新世纪

卢元 曾容 主编
曾容 孔庆邮 编

全国名牌大学附中

北京大学附中
复旦大学附中
福建师大附中
华南师大附中
湖南师大附中
辽宁师大附中
北京师大附中
东北师大附中
南京师大附中
上海师大附中
交通大学附中
湖北大学附中
华东师大一附中
华东师大二附中
上海外国语大学附属浦东外国语学校

名师为你家教
高中毕业班
数学

東方出版中心

新世纪全国名牌大学附中
名师为你家教

·高中毕业班数学·

卢 元 曾 容 主编

曾 容 孔庆邮 编

东方出版中心

图书在版编目（CIP）数据

高中毕业班数学/曾容，孔庆邮编．—2版．—上海：东方出版中心，2001.9

（新世纪全国名牌大学附中名师为你家教/卢元，曾容主编）

ISBN 7－80627－709－9

Ⅰ．高…　Ⅱ．①曾…②孔…　Ⅲ．数学课－高中－升学参考资料　Ⅳ．G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字（2001）第14702号

新世纪全国名牌大学附中名师为你家教

——高中毕业班数学

出版发行：东方出版中心
地址：上海市仙霞路335号
电话：62417400
邮政编码：200336
经销：新华书店上海发行所
印刷：昆山亭林印刷厂
开本：787×1092毫米 1/16
字数：390千
印张：17
印数：11,001－18,000
版次：2001年5月第2版　2001年9月第3次印刷
ISBN 7－80627－709－9/G·244
定价：17.00元

内容提要

《新世纪全国名牌大学附中(附小)名师为你家教》丛书,由著名特级教师主编。本丛书在《全国名牌大学附中(附小)名师为你家教》的基础上,根据新世纪中小学教学发展的趋势和现行教学大纲及教材,对其中有关内容进行了修订。

本《高中毕业班数学》为高三学生及有关教师、家长(包括家教老师)提供高质量的家教用书,讲解高三数学的基本知识和解题技能,能使学生掌握正确、有效的学习方法,并提供复习、应考指导。全书分100天、100讲,每天(讲)均设有:1."学习要点"。极为精要地概括这一部分的学习和应考内容;2."家教点窍"。从家教的角度,对上述内容作"点窍"性质的阐述,有知识的介绍,重点、难点的分析,学习、复习方法的指点;3."典型例题"。选择最典型、最能体现学习、应考目标的例题作讲解和评析;4."强化训练"。精选最典型、最能训练学习、应考能力的一批习题,题型灵活多样,既有坡度,又有一定的难度。若干天后设"阶段测试",最后几天设"综合训练"(相当于模拟试卷),书末并附有全部习题答案、提示或简要解题过程。本书体现了名校名师的教学经验和卓有成效的训练、复习方法,利教便学,精要实用,特别便于学生、家长及教师(包括家教老师)使用。一册在手,等于请了一位名师担任家教。

《新世纪全国名牌大学附中(附小)名师为你家教》
编 委 会

编写说明

望子成龙，望女成凤，当前家教成风，“家教热”持续升温。据抽样调查，某校高三学生85%以上请家教，初三学生90%以上请家教。有些学生语、数、英三门学科都请家教，有些学生则连其他一些学科也请家教。学生的双休日几乎成了“家教日”，就连平时也要安排若干时间由家教老师补课。更有甚者，家教还扩展到非毕业班，如小学三、四年级，初中一、二年级，高中一、二年级，都有不少学生请家教。

面对如此火爆的家教现象，我们亦喜亦忧。喜的是：经历了“十年动乱”的中国人民，终于认识到“科教兴国”的意义，对子女的教育越来越多地倾注巨大的热情；忧的是：目前的家教存在诸多问题：1.缺少优秀的教师。有些家教老师水平不高，缺乏经验，敷衍了事，既辜负了家长们的拳拳之心，又浪费了莘莘学子的宝贵时光；2.缺少合适的教材。家教需要在教科书之外另找辅助教材，老师们忙于日常教务，只能匆忙应付，复印一些习题资料应急，费时费力，又难保证质量；3.缺少科学的安排。一年或半年的家教，应当统盘考虑，全面而科学地设计每星期的复习内容，但教师们限于个人的精力，难于精心编拟教学进度，影响了家教的效率。

为了解决家教中普遍存在的“三缺少”问题，我们邀请复旦大学附中卢元、曾容两位特级教师担任主编，组织全国十余所名校的教师，编写了这套《新世纪全国名牌大学附中(附小)名师为你家教》丛书。整套书有如下四个特点：

1．目的性明确。充分体现“名师”的经验，体现了我国一大批名牌大学附中(附小)长期积累的指导毕业生复习应考的“看家本领”，使家教立足于高起点，获得高效率。编写时，力求紧扣教学大纲和考试要求，梳理应考内容，指导应考方法，训练应考能力，家教的目的性十分明确。

2．覆盖面完整。各册书分别包括各年段、各学科毕业考试及升学考试所需的全部知识及能力，但并不平施力量，做到：内容全面，突出重点，明确难点，详略得当。

3．系统性突出。每册书的框架，由主编会同作者精心设计，科学编排，根据各学科内在的知识结构，根据学生接受知识的客观规律，分成100天、100讲。每天(讲)之间，衔接紧密，排列恰当，由浅入深，由简至繁。若干天(讲)后，设“阶段测试”；最后几天(讲)，设“综合训练”，做到系统复习，科学训练。

4．可操作性强。编写本书的作者，都有丰富的家教经验。各册书中，每天(讲)的内容相对完整，便于家教老师据此作两课时左右的讲解及训练。各册书对重点部分作必要反复，对难点部分作必要分解，对能力部分(如语文的写作能力，数理化的解题能力等)作交叉训练，对非重点内容点到为止。每天(讲)均设“学习要点”、“家教点窍”、“典型例题”、“强化训练”等栏目，以“强化训练”为主体。这样的编排充分体现了家教应有的程序，有很强的可操作性。

上述几条,形成了本书独特的优点:

可供教师作为方便实用的家教用书;

可供学生作为无师自通的自习用书;

可供家长作为指导子女的辅导用书。

真可谓“一书在手,家教不愁”。

最后要说明一点:目前全国小学有5年、6年两种学制,因此小学毕业班三册书中,前50天(讲)主要供5年制学生使用,后50天(讲)主要供6年制学生使用。前后两部分内容会有某些交叉,但因为知识和能力需要反复训练才能掌握,所以这样编排也有利于复习巩固。

本《新世纪全国名牌大学附中(附小)名师为你家教》丛书是《全国名牌大学附中(附小)名师为你家教》的修订本,原丛书出版后受到广大学生、教师和家长的欢迎。现根据最新教学大纲和教材的有关要求,根据新世纪中小学教学发展的趋势,对丛书中的部分内容作了必要的修订,力求使之更加完善,更符合读者的需求。

目　　录

第 一 阶 段

第1天　集合的概念与运算

［学习要点］

1. 理解集合、子集、空集、全集的概念，了解属于、包含、相等关系的意义及相关术语、符号。

2. 正确使用列举法、描述法、Veen 图来表示集合，能熟练进行交、并、补的运算。

［家教点窍］

1. 集合中易混淆的概念有：$\in$ 与 $\subset$。前者是元素与集合的关系，后者为集合与集合的关系；$\varnothing$ 与 $\{\varnothing\}$，前者为不含任何元素的集合，后者为以 $\varnothing$ 为元素的单元集。

2. 集合中考查的重点是：(1)子集的概念，$A \subseteq B$：若 $x \in A$，则 $x \in B$；若 $x \notin B$，则 $x \notin A$。(2)交集与并集 $A \cap B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$（关键词"且"），$A \cup B = \{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$（关键词"或"），$A \cap B = A$ 即 $A \subseteq B$、$A \cup B = A$ 即 $B \subseteq A$。(3)公式 $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$，$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$。

3. 集合中考查的难点是：集合运算的综合应用，解题时要充分利用 Veen 图及数轴，迅速地化集合语言为相关的代数语言和几何语言。

［典型例题］

例1　(1) 已知集合 $M = \{(x, y) \mid x + y = 2\}$，$N = \{(x, y) \mid x - y = 4\}$，则 $M \cap N$ 为　　(　　)

(A) $x = 3$，$y = -1$　　(B) $(3, -1)$

(C) $\{3, -1\}$　　(D) $\{(3, -1)\}$

解　(D)。（提示：应明确元素集合的概念。）

(2) 已知 I 为全集，集合 M、$N \in I$，若 $M \cap N = N$，则有　　(　　)

(A) $\overline{M} \supseteq \overline{N}$　　(B) $M \subseteq \overline{N}$　　(C) $\overline{M} \subseteq \overline{N}$　　(D) $M \supseteq \overline{N}$

解　(C)。（提示：由 $M \cap N = N$，即知 $N \subseteq M$。）

(3) 设集合 $I = \{(x, y) \mid x, y \in R\}$，$M = \left\{(x, y) \,\middle|\, \dfrac{y-3}{x-2} = 1\right\}$，$N = \{(x, y) \mid y \neq x + 1\}$，那么 $\overline{M \cup N}$ 为　　(　　)

(A) $\varnothing$　　(B) $\{(2, 3)\}$

(C) $(2, 3)$　　(D) $\{(x, y) \mid y = x + 1\}$

解　(B)。（提示：$\overline{M \cup N} = \overline{M} \cap \overline{N}$。）

(4) 下列结论中，不正确的是　　(　　)

(A) $2 + \sqrt{3} \in \{m \mid m \leqslant \sqrt{10}\}$

(B) $\{0\} \subset \{x \mid x \leqslant 0\}$

(C) $\{\varnothing\} \subset \{x \mid x < 0\}$

(D) $\left\{x \middle| x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in Z\right\} \subset \left\{x \middle| x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{2}, k \in Z\right\}$

解 (C)。

(5) $A = \{1, 2, 3, 5\}$，$B = \{1, 2, 4, 6\}$，$I = A \cup B$，则 $\overline{A} =$ ____，$\overline{B} =$ ____，$\overline{A} \cap \overline{B} =$ ____，$\overline{A} \cup \overline{B} =$ ____，$\overline{A \cap B} =$ ____，$\overline{A \cup B} =$ ____

解 $\overline{A} = \{4, 6\}$，$\overline{B} = \{3, 5\}$，$\overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$，$\overline{A} \cup \overline{B} = \{3, 4, 5, 6\}$，$\overline{A \cap B} = \{3, 4, 5, 6\}$，$\overline{A \cup B} = \varnothing$。(提示:用 Veen 图表示。)

例 2 (1)已知 $A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$，$B = \{x \mid ax - 2 = 0\}$，且 $A \cup B = A$，求实数 a 组成的集合 C。(2)$A = \{x \mid x = \lg(t^2 + 10), t \in R\}$，$B = \{y \mid y = k^2 - 2k - 2, k \in R\}$，试确定 A 与 B 的关系。

解 (1)$A = \{1, 2\}$，$A \cup B = A$，即 $B \subseteq A$，只需 $a \times 1 - 2 = 0$，$a = 2$，或 $a \times 2 - 2 = 0$，$a = 1$。注意 $a = 0$，$B = \varnothing \subseteq A$，故 $C = \{0, 1, 2\}$。(2)A、B 表示函数的值域，分别为 $[1, +\infty)$、$[-3, +\infty)$，故 $A \subset B$。

说明 ①注意$\varnothing$的特殊情形；②转化使(2)的元素明朗化。

例 3 若 $A = \{x \mid x^2 + x - 2 \leqslant 0\}$，$B = \{x \mid 2 < x + 1 \leqslant 4\}$，$C = \{x \mid x^2 + mx + n > 0\}$，并且满足 $(A \cup B) \cap C = \varnothing$，$(A \cup B) \cup C = R$，求 m、n。

解 $A = \{x \mid -2 \leqslant x \leqslant 1\}$，$B = \{x \mid 1 < x \leqslant 3\}$，$A \cup B = \{x \mid -2 \leqslant x \leqslant 3\}$，又 $(A \cup B) \cap C = \varnothing$，$(A \cup B) \cup C = R$，由补集性质知 $C = \overline{A \cup B} = \{x \mid x < -2$ 或 $x > 3\} = \{x \mid x^2 + mx + n > 0\}$，$\therefore$ $x^2 + mx + n = 0$ 的两根为 -2 与 3。由韦达定理得，$m = -(-2 + 3) = -1$，$n = (-2) \cdot 3 = -6$。

说明 应注意集合的运算律。

[**强化训练**]

一、选择题

1. 下列六个关系式：(1) $\varnothing \in \{\varnothing\}$；(2) $\varnothing \subset \{\varnothing\}$；(3) $\{0\} \supset \varnothing$；(4) $0 \notin \varnothing$；(5) $\varnothing \neq \{0\}$；(6)$\varnothing \neq \{\varnothing\}$，其中正确的个数是 ( )

(A) 6　　(B) 5　　(C) 4　　(D) 小于 4

2. 设 $M = \{x \mid 0 \leqslant x < 2\}$，$N = \{x \mid x^2 - 2x - 3 < 0\}$，集合 $M \cap N =$ ( )

(A) $\{x \mid 0 \leqslant x < 1\}$　　(B) $\{x \mid 0 \leqslant x < 2\}$

(C) $\{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$　　(D) $\{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 2\}$

3. 同时满足 $\{1\} \subset A \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$，且 A 中所有元素之和为奇数的集合 A 的个数是 ( )

(A) 5 个　　(B) 6 个　　(C) 7 个　　(D) 8 个

4. 设 I 是全集，集合 $P \subset Q$，则下列结论中错误的是 ( )

(A) $P \cup Q = Q$　　(B) $\overline{P} \cup Q = I$　　(C) $P \cap Q = P$　　(D) $\overline{P} \cap \overline{Q} = \overline{P}$

5. 集合 A、B 满足 $A \cup B = \{a, b\}$，试求集合 A 与 B，则此题的答案共有 ( )

(A) 9 种　　(B) 4 种　　(C) 7 种　　(D) 16 种

6. 已知集合 $A=\{x|y=\lg(x^2-x-2)\}$，$B=\{y|y=x^{-\frac{1}{2}}\}$，则 $A\cap B$ 等于 ( )

(A) $[0,+\infty)$ (B) $(0,+\infty)$ (C) R (D) $(2,+\infty)$

二、填空题

1. 全集为 R，$f(x)=\sin x$，$g(x)=\cos x$，$M=\{x|f(x)\neq 0\}$，$N=\{x|g(x)\neq 0\}$，则 $\{x|f(x)\cdot g(x)=0\}=$ ________

2. $M=\{x|-1\leqslant x<2\}$，$N=\{x|x-k\leqslant 0\}$，若 $M\cap N\neq\varnothing$，则 k 的取值范围是________

3. 已知 $A=\{x||x|<5\}$，$B=\{x|-7<x<a\}$，$C=\{x|b<x<2\}$，且 $A\cap B=C$，则 $a=$ ____，$b=$ ____

4. 已知 $E=\{\theta|\cos\theta<\sin\theta,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$，$F=\{\theta|\operatorname{tg}\theta<\sin\theta\}$，则 $E\cap F$ 为区间______

5. I 的子集 $P\subset Q$，则(A) $P\cup Q=Q$，(B) $\overline{P}\cup Q=I$，(C) $P\cap\overline{Q}=\varnothing$，(D) $\overline{P}\cap\overline{Q}=\overline{P}$ 中，错误的是____

6. 已知 $A=\{x|x^2+(m+2)x+1=0,\ x\in R\}$，且 $A\cap R^+=\varnothing$，则实数 m 取值范围是______

7. 若 $M=\{a,a+d,a+2d\}$，$N=\{a,aq,aq^2\}$，$a\neq 0$，且 $M=N$，则 q 的值为______

8. 若 $A=\{x|x^2-3x-10\leqslant 0\}$ 与 $B=\{x|m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$，满足 $B\subseteq A$，则实数 m 的范围是______

三、解答题

1. 已知 $A=\{x|x^2-ax+a^2-19=0\}$，$B=\{x|\log_2(x^2-5x+8)=1\}$，$C=\{x|x^2+2x-8=0\}$，且 $A\cap B\supset\varnothing$，$A\cap C=\varnothing$，求 a。

2. 设 $A=\{x||x|\leqslant 1\}$，$B=\{x|x^2+4x+3<0\}$，求 C，使其同时满足下列三个条件：(1)$C\subseteq(A\cup B)\cap Z$；(2)$C$ 有两个元素；(3) $C\cap B\neq\varnothing$。

3. 集合 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x|x^2-nx+n-1=0\}$，$C=\{x|x^2-mx+2=0\}$。已知 $A\cup B=A$，$A\cap C=C$，求 m、n。

4. 设 $A=\{x|-2\leqslant x\leqslant t\}$，$B=\{y|y=2x+3,\ x\in A\}$，$C=\{z|z=x^2,\ x\in A\}$，且 $C\leqslant B$，求实数 t 的取值范围。

第2天　函数的概念与反函数

[学习要点]

1. 了解映射的概念，理解函数及有关概念，掌握函数解析式的常用求法。

2. 理解反函数的概念，熟练掌握反函数解析式的求法和互为反函数的图象间的对称性。

[家教点窍]

1. 掌握函数的概念：关键是考察其定义域、对应法则和值域这三个要素。明确函数与其

反函数的关系。要点是明确：(1)定义域与值域的互换性；(2)图象关于 $y=x$ 的对称性。

2. 函数中考查的重点是：函数解析式的常用求法，即凑合法(配方)、换元法和待定系数法。

3. 函数中考查的难点是：正确而迅速地列出题中待求的函数解析式，它是应用函数解决实际问题的关键。

[典型例题]

例 1 (1) 下列各组函数中，表示同一函数的是 ( )

(A) $y=x^0$ 与 $y=1$ (B) $y=\sqrt{x^2}$ 与 $y=x$

(C) $y=e^{\ln x}$ 与 $y=x^2/(\sqrt{x})^2$ (D) $y=\lg x^2$ 与 $y=2\lg x$

解 (C)。(提示：定义域和对应法则是否相同，或两函数图象是否一致，即可判断是否为同一个函数。)

(2) 将函数 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 的图象沿直线 $y=x$ 对折，所得图象的函数解析式为 ( )

(A) $x=y^2$ (B) $y=x^2\ (x\geqslant 0)$ (C) $y=x^2\ (x>0)$ (D) $y=\sqrt{x}$

解 (B)。(提示：定义域与值域的互换。)

(3) 已知 $f(x)=\begin{cases}0 & (x<0),\\ e & (x=0),\\ x+1 & (x>0)。\end{cases}$ 试求 $f(1)$，$f(-1)$，$f(0)$与 $f\{f[f(-1)]\}$。

解 分别为 $2,\ 0,\ e,\ e+1$。

(4) 设 $f(\sqrt{t}-1)=t-2\sqrt{t}$，求 $f(x)$。

解 $f(x)=x^2-1\ (x\geqslant -1)$，凑合法求解。

(5) 设 A 到 B 的映射 $f_1: x\to 2x+1$，B 到 C 的映射 $f_2: y\to y^2-1$，则 $f_2(f_1(x))$ 与 $f_1(f_2(x))$分别为____

解 $f_2(f_1(x))=4x^2+4x$，$f_1(f_2(x))=2x^2-1$。

例 2 求下列函数的反函数：

(1) $f(x)=\dfrac{1}{2}[\lg(x-5)+1]\ (x>5)$；(2) $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & (0\leqslant x\leqslant 1),\\ x^2 & (-1\leqslant x<0)。\end{cases}$

解 (1) 由原式可得 $2y-1=\lg(x-5)$，$\therefore\ x=10^{2y-1}+5\ (y\in R)$，$\therefore$ 反函数是 $y=10^{2x-1}+5\ (x\in R)$。

(2) 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，有 $-1\leqslant y\leqslant 0$，解得 $x=\sqrt{y+1}$，$\therefore\ f^{-1}(x)=\sqrt{x+1}$ $(-1\leqslant x<0)$。当 $-1\leqslant x<0$ 时，有 $0<y\leqslant 1$，解得 $x=-\sqrt{y}\ (0<y\leqslant 1)$，$\therefore$ $f^{-1}(x)=-\sqrt{x}\ (0<x\leqslant 1)$。

于是所求反函数为 $y=\begin{cases}\sqrt{x+1} & (-1\leqslant x\leqslant 0),\\ -\sqrt{x} & (0<x\leqslant 1)。\end{cases}$

说明 求反函数步骤：(1)检查是否有反函数；(2)存在时，由 $y=f(x)$，先解出 $x=f^{-1}(y)$；(3)把 x、y 互相调换，改写为 $y=f^{-1}(x)$；(4)由 $f(x)$的值域得 $f^{-1}(x)$的定义域。若为分段函数，则应分段讨论，特别应注意 x、y 的取值。

例 3 (1)已知 $f\left(1+\frac{1}{x}\right)=x/1-x^2$，求 $f(x)$的解析式。(2)已知 $f(x)$是一次函数，且 $f[f(x)]=4x-1$，求 $f(x)$。(3)若 $f(x)$满足 $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x$，求 $f(x)$的解析式。

解 (1) 令 $1+\frac{1}{x}=t$，$\because t\neq 1$，$\therefore x=\frac{1}{t-1}$，于是 $f(t)=\frac{x}{1-x^2}=\frac{t-1}{t^2-2t}$，即 $f(x)=\frac{x-1}{x^2-2x}$ ($x\neq 0$ 且 $x\neq 2$)。

(2) 设 $f(x)=kx+b$，则 $k(kx+b)+b=4x-1$，即 $\begin{cases}k^2=4,\\(k+1)b=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=2,\\b=-\frac{1}{3},\end{cases}$ 或 $\begin{cases}k=-2,\\b=1。\end{cases}$ $\therefore f(x)=2x-\frac{1}{3}$ 或 $f(x)=-2x+1$。

(3) 以$\frac{1}{x}$代替原式中的 x 得 $f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=\frac{3}{x}$，与原式联立，消去 $f\left(\frac{1}{x}\right)$得 $f(x)=\frac{2}{x}-x$ ($x\neq 0$)。

说明 换元法和待定系数法是求函数解析式的常用方法。

例 4 如图 2-1，正$\triangle ABC$ 边长为 2，PQ 将$\triangle ABC$ 面积等分，设 $AP=x$，$AQ=t$，$PQ=y$。求：(1)t 与 x 的函数关系式；(2)y 与 x 的函数关系式；(3)求 y 的最值。

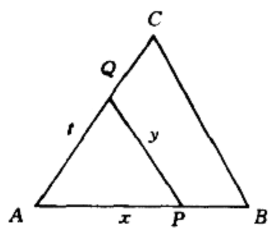

图 2-1

解 (1) $\because S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}$，$\therefore \frac{1}{2}xt\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore xt=2$，$t=\frac{2}{x}$。$\because t\leqslant 2$ 即 $x\geqslant 1$，$\therefore 1\leqslant x\leqslant 2$，$\therefore t=\frac{2}{x}$ ($1\leqslant x\leqslant 2$)。

(2) $y^2=x^2+t^2-2xt\cos 60°=x^2+\frac{4}{x^2}-2$，$\therefore y=\sqrt{x^2+\frac{4}{x^2}-2}$ ($1\leqslant x\leqslant 2$)。

(3) $\because y^2=\left(x-\frac{2}{x}\right)^2+2$，又 $1\leqslant x\leqslant 2$，$\therefore -2\leqslant\frac{-2}{x}\leqslant -1$，即 $-1\leqslant x-\frac{2}{x}\leqslant 1$。$\therefore \left(x-\frac{2}{x}\right)^2\leqslant 1$，即 $2\leqslant y^2\leqslant 3$，$\therefore y_{\min}=\sqrt{2}$，$y_{\max}=\sqrt{3}$。

说明 列函数解析式为关键，特别应注意求出解析式后，必须写明其定义域。

[强化训练]

一、填空题

1. 设 A 是直角坐标平面上所有点组成的集合，由 A 到 A 的一一映射 f：$(x, y)\to(y-1, x+2)$，则像点 $(3, -4)$ 的原像点是______

2. $f(x)=a^x+k$ 的图象过$(1, 3)$点，$y=f^{-1}(x)$ 的图象过$(2, 0)$点，则 $f(x)$的表达式是______

3. 若 $f_1(x)=\sqrt{x^2}$，$f_2(x)=x^2/x$，$f_3(x)=a^{\log_a x}$($a>0$ 且 $\neq 1$)，$f_4(x)=\log_a a^x$ ($0<a\neq 1$)，其中____与 $y=x$ 图象重合。

4. 函数 $y = ax + b$ 与它的反函数是同一函数，则 a 与 b 分别是______

5. 已知 $f(x) = \begin{cases} x^2 & (x > 0), \\ \pi & (x = 0), \\ 0 & (x < 0), \end{cases}$ 则 $f\{f[f(-2)]\}$ 为____

6. 设 $y = f(x)$ 的图象关于 $x = 1$ 对称，若 $x \leqslant 1$ 时 $y = x^2 + 1$，则当 $x > 1$ 时，$y =$ ______

7. 设 $y = f(x)$ 的定义域为 R，则函数 $y = f(x-1)$ 与 $y = f(1-x)$，两者图象关于______对称。

8. $g(x) = 1 - 2x$，$f[g(x)] = \dfrac{1-x^2}{x^2}$ $(x \neq 0)$，则 $f\left(\dfrac{1}{2}\right) =$ ______

二、选择题

1. 下列命题中：在同一坐标系下，(1) $y = f(x)$ 与 $x = f^{-1}(y)$ 的图象相同；(2) $y = f(x)$ 与 $x = f^{-1}(y)$ 的图象不同；(3) $x = f^{-1}(y)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 是同一函数；(4) $x = f^{-1}(y)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 是不同函数，其中正确的是 (　　)

(A) (1)与(3)　　(B) (1)与(4)　　(C) (2)与(3)　　(D) (2)与(4)

2. 若 $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$，则 $f^{-1}(x)$ 等于 (　　)

(A) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$　　(B) $f(-x)$　　(C) $-f(x)$　　(D) $-f(-x)$

3. $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+a}$ $\left(a \neq \dfrac{1}{2}\right)$ 与其反函数的图象重合，则 (　　)

(A) $a = -1$　　(B) $a = -2$　　(C) $a = 2$　　(D) $a = 1$

4. 若 $f(x) = x^2 - bx + c$ 满足 $f(1+x) = f(1-x)$，且 $f(0) = 3$，则 $f(b^x)$ 与 $f(c^x)$ 的大小关系是 (　　)

(A) $\leqslant$　　(B) $\geqslant$　　(C) $>$　　(D) 不确定

三、解答题

1. 已知 $f(\sqrt{x} + 1) = x + 2\sqrt{x}$，求 $f(x+1)$ 与 $f(x^2)$。

2. 求下列函数的反函数：(1) $y = \log_2(1-x)$ $(x \geqslant 0)$；(2) $y = 1 - \sqrt{1-x^2}$ $(-1 \leqslant x \leqslant 0)$。

3. $f(x) = a + b^{x-1}$ $(0 < b \neq 1)$ 图象过 $(1, 3)$，$f^{-1}(x+a)$ $(x > 0)$ 的图象过 $(4, 2)$，求 $f^{-1}(x)$ 的表达式。

4. 如图 2-2，动点 M、N 同时从边长为 1 的正$\triangle ABC$ 的顶点 A 出发，分别以每秒 1 和 $\dfrac{2}{3}$ 的速度沿 AB 与 AC 运动，然后分别在 B 与 C 拐向 BC 线段，到相遇为止，试将 MN 的距离 s 表示为 t 的函数。

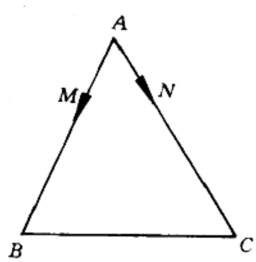

图　2-2

第 3 天　函数的定义域与值域

[**学习要点**]

1. 熟悉各种基本函数的定义域，能正确地求出简单的复合函数的定义域。

2. 熟悉直接法求值域，由定义域、单调性直接推出 y 的范围，掌握常见的求值域的方法。

［**家教点窍**］

1. 重点是求函数的定义域：应使分式的分母不为零；偶次根式的被开方式大于或等于零；对数的真数大于零，底数大于零且不等于 1；结合实际问题或几何问题应使之有意义；复合函数要从外到内根据函数的定义域求出 x 的范围。

2. 难点是求函数的值域，常用方法有：(1)配方法是求二次函数值域的基本方法；(2)某些函数的值域可转化为求其反函数的定义域；(3)某些无理函数的值域常用换元法来求之；(4)某些分式有理函数可化为二次方程，利用判别式来求值域；(5)某些函数的值域可用基本不等式来求出。另外，函数的图象、单调性、三角函数的有界性等也都可用于求函数的值域。

［**典型例题**］

例 1 选择与填空：

(1) 函数 $y=\dfrac{\log_2(3^x-9)}{|x|-3}$ 的定义域是____；$y=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$ 的反函数的值域是____

解 定义域：$3^x>9$ 且 $|x|\neq 3$，故为 $\{x|x>2$ 且 $x\neq 3\}$；反函数的值域即原函数的定义域，为 $\{y|y\neq 0\}$。

(2) 下列函数中，值域是 R^+ 的是 （　　）

(A) $y=x^2+x+1$　　　　(B) $y=|\log_2 x|$

(C) $y=(x+1)^{-\frac{2}{3}}$　　　　(D) $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

解 为(C)。(提示：不漏不缺，满足值域定义。)

(3) $y_1=\sin^2x-3\sin x+4$ 与 $y_2=\dfrac{5}{2x^2-4x+3}$ 的值域分别是____

解 $y_1=\left(\sin x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}$ 的值域为[2, 8]；$y_2=\dfrac{5}{2(x-1)^2+1}$（分母 $\geqslant 1$）的值域为(0, 5]。

(4) $f_1(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}+3$ 与 $f_2(x)=x^2-\dfrac{1}{x^2}+3\ (x\geqslant 1)$ 值域分别是____

解 $x^2+\dfrac{1}{x^2}+3\geqslant 2\sqrt{x^2\cdot\dfrac{1}{x^2}}+3=5$，值域为 $[5,+\infty)$。$x^2-\dfrac{1}{x^2}$ 在 $x\geqslant 1$ 为增函数，最小值为 0，故值域为 $[3,+\infty)$。

(5) 若 $f(x)$ 的定义域为[0, 1]，则 $f(x^2)$、$f(\sin x)$、$f(x-k)+f(x+k)$ 的定义域分别是________（其中 $0<k<1/2$）。

解 $f(x^2)$：$0\leqslant x^2\leqslant 1$，定义域 $[-1, 1]$；$f(\sin x)$：$0\leqslant\sin x\leqslant 1$，定义域是 $[2k\pi, 2k\pi+\pi]\ (k\in Z)$；$f(x-k)+f(x+k)$：$0\leqslant x-k\leqslant 1$ 且 $0\leqslant x+k\leqslant 1$，即定义域为 $[k, 1-k]$。

例 2 (1)求函数 $y=\dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{\lg(2x-1)}+(3x-2)^0$ 的定义域；(2)若 $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ 的值域是