的问题，那么 Whitney 与 Pontrjagin 在考虑微分流形在欧氏空间中的微分实现问题时，也使用了与之有某种类似的"阻碍"方法．例如，早在 1936 年时，Whitney 就证明了一个 n 维微分流形 M^n 必可微分实现于一 $2n+1$ 维欧氏空间中．如果我们尝试把 M^n 尽可能地微分实现于某一 N 维欧氏空间中，而 $N\leqslant 2n$ 时，一般说来将出现一些奇点，而象 Pontrjagin 所证明的那样，这些奇点将负载某些下闭链，它们的对偶上同调类将与合理地选择的近似真正实现无关而为流形不变量，在后来被称为流形的示性类，它们包括了在方法 II 中已经提到过的 Stiefel-Whitney 示性类与 Pontrjagin 示性类．从这一点也可平凡地得出定理 1 与 2 来，再者，在 $N=2n$ 时，M^n 到 R^{2n} 中一个合理的近似真正实现将只有一些孤立的奇点，而除去这些奇点的一些方法使 Whitney 获得下面的且同样已成为经典的定理：

定理 5 （**Whitney**）．任一 n 维微分流形必可微分实现于 R^{2n} 中．

象由 Shapiro 与作者所指出的那样，在 $n>2$ 时这一 Whitney 的方法也可用在某些情况下移去一个 n 维复形到 R^{2n} 中一近似真正半线性实现中所出现的奇点，而这恰好弥补了 Van Kampen 原证中的缺陷，从而回答了在上述情形下的问题（II）：

定理 6 （**Van Kampen-Shapiro-吴文俊**）．一个维数 $n>2$ 的有限单纯复形 K^n 如果有

$$V(K^n)=0,$$

则必可半线性地实现于 R^{2n} 中．

应该提到，象上面所描述的由 Van Kampen 与 Whitney 所建立的基本想法，已被 Haefliger 用之于微分流形微分实现问题上而且推广甚远，Haefliger 有关流形的这一理论，

在什么程度上可以推广到可剖形或复形的实现问题上，乃是一个极有意义的课题.

§3. 本书中的方法

本书中用以处理实现问题的方法，奠基于下面简单的观察. 一个空间X到另一空间Y中的(拓扑)实现，需要存在一个一对一的X到Y中的映象f，以致$f(X)$在f下与X拓扑等价，这样一个实现映象f，因之是一个"拓扑"的连续映象，其主要的特征之一是一对一的，因此所谓实现问题是一"拓扑性"的问题，而与流形于代数拓扑中大部分问题，主要是属于"同伦性"的问题有别. 对后者，由于主要是"同伦性"的，故代数拓扑中的强有力的"同伦"方法，往往直接可以应用上去，而对前者则否. 为了要克服这一潜在于实现问题中的困难，必须找到合适的方法把映象f的一对一性显露出来，然后再使用通常的同伦方法.

为此我们引入了空间$\tilde{X}^*$与X^*，各由X的所有有序与无序点偶(x_1, x_2)与$[x_1,x_2]=[x_2,x_1]$所组成，这里$x_1, x_2 \in X$而$x_1 \neq x_2$. 试考虑从Y依同样方式导出的空间$\tilde{Y}^*$与Y^*，于是一个实现映象$f:X \to Y$将自然地引出实现映象$\tilde{F}:\tilde{X}^* \to \tilde{Y}^*$与$F:X^* \to Y^*$，这里$\tilde{F}(x_1, x_2) = (f(x_1), f(x_2))$与$F[x_1, x_2] = [f(x_1), f(x_2)]$，如果估计到映象$f$的一对一性在定义$\tilde{F}$与$F$时即已用到，就不难引导到这样一个猜测：即使我们只考虑$\tilde{F}$与F的连续性，也要比只考虑f的连续性者为多，而这仅仅是"同伦"方法在$\tilde{F}$与F上的应用，这就可给出X到Y中实现可能性的一些实质性的线索. 不出所料，真正的情况确是这样.

事实上，试记$\tilde{X}^*$到X^*以及$\tilde{Y}^*$到Y^*的自然投影各为π_X与π_Y，则有以下作为连续映象的可交换图象，其中$\tilde{F}$与F的一对一性我们已置诸不顾：

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}^* \arrow[r, "\tilde{F}"] \arrow[d, "\pi_X"] & \tilde{Y}^* \arrow[d, "\pi_Y"] \\ X^* \arrow[r, "F"] & Y^* \end{tikzcd} \tag{*}$$

现在的问题是：从这样一个可交换图象能得出些什么结论呢?

对于这样的问题是有现成的工具可用的，显然$\tilde{X}^*$是X^*上的一个二叶覆迭空间，其覆迭变换是一在$\tilde{X}^*$中没有定点而周期等于2的拓扑变换，于是P. A. Smith的著名理论指出对这样一对空间$(\tilde{X}^*, X^*)$可配以一组上类$A^m(\tilde{X}^*, X^*) \in H^m(X^*, I_{(m)})$, $m \geqslant 0$，这里$I_{(m)}$等于整数群或模2整数加法群，视m为偶数或奇数而定. 由于$\tilde{X}^*$, X^*与π_X都完全依赖于空间X，故这些类$A^m(\tilde{X}^*, X^*)$实际上是X自身的拓扑不变量而可合理地使用下面的记号

$$\Phi^m(X) = A^m(\tilde{X}^*, X^*) \in H^m(X^*, I_{(m)}).$$

容易证明$\Phi^m(X) = 0$将蕴含不论$i \geqslant 0$如何都有$\Phi^{m+i}(X) = 0$，因之可引进一整数$I(X)$或$+\infty$使其为使$\Phi^n(X) = 0$的最小整数，同样对Y也可定义$\Phi^m(Y)$与$I(Y)$,

于是依 P. A. Smith 的理论从可交换图象(*)应可得

$$F^*\Phi^m(Y) = \Phi^m(X).$$

由此即得

定理 1. 一个空间X如果能拓扑实现于一空间Y中,则必须有

$$I(X) \leqslant I(Y).$$

特别在Y等于一N维欧氏空间R^N时，可证$I(R^N) = N - 1$. 因之有以下定理作为推论:

定理 2. 一个空间X如果可在N维欧氏空间R^N中拓扑实现,则必须有

$$I(X) \leqslant N - 1,$$

或即

$$\Phi^N(X) = 0.$$

这两定理虽然是 P. A. Smith 理论的直接推论，却是我们整个理论的核心. 值得注意的是，这些定理，尽管如此不足道，却还包含了象 § 2 所叙述的 Whitney, Thom, Van Kampen 等人的主要结果作为它们的特款. 更精确言之,我们有以下诸定理(ρ_2表模 2 约化):

定理 3. 如果X是一局部可缩的紧 Hausdorff 空间,且有$\rho_2\Phi^N(X) = 0$, 则有

$$Sm^iH^r(X, \mathrm{mod}2) = 0, \quad 2i + r \geqslant N.$$

定理 4. 如果M^n是一n维微分流形,且有$\rho_2\Phi^N(M^n) = 0$, 则

$$\overline{W}^k(M^n) = 0, \quad k \geqslant N - n \text{时}.$$

定理 5. 一个n维有限单纯复形K^n的 Van Kampen 不变量$V(K^n)$, 如果适当地给以诠释,即为上类$\Phi^{2n}(|K^n|)$.

最后一个定理说明n维复形K^n的上类$\Phi^{2n}(|K^n|)$可以诠释为K^n到R^{2n}中线性或半线性实现的某种阻碍，对于其他的那些类$\Phi^m(|K^n|)$也同样,而这给出了这些Φ-类的一个阻碍理论,这一理论由作者也由 Shapiro 所建立,特别是,象在 § 2 中及其末所叙述的那样, Van Kampen 的方法配合着 Whitney 的一个方法，足以移去 Van Kampen 原证中的一个缺陷而与§ 2的定理 5 相结合时,可用以证明下面的

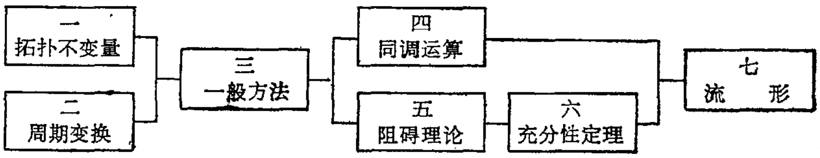
定理 6. 一个维数$n > 2$的有限可剖形K^n在R^{2n}中可拓扑实现的充要条件是$\Phi^{2n}(|K^n|) = 0$.

应该提到上面的简要理论可以循着种种不同的方向加以推广. 首先，不仅可以考虑实现或嵌入问题,还可用同样方法来考虑局部实现或浸入以及同痕等问题,并可获得与定理 6 相当的类似结果. 其次,与空间X相配的空间$\tilde{X}^*$可视为由一两个点组成的标准空间Z到X中所有拓扑映象所构成的一个空间$T(Z,X)$. 于是不用这一Z以及Z到X中的拓扑映象作为标准空间与标准映象，我们也可使用其他的标准空间作为Z也可用其他类型比拓扑映象更灵活的映象来定义$T(Z,X)$. 例如在本书中我们即考虑了对任意质数p, Z是由p个点所成的空间以及Z等于碟形等这些情形. 最后，在某些$\Phi^m(X) = 0$时并可发

展一个二阶阻碍的理论，这在 X 等于微分流形的情形已证实是富有成果的，但由于这一理论正处于发展过程中，故本书不得不割爱．对此有兴趣的读者，可参看在《中国科学》1964 年度中发表的岳景中与作者的有关短文．

§4. 本书的结构

本书共分七章，其逻辑上的联系如下图所示：



第三章在全书中占据着中心的位置．它叙述了所使用的一般方法，说明了有关的基本概念，并提出了研究各类问题的基本不变量，即研究嵌入问题的 $\tilde{\Phi}_p$-类，研究浸入问题的 $\tilde{\Psi}_p$-类以及研究同痕的 $\tilde{\Theta}$-类等．第一、二两章比较说来是属于准备性质的，前者指出了在第三章中所引进的那种基本不变量的特性，即拓扑不变但非同伦不变的那种性质，并叙述了构成具有这种特性的不变量的一个一般方法，后者则介绍了关于周期变换在没有奇点情形下的 P. A. Smith 的理论，它给出了工具以构成对我们来说是重要的那些基本不变量．

最后四章中主要介绍第三章所述一般方法的应用，第四章引进了同调运算，与通常方法不同而仍然依据于 P. A. Smith 关于周期变换的理论，通过这些运算表达出嵌入与浸入的某些条件，特别是因此证明了 § 2 中 Thom 的定理 3 以及 § 3 中的定理 3，第五章包括了 Van Kampen 阻碍理论在嵌入、浸入与同痕方面的推广，依据这一阻碍理论将在第六章中证明，在一般情形时用我们的基本不变量来表达的那些必要条件，在某些临界情形下同时也是充分的．最后一章则致力于流形的嵌入、浸入与同痕问题，我们不仅证明了 Whitney 的那些定理（§ 2 的定理 1 与 2），并证明了各种条件，即象第三章中用本书的基本不变量所表达的条件，象第四章中用同调运算表达的条件，以及在末一章中用示性类来表达的那些条件，在组合流形的情形下恰恰是彼此等价的．

应该提出，我们所考虑的问题主要是 § 1 的问题 I 与 II，而问题 III 实际上并未触及，即使是 Whitney 的定理以及各种条件的等价关系，我们也是就组合流形的拓扑嵌入与线性嵌入等等这些情形下来考虑的，而不是考虑微分流形的微分嵌入等等情形，因此整个处理方式可以说是初等性质的，唯一的例外或许是第六章的片段以及第七章的 § 5．事实上，微分流形的微分嵌入等问题需用的方法与工具和本书中所使用者相距甚远，也因为这一原因我们完全把它略去了．

在本书之末又附入了一些历史性注释，对于有关的历史发展以及与其他理论的联系

作了一些说明.

作者非常感谢许多同志的帮助，特别应该提到北京大学的廖山涛教授与中国科学院数学研究所已故岳景中同志. 对于前者，作者曾借用他不少重要的想法并贯串于全书之中，而且在第七章中占着重要地位的吴振德的工作，是在廖先生的协助指导下完成的；对于后者，作者曾与他有过不少可贵的讨论，而且第五章中一个重要定理由他给出了一个简单漂亮的证明，并得到他的允许而插入本书中. 此外，作者还愿意提到李培信、江嘉禾、熊金城与虞言林等同志，他们都是在中国科学院数学研究所工作，与作者共事.

吴 文 俊

中国科学院数学研究所

第 一 章

有限可剖形的非同伦性不变量

§1. 复形的概念

为了避免可能有所混乱，我们将叙述一些本书中所采用的名词与符号，它们有时与常用者略有不同.

所谓“复形”，系指“抽象复形”而言，象通常那样，它们定义为某些胞腔的集体，具有非负维数函数 (dim)，面关系 ($\prec$) 与关联数 ($[\,,\,]$)，其详可参阅例如 Lefschetz [6]，第三章§1. 只是除了原有的那些公理之外，我们将再加上一个：闭包有限性. 复形将称为可扩的，如果对任意一维胞腔 σ 有 $\sum[\sigma, \sigma'] = 0$，这里的和号展开在复形的所有顶点 σ' 上. 对任意复形 K 我们置[1)]

$$Cl_K\sigma = \{\sigma'/\sigma' \in K,\ \sigma' \prec \sigma\},$$

$$St_K\sigma = \{\sigma'/\sigma' \in K,\ \sigma \prec \sigma'\},$$

$$Cl_K L = \sum_{\sigma \in L} Cl_K\sigma,$$

$$St_K L = \sum_{\sigma \in L} St_K\sigma\ (\text{对任意子集 } L \subset K).$$

在不致引起混乱时，我们常简写 $Cl_K\sigma$ 为 $Cl\sigma$，余类推.

我们称复形 K 到复形 K' 的一个胞腔间的对应 f 为一集对应，如果它是有限值的，且保持了闭包关系：$fCl_K = Cl_{K'}f$. 如果这个集对应也保持了维数，则将称为一胞腔对应. 如果又是单值的，且保持了面关系与关联数[2)]，则将称为一胞腔映象. 假设两个复形 K 与 K' 是由同样那些胞腔所组成的集体，也有同样的维数函数与面关系，只是在关联数上有所不同，但也恒有关系 $[\sigma, \sigma']_K = \alpha(\sigma)\alpha(\sigma')[\sigma, \sigma']_{K'}$，这里 $\alpha(\sigma) = \pm 1$，$\sigma \in K$，而在 σ 是 K 的顶点时 $\alpha(\sigma) = +1$. 这时我们就说 K 与 K' 只有定向上的差别，而称其一为另一的重新定向. 复形 K 到复形 K' 的一个胞腔对应将称为一广义胞腔映象，如果 K 与 K' 适当地重新定向后，它变成一个胞腔映象.

对任意复形 K 与系数群 G，象通常那样可确定一组下链群 $C_q(K, G)$ 与一组上链群

1) 对于集合的并集，我们常用记号 $\sum$ 而不用 $\cup$.

2) 即对任意 $\sigma \in K$ 与 $\sigma' \in K'$，有 $[f\sigma, \sigma'] = \sum_{\tau \in f^{-1}\sigma'} [\sigma, \tau]$.

$C^q(K, G) = \mathrm{Hom}(C_q(K), G)$，也确定了一个 Mayer 下链复形

$$C(K, G): \cdots \to C_q(K, G) \xrightarrow{\partial} C_{q-1}(K, G) \xrightarrow{\partial} \cdots \to C_0(K, G) \xrightarrow{\partial} 0,$$

与一个 Mayer 上链复形

$$C^*(K, G):\ 0 \xrightarrow{\delta} C^0(K, G) \xrightarrow{\delta} \cdots \to C^q(K, G) \xrightarrow{\delta} C^{q+1}(K, G) \to \cdots,$$

其中下边缘同态 ∂ 与上边缘同态 δ 为明确起见，有时也记作 ∂_K，δ_K 或 $\partial_q: C_q(K, G) \to C_{q-1}(K, G)$，$q \geqslant 0$（规约 $C_{-1} = 0$）与 $\delta^q: C^q(K, G) \to C^{q+1}(K, G)$，$q \geqslant -1$（规约 $C^{-1} = 0$）. 象通常那样，我们采用记号 $Z_q(K, G) = \mathrm{Ker}\,\partial_q$，$B_q(K, G) = \mathrm{Im}\,\partial_{q+1}$，$Z^q(K, G) = \mathrm{Ker}\,\delta_q$，$B^q(K, G) = \mathrm{Im}\,\delta^{q-1}$，$H_q(K, G) = Z_q(K, G)/B_q(K, G)$，$H^q(K, G) = Z^q(K, G)/B^q(K, G)$，而称之为在相应维数对相应系数群而言的下闭链群、下边缘群、上闭链群、上边缘群与下同调群、上同调群. 在这些记号中，如果 $G = I$，这里 I 以后总是指整数加法群，则符号 G 常略去不写.

有时我们也常需考虑有限或紧致上链所成的群，这些上链只在 K 的有限多个胞腔上才取非 0 的值，这些群我们将记之为 $\bar{C}^q(K, G)$，$q \geqslant 0$. 如果 K 是局部有限的，即对任意 $\sigma \in K$，$St_K\,\sigma$ 是一个有限集，则 $\delta\bar{C}^q(K, G) \subset \bar{C}^{q+1}(K, G)$ 而有一 Mayer 上链复形（$\bar{\delta} = \delta$ 的限制）.

$$\bar{C}^*(K, G):\ 0 \to \bar{C}^0(K, G) \to \cdots \to \bar{C}^q(K, G) \xrightarrow{\bar{\delta}} \bar{C}^{q+1}(K, G) \to \cdots.$$

因之对于局部有限的复形 K，通过 $\bar{C}^*(K, G)$ 还可引入紧致上闭链群、紧致上边缘群与紧致上同调群等概念，各依以下诸式来定义

$$\bar{Z}^q(K, G) = \mathrm{Ker}\,\bar{\delta}^q, \quad \bar{B}^q(K, G) = \mathrm{Im}\,\bar{\delta}^{q-1},$$
$$\bar{H}^q(K, G) = \bar{Z}^q(K, G)/\bar{B}^q(K, G).$$

当 K 是局部有限时，我们将以 j_K 或径直以 j 表上链复形的恒同同态

$$j: \bar{C}^*(K, G) \to C^*(K, G)$$

与上链群之间的恒同同态

$$j: \bar{C}^q(K, G) \to C^q(K, G).$$

由此引出的上同调群间的同态将记为

$$j_K^* \text{ 或 } j^*: \bar{H}^q(K, G) \to H^q(K, G).$$

在 K 的一切顶点上都取值 1 的 0 维整系数上链将记为 1_K，于是 K 是可扩的条件等价于说 1_K 是一上闭链，在这时 1_K 将称为 K 的单位闭链而它的上同调类称为 K 的单位类，记作 $\mathbf{1}_K$.

对 K 的任意 q 维胞腔 σ，在 σ 上取值 1，而在其他 q 维胞腔上都取值 0 的这一整系数上链有时也记作 $\{\sigma\}$.

任一从复形 K 到复形 L 的胞腔映象（或广义胞腔映象）f 将引出相应 Mayer 下链与上链复形的同态，记作 $f_\#: C(K, G) \to C(L, G)$ 与 $f^\#: C^*(L, G) \to C^*(K, G)$. 这些同态是指下链映象组 $f_\#: C_q(K, G) \to C_q(L, G)$ 与上链映象组 $f^\#: C^q(L, G) \to C^q(K, G)$

而言，它们都是同态且各与下边缘与上边缘运算可交换．由此引出下同调群与上同调群间的同态，将记为

$$f_*:H_q(K,G)\to H_q(L,G)\text{ 与 }f^*:H^q(L,G)\to H^q(K,G).$$

胞腔映象 f 将称为正常的，如果对每一 $\tau\in L$，$f^{-1}(\tau)$ 只有有限多个 K 的胞腔．这时 f 也将引出 Mayer 紧致上链复形（假定 K，L 都是局部有限的）间的同态 $\bar{f}^{\#}$: $\bar{C}^*(L,G)\to\bar{C}^*(K,G)$，也就是一组同态 $\bar{f}^{\#}:\bar{C}^q(L,G)\to\bar{C}^q(K,G)$，与 δ_K，δ_L 相交换．由此引出的紧致上同调群的同态将记为 $\bar{f}^*$: $\bar{H}^q(L,G)\to\bar{H}^q(K,G)$．如果 f 是 K 到 L 的一个广义胞腔映象而在 K，L 都重新定向后相应从 K' 到 L' 的胞腔映象 f' 是正常的，则我们就说 f 是正常的．由于同构关系 $C^*(K,G)\approx C^*(K',G)$ 是确定形式的，因之我们将把 $f'^{\#}$: $C^*(K',G)\to C^*(L',G)$等等径直写成 $f^{\#}$: $C^*(K,G)\to C^*(L,G)$，余类推．

一个复形将称为无循环的，如果它在下述意义上是同调平凡的，即$H_q(K)=0,q>0$时，而任一 0 维下闭链 $z=\sum n_i\sigma_i^0$（n_i 为整数，σ_i^0 为K的 0 维胞腔）只须 $\sum n_i=0$ 即为一下边缘．复形将称为局部无循环的，如果对任意 $\sigma\in K$，$Cl\sigma$ 都是无循环的．

设 L 是复形 K 的一个闭子集 L，即对任意 $\sigma\in L$ 有 $Cl\sigma\subset L$ 的子集 $L\subset K$．这时若赋予子集 L 与 $K-L$ 以原来 K 中的维数函数、面关系与关联数，即可将 L 与 $K-L$ 都变为复形．这样我们可应用以下诸式来引进所谓相对理论

$$C(K-L,G)=C(K,L;G),$$
$$C^*(K-L,G)=C^*(K,L;G),$$

又在 K 因之 $K-L$ 是局部有限时

$$\bar{C}^*(K-L,G)=\bar{C}^*(K,L;G).$$

同样也可引入相对的下链与上链群，下同调与上同调群等，例如

$$H^q(K-L,G)=H^q(K,L;G).$$

这给出了通常引进的相对理论在（抽象）复形这一情形下的另一等价方式．

所谓 n 维欧氏空间 R^n 中的一个 q 维欧氏胞腔（$q\geqslant 0$）意指R^n 中的一个紧 q 维点集，它由 R^n中有限多个闭半空间的交所构成，于是 σ 是一紧闭凸集且 σ 的边界是R^n中有限多个互不相遇 r 维欧氏胞腔的内部的并集，这里 $r\leqslant q-1$．每个这样的 r 维欧氏胞腔都称为 σ 的一个正规面，而 σ 自己也称为 σ 的一个（非正规的）面。为了要强调 σ 是一个点集这件事，我们有时采用记号 $|\sigma|$．

所谓欧氏空间 R^n 中的一个欧氏（胞腔）复形 K，是指R^n中可数个欧氏胞腔 $\{\sigma_i/i\in\vartheta\}$ 的集体，满足以下诸条件：(i) 集体 K 中任两胞腔 $|\sigma_i|$，$|\sigma_j|$的交，只须不是空集，也就是 K 中的一个胞腔 $|\sigma_k|$，且这时 σ_k 是 σ_i 也是 σ_j 的正规面；(ii) 对 K 中任一 σ_i，K 中使 $|\sigma_j|\subset|\sigma_i|$的 σ_j 只有有限多个；(iii) 对 K 中任意 σ_i，K 中使 $|\sigma_j|\not\supset|\sigma_i|$的一切 σ_j 的并集的点集闭包与 Int $|\sigma_i|$ 无公共点（Int 指点集的内部）．这时，K 中一切 $|\sigma_i|$ 的并集称为欧氏复形 K 的空间，记作 $|K|$．欧氏胞腔复形 K 称为是单纯的，如果 K 中每一胞腔 σ_i 都是欧氏闭单形．

每个 q 维欧氏胞腔在 $q>0$ 都恰可依两个方式定向．将一个欧氏胞腔复形 K 中每个维数 $q>0$ 的胞腔 σ 都依一定方式定向，即可得一抽象复形 K'，由 K 中维数 $q>0$ 的定向胞腔与 K 的 0 维胞腔所组成，所有这些复形 K' 彼此都只有定向上的差别因而群 $C_q(K',G)$，$H_q(K',G)$ 等等都是彼此以确定方式同构的，因此我们可径直地用 $C_q(K,G)$，$H_q(K,G)$ 等等来表记这些群．

一个拓扑空间 P 称作一个可剖形，如果有某一欧氏空间 R^N 中的一个欧氏胞腔复形 $K=\{\sigma_i\}$ 与 P 到 K 的空间 $|K|$ 上的一个拓扑映象 τ．这时 P 中诸子集 $\{\tau^{-1}|\sigma_i|\}$ 的集体将称为 P 的一个胞腔剖分，以 $\tau^{-1}\sigma_i$ 为胞腔，并将记之为 $\tau^{-1}K$．我们也称 τ 是剖分 $\tau^{-1}K$ 到 R^N 中复形 $K=\tau(\tau^{-1}K)$ 上的一个欧氏实现．空间 P 也称为剖分 $\tau^{-1}K$ 的空间，记作 $P=|\tau^{-1}K|=\tau^{-1}|K|$．

更一般地说，一个可剖形 P 如果有 K 一组闭子集 τ_i，$i\in\vartheta$，并有一上述意义下的胞腔剖分 $L=\{\sigma_j\}$，$j\in\mathscr{J}$，满足以下诸条件，则 $\{\tau_i\}$，$i\in\vartheta$，所成的集体也将称为 P 的一个胞腔剖分，以 τ_i 为胞腔．这些条件是：(i) 对任一 $\tau_i\in K$，点集 $|\tau_i|-\sum|\tau_j|$ 与一个欧氏空间同拓，这里 $\sum$ 展开于所有使 $|\tau_j|\subset|\tau_i|$，$|\tau_j|\neq|\tau_i|$ 的 $\tau_j\in K$ 上；(ii) 对每一 $\tau_i\in K$，$|\tau_i|-\operatorname{Int}|\tau_i|$ 是 K 中有限多个 $|\tau_j|$ 的并集；(iii) K 中每一 $|\tau_i|$ 是 L 中有限多个 $|\sigma_j|$ 的并集．

对于这样较一般的可剖形 P 的一个剖分 $K=\{\tau_i\}$，P 也将称 K 的空间，记作 $P=|K|$，且每一胞腔 τ_i 在维数 >0 时恰可以两种方式定向．将这些胞腔任意定向，即得一抽象复形 $K'=\{\tau_i'\}$，它是由相应的那些定向胞腔以及 K 中的 0 维胞腔所组成．这些复形 K' 仍只有定向上的差别，与前同我们将径直书写 $C_q(K',G)=C_q(K,G)$，等等．

可剖形 P 称为是有限的，如果它有一个有限的胞腔剖分 K，这时 P 的任一胞腔剖分也是有限的而且 P 事实上是紧致的．

设 E 是一拓扑空间，一个顶点排成一定次序的 p 维欧氏单形 σ 与一 $|\sigma|$ 到 E 的连续映象 φ 所成的偶叫做 E 的一个 p 维奇异单形，我们有时也将它记作 $\varphi\sigma$．两个 p 维奇异单形 (σ,φ) 与 (σ',φ') 当作是等价的，如果有一个保持顶点次序的 σ 到 σ' 上的重心映象 f，使 $\varphi=\varphi' f$．象通常那样，等价的奇异单形将恒同为一，而且奇异单形和它们的等价类在叙述时也不再加以区别．E 的子集 $\varphi|\sigma|$ 将称为奇异单形 (σ,φ) 的支柱，E 的一切奇异单形（更准确地说是一切奇异单形的等价类）的集合，在维数、面关系与关联数自然地定义之下，成为第一章 § 1 意义下的“复形” $S(E)$，叫做 E 的奇异复形．我们将把 $C^r(S(E),G)$，$H^r(S(E),G)$，等等径直地写作 $C^r(E,G)$，$H^r(E,G)$，等等．它们称做 E 的 r 维奇异上链群、奇异上同调群，等等．

一个 E 的奇异单形 (σ,φ) 与 E 的一个子集 F 将称为相离的，如果 $\varphi|\sigma|\cap F=\varnothing$．在 $C^r(E,G)$ 中的一个上链 u 将称为是紧致的，如果 E 有一个紧致子集 F（依赖于 u），使得对任意与 F 相离的 r 维奇异单形 (σ,φ)，有 $u(\sigma,\varphi)=0$．因为 E 的两个紧致子集的并集也是 E 的一个紧致子集，以 G 为系数的 r 维紧致上链构成了 $C^r(E,G)$ 中的一个子群