

新世纪

卢元 曾容 主编

曾容 孔庆邨 编

● 全国名牌大学附中

北京大学附中
复旦大学附中
福建师大附中
华南师大附中
湖南师大附中
辽宁师大附中
北京师大附中

名师为你家教
高中毕业班

数学

东北师大附中
南京师大附中
上海师大附中
交通大学附中
湖北大学附中
华东师大一附中
华东师大二附中
上海外国语大学附属浦东外国语学校

东方出版中心

新世纪全国名牌大学附中 名师为你家教

·高中毕业班数学·

卢 元 曾 容 主编

曾 容 孔庆卣 编

东方出版中心

图书在版编目 (CIP) 数据

高中毕业班数学/曾容,孔庆邮编.—2版.—上海:东方出版中心,2001.9

(新世纪全国名牌大学附中名师为你家教/卢元,曾容主编)

ISBN 7-80627-709-9

I. 高… II. ①曾…②孔… III. 数学课—高中—升学参考资料 IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2001) 第 14702 号

新世纪全国名牌大学附中名师为你家教

——高中毕业班数学

出版发行: 东方出版中心

地址: 上海市仙霞路 335 号

电话: 62417400

邮政编码: 200336

经销: 新华书店上海发行所

印刷: 昆山亭林印刷厂

开本: 787×1092 毫米 1/16

字数: 390 千

印张: 17

印数: 11,001—18,000

版次: 2001 年 5 月第 2 版 2001 年 9 月第 3 次印刷

ISBN 7-80627-709-9/G·244

定价: 17.00 元

版权所有, 侵权必究。

内 容 提 要

《新世纪全国名牌大学附中(附小)名师为你家教》丛书,由著名特级教师主编。本丛书在《全国名牌大学附中(附小)名师为你家教》的基础上,根据新世纪中小学教学发展的趋势和现行教学大纲及教材,对其有关内容进行了修订。

本《高中毕业班数学》为高三学生及有关教师、家长(包括家教老师)提供高质量的家教用书,讲解高三数学的基本知识和解题技能,能使学生掌握正确、有效的学习方法,并提供复习、应考指导。全书分100天、100讲,每天(讲)均设有:1.“学习要点”。极为精要地概括这一部分的学习和应考内容;2.“家教点窍”。从家教的角度,对上述内容作“点窍”性质的阐述,有知识的介绍,重点、难点的分析,学习、复习方法的指点;3.“典型例题”。选择最典型、最能体现学习、应考目标的例题作讲解和评析;4.“强化训练”。精选最典型、最能训练学习、应考能力的一批习题,题型灵活多样,既有坡度,又有一定的难度。若干天后设“阶段测试”,最后几天设“综合训练”(相当于模拟试卷),书末并附有全部习题答案、提示或简要解题过程。本书体现了名校名师的教学经验和卓有成效的训练、复习方法,利教便学,精要实用,特别便于学生、家长及教师(包括家教老师)使用。一册在手,等于请了一位名师担任家教。

《新世纪全国名牌大学附中(附小)名师为你家教》

编 委 会

主 编 卢 元 曾 容

副主编 徐传胜 徐昭武 吕 芳 高乃芳

编 委 (按姓氏笔画排列)

马洪邦	方武勇	孔庆邨	朱忠民	朱建国
朱勤鲁	刘 芸	许荣阜	孙金英	杨 薇
杨文玉	李玉枝	李玉舫	时 云	张 漫
张计蕾	张亚萍	张家珍	张培荣	张朝胜
陆永刚	陈伯英	陈国强	林 辉	林新民
周美桂	周望城	施嘉平	姚晓明	徐志伟
徐志辉	郭杰森	诸自建	黄 琪	黄友农
彭世强	彭静芬	潘志强	戴钟俊	

编写说明

望子成龙,望女成凤,当前家教成风,“家教热”持续升温。据抽样调查,某校高三学生85%以上请家教,初三学生90%以上请家教。有些学生语、数、英三门学科都请家教,有些学生则连其他一些学科也请家教。学生的双休日几乎成了“家教日”,就连平时也要安排若干时间由家教老师补课。更有甚者,家教还扩展到非毕业班,如小学三、四年级,初中一、二年级,高中一、二年级,都有不少学生请家教。

面对如此火爆的家教现象,我们亦喜亦忧。喜的是:经历了“十年动乱”的中国人民,终于认识到“科教兴国”的意义,对子女的教育越来越多地倾注巨大的热情;忧的是:目前的家教存在诸多问题:1.缺少优秀的教师。有些家教老师水平不高,缺乏经验,敷衍了事,既辜负了家长们的拳拳之心,又浪费了莘莘学子的宝贵时光;2.缺少合适的教材。家教需要在教科书之外另找辅助教材,老师们忙于日常教务,只能匆忙应付,复印一些习题资料应急,费时费力,又难保证质量;3.缺少科学的安排。一年或半年的家教,应当统盘考虑,全面而科学地设计每星期的复习内容,但教师们限于个人的精力,难于精心编拟教学进度,影响了家教的效率。

为了解决家教中普遍存在的“三缺少”问题,我们邀请复旦大学附中卢元、曾容两位特级教师担任主编,组织全国十余所名校的教师,编写了这套《新世纪全国名牌大学附中(附小)名师为你家教》丛书。整套书有如下四个特点:

1. 目的性明确。充分体现“名师”的经验,体现了我国一大批名牌大学附中(附小)长期积累的指导毕业生复习应考的“看家本领”,使家教立足于高起点,获得高效率。编写时,力求紧扣教学大纲和考试要求,梳理应考内容,指导应考方法,训练应考能力,家教的目的性十分明确。

2. 覆盖面完整。各册书分别包括各年段、各学科毕业考试及升学考试所需的全部知识及能力,但并不平施力量,做到:内容全面,突出重点,明确难点,详略得当。

3. 系统性突出。每册书的框架,由主编会同作者精心设计,科学编排,根据各学科内在的知识结构,根据学生接受知识的客观规律,分成100天、100讲。每天(讲)之间,衔接紧密,排列恰当,由浅入深,由简至繁。若干天(讲)后,设“阶段测试”;最后几天(讲),设“综合训练”,做到系统复习,科学训练。

4. 可操作性强。编写本书的作者,都有丰富的家教经验。各册书中,每天(讲)的内容相对完整,便于家教老师据此作两课时左右的讲解及训练。各册书对重点部分作必要反复,对难点部分作必要分解,对能力部分(如语文的写作能力,数理化的解题能力等)作交叉训练,对非重点内容点到为止。每天(讲)均设“学习要点”、“家教点窍”、“典型例题”、“强化训练”等栏目,以“强化训练”为主体。这样的编排充分体现了家教应有的程序,有很强的可操作性。

上述几条,形成了本书独特的优点:

可供教师作为方便实用的家教用书;

可供学生作为无师自通的自习用书;

可供家长作为指导子女的辅导用书。

真可谓“一书在手,家教不愁”。

最后要说明一点:目前全国小学有5年、6年两种学制,因此小学毕业班三册书中,前50天(讲)主要供5年制学生使用,后50天(讲)主要供6年制学生使用。前后两部分内容会有某些交叉,但因为知识和能力需要反复训练才能掌握,所以这样编排也有利于复习巩固。

本《新世纪全国名牌大学附中(附小)名师为你家教》丛书是《全国名牌大学附中(附小)名师为你家教》的修订本,原丛书出版后受到广大学生、教师和家长的欢迎。现根据最新教学大纲和教材的有关要求,根据新世纪中小学教学发展的趋势,对丛书中的部分内容作了必要的修订,力求使之更加完善,更符合读者的需求。

目 录

第一阶段	1
第 1 天 集合的概念与运算	1
第 2 天 函数的概念与反函数	3
第 3 天 函数的定义域与值域	6
第 4 天 函数的奇偶性	10
第 5 天 函数的单调性	13
第 6 天 函数的图象及其变换	16
第 7 天 二次函数及其应用	19
第 8 天 指数式、对数式及指数、对数方程	22
第 9 天 幂函数	24
第 10 天 指数函数、对数函数	27
第 11 天 指数、对数函数的应用	29
第 12 天 幂、指数、对数函数的最值	31
第 13 天 阶段测试(一)	33
第二阶段	36
第 14 天 三角函数的基本概念及基本关系式	36
第 15 天 三角函数的定义域	38
第 16 天 三角函数的单调性与奇偶性	41
第 17 天 三角函数的周期性与图象	44
第 18 天 三角函数的值域与最值	46
第 19 天 三角函数的求值	48
第 20 天 三角函数的化简与证明	51
第 21 天 三角条件等式的求解与证明	53
第 22 天 三角形中的三角恒等变换	55
第 23 天 反三角函数的概念与性质	57
第 24 天 反三角函数的恒等变换及计算	60
第 25 天 三角方程	62
第 26 天 阶段测试(二)	65
第三阶段	67
第 27 天 不等式的性质与证明(比较法)	67
第 28 天 不等式的证明(分析法与综合法)	69
第 29 天 一元一次、一元二次不等式的解法	72
第 30 天 无理不等式、绝对值不等式的解法	74

第 31 天	指数、对数不等式的解法	76
第 32 天	根据基本不等式求最值、极值	79
第 33 天	阶段测试(三)	81
第四阶段		83
第 34 天	等差、等比数列的通项及求和公式	83
第 35 天	等差、等比数列的应用(一)	85
第 36 天	等差、等比数列的应用(二)	87
第 37 天	数列的通项与和式	89
第 38 天	数列的极限	91
第 39 天	数学归纳法及应用	94
第 40 天	归纳、猜想与证明	97
第 41 天	阶段测试(四)	99
第五阶段		102
第 42 天	复数的概念	102
第 43 天	复数的代数形式及其运算	104
第 44 天	复数的三角形式及其运算	107
第 45 天	模与辐角	110
第 46 天	模与辐角主值的最值	112
第 47 天	复数、向量与几何轨迹	114
第 48 天	复数与方程	116
第 49 天	加法原理与乘法原理	118
第 50 天	排列与组合	120
第 51 天	排列与组合的应用	123
第 52 天	二项式定理	124
第 53 天	二项式定理的应用	126
第 54 天	概率与统计初步	128
第 55 天	导数和积分	130
第 56 天	阶段测试(五)	132
第六阶段		134
第 57 天	平面的基本性质	134
第 58 天	两直线的位置关系及异面直线	136
第 59 天	直线与平面平行	138
第 60 天	直线与平面垂直	140
第 61 天	三垂线定理及其应用	143
第 62 天	平面与平面平行	145
第 63 天	二面角	148
第 64 天	平面与平面垂直	150
第 65 天	棱柱	152
第 66 天	棱锥	154

第 67 天	棱台	157
第 68 天	圆柱、圆锥、圆台	159
第 69 天	球	162
第 70 天	向量初步	164
第 71 天	阶段测试(六)	166
第七阶段		169
第 72 天	直线方程的几种基本形式	169
第 73 天	两直线的位置关系	171
第 74 天	直线系与充要条件	173
第 75 天	圆的方程	175
第 76 天	直线与圆的位置关系	177
第 77 天	椭圆	180
第 78 天	双曲线	182
第 79 天	抛物线	185
第 80 天	圆锥曲线的统一定义	188
第 81 天	坐标变换	190
第 82 天	直线与圆锥曲线(一)	192
第 83 天	直线与圆锥曲线(二)	194
第 84 天	系数含参数的圆锥曲线	196
第 85 天	圆锥曲线与圆锥曲线	198
第 86 天	参数方程与普通方程的互化	200
第 87 天	参数方程的应用	202
第 88 天	极坐标与曲线的极坐标方程	204
第 89 天	解析几何中的最值问题	206
第 90 天	解析几何中的轨迹问题	209
第 91 天	阶段测试(七)	211
第八阶段		214
第 92 天	函数与方程	214
第 93 天	分类讨论	217
第 94 天	数形结合	220
第 95 天	解析几何综合题	222
第 96 天	数列综合题	225
第 97 天	应用问题精选	227
第九阶段		230
第 98 天	综合训练(一)	230
第 99 天	综合训练(二)	231
第 100 天	综合训练(三)	233
习题答案与提示		236

第一阶段

第1天 集合的概念与运算

[学习要点]

1. 理解集合、子集、空集、全集的概念,了解属于、包含、相等关系的意义及相关术语、符号。
2. 正确使用列举法、描述法、Venn图来表示集合,能熟练进行交、并、补的运算。

[家教点窍]

1. 集合中易混淆的概念有: $\in$ 与 $\subset$ 。前者是元素与集合的关系,后者为集合与集合的关系; $\emptyset$ 与 $\{\emptyset\}$,前者为不含任何元素的集合,后者为以 $\emptyset$ 为元素的单元集。
2. 集合中考查的重点是:(1)子集的概念, $A \subseteq B$;若 $x \in A$,则 $x \in B$;若 $x \notin B$,则 $x \notin A$ 。(2)交集与并集 $A \cap B = \{x|x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ (关键词“且”), $A \cup B = \{x|x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ (关键词“或”), $A \cap B = A$ 即 $A \subseteq B$, $A \cup B = A$ 即 $B \subseteq A$ 。(3)公式 $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ 。
3. 集合中考查的难点是:集合运算的综合应用,解题时要充分利用 Venn 图及数轴,迅速地化集合语言为相关的代数语言和几何语言。

[典型例题]

例1 (1) 已知集合 $M = \{(x, y) | x + y = 2\}$, $N = \{(x, y) | x - y = 4\}$, 则 $M \cap N$ 为 ()

- (A) $x = 3, y = -1$ (B) $(3, -1)$
(C) $\{3, -1\}$ (D) $\{(3, -1)\}$

解 (D)。(提示:应明确元素集合的概念。)

(2) 已知 I 为全集,集合 $M, N \in I$,若 $M \cap N = N$,则有 ()

- (A) $\overline{M} \supseteq \overline{N}$ (B) $M \subseteq \overline{N}$ (C) $\overline{M} \subseteq \overline{N}$ (D) $M \supseteq \overline{N}$

解 (C)。(提示:由 $M \cap N = N$,即知 $N \subseteq M$ 。)

(3) 设集合 $I = \{(x, y) | x, y \in R\}$, $M = \{(x, y) | \frac{y-3}{x-2} = 1\}$, $N = \{(x, y) | y \neq x + 1\}$, 那么 $\overline{M \cup N}$ 为 ()

- (A) $\emptyset$ (B) $\{(2, 3)\}$
(C) $(2, 3)$ (D) $\{(x, y) | y = x + 1\}$

解 (B)。(提示: $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cap \overline{N}$ 。)

(4) 下列结论中,不正确的是 ()

- (A) $2 + \sqrt{3} \in \{m | m \leq \sqrt{10}\}$
(B) $\{0\} \subset \{x | x \leq 0\}$

$$(C) \{\emptyset\} \subset \{x|x < 0\}$$

$$(D) \left\{x \mid x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in Z\right\} \subset \left\{x \mid x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{2}, k \in Z\right\}$$

解 (C)。

$$(5) A = \{1, 2, 3, 5\}, B = \{1, 2, 4, 6\}, I = A \cup B, \text{ 则 } \overline{A} = _, \overline{B} = _, \\ \overline{A \cap B} = _, \overline{A \cup B} = _, \overline{A \cap B} = _, \overline{A \cup B} = _$$

解 $\overline{A} = \{4, 6\}, \overline{B} = \{3, 5\}, \overline{A \cap B} = \emptyset, \overline{A \cup B} = \{3, 4, 5, 6\}, \overline{A \cap B} = \{3, 4, 5, 6\}, \overline{A \cup B} = \emptyset$ 。(提示:用 Veen 图表示。)

例 2 (1)已知 $A = \{x|x^2 - 3x + 2 = 0\}, B = \{x|ax - 2 = 0\}$, 且 $A \cup B = A$, 求实数 a 组成的集合 C 。(2) $A = \{x|x = \lg(t^2 + 10), t \in R\}, B = \{y|y = k^2 - 2k - 2, k \in R\}$, 试确定 A 与 B 的关系。

解 (1) $A = \{1, 2\}, A \cup B = A$, 即 $B \subseteq A$, 只需 $a \times 1 - 2 = 0, a = 2$, 或 $a \times 2 - 2 = 0, a = 1$ 。注意 $a = 0, B = \emptyset \subseteq A$, 故 $C = \{0, 1, 2\}$ 。(2) A, B 表示函数的值域, 分别为 $[1, +\infty), [-3, +\infty)$, 故 $A \subset B$ 。

说明 ①注意 $\emptyset$ 的特殊情形; ②转化使(2)的元素明朗化。

例 3 若 $A = \{x|x^2 + x - 2 \leq 0\}, B = \{x|2 < x + 1 \leq 4\}, C = \{x|x^2 + mx + n > 0\}$, 并且满足 $(A \cup B) \cap C = \emptyset, (A \cup B) \cup C = R$, 求 m, n 。

解 $A = \{x|-2 \leq x \leq 1\}, B = \{x|1 < x \leq 3\}, A \cup B = \{x|-2 \leq x \leq 3\}$, 又 $(A \cup B) \cap C = \emptyset, (A \cup B) \cup C = R$, 由补集性质知 $C = \overline{A \cup B} = \{x|x < -2 \text{ 或 } x > 3\} = \{x|x^2 + mx + n > 0\}$, $\therefore x^2 + mx + n = 0$ 的两根为 -2 与 3 。由韦达定理得, $m = -(-2 + 3) = -1, n = (-2) \cdot 3 = -6$ 。

说明 应注意集合的运算律。

[强化训练]

一、选择题

1. 下列六个关系式: (1) $\emptyset \in \{\emptyset\}$; (2) $\emptyset \subset \{\emptyset\}$; (3) $\{0\} \supset \emptyset$; (4) $0 \in \emptyset$; (5) $\emptyset \neq \{0\}$; (6) $\emptyset \neq \{\emptyset\}$, 其中正确的个数是 ()

(A) 6 (B) 5 (C) 4 (D) 小于 4

2. 设 $M = \{x|0 \leq x < 2\}, N = \{x|x^2 - 2x - 3 < 0\}$, 集合 $M \cap N =$ ()

(A) $\{x|0 \leq x < 1\}$ (B) $\{x|0 \leq x < 2\}$

(C) $\{x|0 \leq x \leq 1\}$ (D) $\{x|0 \leq x \leq 2\}$

3. 同时满足 $\{1\} \subset A \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 且 A 中所有元素之和为奇数的集合 A 的个数是 ()

(A) 5 个 (B) 6 个 (C) 7 个 (D) 8 个

4. 设 I 是全集, 集合 $P \subset Q$, 则下列结论中错误的是 ()

(A) $P \cup Q = Q$ (B) $\overline{P} \cup Q = I$ (C) $P \cap Q = P$ (D) $\overline{P} \cap \overline{Q} = \overline{P}$

5. 集合 A, B 满足 $A \cup B = \{a, b\}$, 试求集合 A 与 B , 则此题的答案共有 ()

(A) 9 种 (B) 4 种 (C) 7 种 (D) 16 种

6. 已知集合 $A = \{x|y = \lg(x^2 - x - 2)\}$, $B = \{y|y = x^{-\frac{1}{2}}\}$, 则 $A \cap B$ 等于 ()
- (A) $[0, +\infty)$ (B) $(0, +\infty)$ (C) R (D) $(2, +\infty)$

二、填空题

1. 全集为 R , $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, $M = \{x|f(x) \neq 0\}$, $N = \{x|g(x) \neq 0\}$, 则 $\{x|f(x) \cdot g(x) = 0\} =$ _____
2. $M = \{x|-1 \leq x < 2\}$, $N = \{x|x - k \leq 0\}$, 若 $M \cap N \neq \emptyset$, 则 k 的取值范围是 _____
3. 已知 $A = \{x||x| < 5\}$, $B = \{x|-7 < x < a\}$, $C = \{x|b < x < 2\}$, 且 $A \cap B = C$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____
4. 已知 $E = \{\theta|\cos\theta < \sin\theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, $F = \{\theta|\tan\theta < \sin\theta\}$, 则 $E \cap F$ 为区间 _____
5. I 的子集 $P \subset Q$, 则 (A) $P \cup Q = Q$, (B) $\bar{P} \cup Q = I$, (C) $P \cap \bar{Q} = \emptyset$, (D) $\bar{P} \cap \bar{Q} = \bar{P}$ 中, 错误的是 _____
6. 已知 $A = \{x|x^2 + (m+2)x + 1 = 0, x \in R\}$, 且 $A \cap R^+ = \emptyset$, 则实数 m 取值范围是 _____
7. 若 $M = \{a, a+d, a+2d\}$, $N = \{a, aq, aq^2\}$, $a \neq 0$, 且 $M = N$, 则 q 的值为 _____
8. 若 $A = \{x|x^2 - 3x - 10 \leq 0\}$ 与 $B = \{x|m+1 \leq x \leq 2m-1\}$, 满足 $B \subseteq A$, 则实数 m 的范围是 _____

三、解答题

1. 已知 $A = \{x|x^2 - ax + a^2 - 19 = 0\}$, $B = \{x|\log_2(x^2 - 5x + 8) = 1\}$, $C = \{x|x^2 + 2x - 8 = 0\}$, 且 $A \cap B \supset \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, 求 a .
2. 设 $A = \{x||x| \leq 1\}$, $B = \{x|x^2 + 4x + 3 < 0\}$, 求 C , 使其同时满足下列三个条件: (1) $C \subseteq (A \cup B) \cap Z$; (2) C 有两个元素; (3) $C \cap B \neq \emptyset$.
3. 集合 $A = \{x|x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x|x^2 - nx + n - 1 = 0\}$, $C = \{x|x^2 - mx + 2 = 0\}$. 已知 $A \cup B = A$, $A \cap C = C$, 求 m, n .
4. 设 $A = \{x|-2 \leq x \leq t\}$, $B = \{y|y = 2x + 3, x \in A\}$, $C = \{z|z = x^2, x \in A\}$, 且 $C \subseteq B$, 求实数 t 的取值范围.

第2天 函数的概念与反函数

[学习要点]

- 了解映射的概念, 理解函数及有关概念, 掌握函数解析式的常用求法.
- 理解反函数的概念, 熟练掌握反函数解析式的求法和互为反函数的图象间的对称性.

[家教点窍]

- 掌握函数的概念; 关键是考察其定义域、对应法则和值域这三个要素. 明确函数与其

反函数的关系。要点是明确：(1)定义域与值域的互换性；(2)图象关于 $y=x$ 的对称性。

2. 函数中考查的重点是：函数解析式的常用求法，即凑合法（配方）、换元法和待定系数法。

3. 函数中考查的难点是：正确而迅速地列出题中待求的函数解析式，它是应用函数解决实际问题的关键。

〔典型例题〕

例1 (1) 下列各组函数中，表示同一函数的是

()

(A) $y=x^0$ 与 $y=1$

(B) $y=\sqrt{x^2}$ 与 $y=x$

(C) $y=e^{\ln x}$ 与 $y=x^2/(\sqrt{x})^2$

(D) $y=\lg x^2$ 与 $y=2\lg x$

解 (C)。(提示：定义域和对应法则是否相同，或两函数图象是否一致，即可判断是否为同一个函数。)

(2) 将函数 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 的图象沿直线 $y=x$ 对折，所得图象的函数解析式为 ()

(A) $x=y^2$

(B) $y=x^2 (x \geq 0)$

(C) $y=x^2 (x > 0)$

(D) $y=\sqrt{x}$

解 (B)。(提示：定义域与值域的互换。)

(3) 已知 $f(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0), \\ e & (x = 0), \\ x+1 & (x > 0). \end{cases}$ 试求 $f(1)$, $f(-1)$, $f(0)$ 与 $f\{f[f(-1)]\}$ 。

解 分别为 2, 0, e , $e+1$ 。

(4) 设 $f(\sqrt{t}-1) = t - 2\sqrt{t}$, 求 $f(x)$ 。

解 $f(x) = x^2 - 1 (x \geq -1)$, 凑合法求解。

(5) 设 A 到 B 的映射 $f_1: x \rightarrow 2x+1$, B 到 C 的映射 $f_2: y \rightarrow y^2-1$, 则 $f_2(f_1(x))$ 与 $f_1(f_2(x))$ 分别为

解 $f_2(f_1(x)) = 4x^2 + 4x$, $f_1(f_2(x)) = 2x^2 - 1$ 。

例2 求下列函数的反函数：

(1) $f(x) = \frac{1}{2}[\lg(x-5)+1] (x > 5)$; (2) $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & (0 \leq x \leq 1), \\ x^2 & (-1 \leq x < 0). \end{cases}$

解 (1) 由原式可得 $2y-1 = \lg(x-5)$, $\therefore x = 10^{2y-1} + 5 (y \in R)$, $\therefore$ 反函数是 $y = 10^{2x-1} + 5 (x \in R)$ 。

(2) 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, 有 $-1 \leq y \leq 0$, 解得 $x = \sqrt{y+1}$, $\therefore f^{-1}(x) = \sqrt{x+1} (-1 \leq x < 0)$ 。当 $-1 \leq x < 0$ 时, 有 $0 < y \leq 1$, 解得 $x = -\sqrt{y} (0 < y \leq 1)$, $\therefore f^{-1}(x) = -\sqrt{x} (0 < x \leq 1)$ 。

于是所求反函数为 $y = \begin{cases} \sqrt{x+1} & (-1 \leq x < 0), \\ -\sqrt{x} & (0 < x \leq 1). \end{cases}$

说明 求反函数步骤：(1)检查是否有反函数；(2)存在时，由 $y=f(x)$ ，先解出 $x=f^{-1}(y)$ ；(3)把 x, y 互相调换，改写为 $y=f^{-1}(x)$ ；(4)由 $f(x)$ 的值域得 $f^{-1}(x)$ 的定义域。若为分段函数，则应分段讨论，特别应注意 x, y 的取值。

例3 (1)已知 $f\left(1 + \frac{1}{x}\right) = x/1 - x^2$, 求 $f(x)$ 的解析式。(2)已知 $f(x)$ 是一次函数, 且 $f[f(x)] = 4x - 1$, 求 $f(x)$ 。(3)若 $f(x)$ 满足 $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$, 求 $f(x)$ 的解析式。

解 (1) 令 $1 + \frac{1}{x} = t$, $\therefore t \neq 1$, $\therefore x = \frac{1}{t-1}$, 于是 $f(t) = \frac{x}{1-x^2} = \frac{t-1}{t^2-2t}$, 即 $f(x) = \frac{x-1}{x^2-2x}$ ($x \neq 0$ 且 $x \neq 2$)。

(2) 设 $f(x) = kx + b$, 则 $k(kx + b) + b = 4x - 1$, 即 $\begin{cases} k^2 = 4, \\ (k+1)b = -1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k = 2, \\ b = -\frac{1}{3}, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} k = -2, \\ b = 1. \end{cases} \therefore f(x) = 2x - \frac{1}{3}$ 或 $f(x) = -2x + 1$ 。

(3) 以 $\frac{1}{x}$ 代替原式中的 x 得 $f\left(\frac{1}{x}\right) + 2f(x) = \frac{3}{x}$, 与原式联立, 消去 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 得 $f(x) = \frac{2}{x} - x$ ($x \neq 0$)。

说明 换元法和待定系数法是求函数解析式的常用方法。

例4 如图 2-1, 正 $\triangle ABC$ 边长为 2, PQ 将 $\triangle ABC$ 面积等分, 设 $AP = x$, $AQ = t$, $PQ = y$ 。求: (1) t 与 x 的函数关系式; (2) y 与 x 的函数关系式; (3) 求 y 的最值。

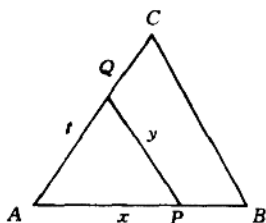


图 2-1

解 (1) $\because S_{\triangle ABC} = \sqrt{3}$, $\therefore \frac{1}{2}xt\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\therefore xt = 2$, $t = \frac{2}{x}$. $\because t \leq 2$ 即 $x \geq 1$, $\therefore 1 \leq x \leq 2$, $\therefore t = \frac{2}{x}$ ($1 \leq x \leq 2$)。

(2) $y^2 = x^2 + t^2 - 2xt\cos 60^\circ = x^2 + \frac{4}{x^2} - 2$, $\therefore y = \sqrt{x^2 + \frac{4}{x^2} - 2}$ ($1 \leq x \leq 2$)。

(3) $\because y^2 = \left(x - \frac{2}{x}\right)^2 + 2$, 又 $1 \leq x \leq 2$, $\therefore -2 \leq \frac{-2}{x} \leq -1$, 即 $-1 \leq x - \frac{2}{x} \leq 1$. $\therefore \left(x - \frac{2}{x}\right)^2 \leq 1$, 即 $2 \leq y^2 \leq 3$, $\therefore y_{\min} = \sqrt{2}$, $y_{\max} = \sqrt{3}$ 。

说明 列函数解析式为关键, 特别应注意求出解析式后, 必须写明其定义域。

[强化训练]

一、填空题

1. 设 A 是直角坐标平面上所有点组成的集合, 由 A 到 A 的一一映射 $f: (x, y) \rightarrow (y-1, x+2)$, 则像点 $(3, -4)$ 的原像点是_____。

2. $f(x) = a^x + k$ 的图象过 $(1, 3)$ 点, $y = f^{-1}(x)$ 的图象过 $(2, 0)$ 点, 则 $f(x)$ 的表达式是_____。

3. 若 $f_1(x) = \sqrt{x^2}$, $f_2(x) = x^2/x$, $f_3(x) = a^{\log_a x}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$), $f_4(x) = \log_a a^x$ ($0 < a \neq 1$), 其中_____与 $y = x$ 图象重合。

4. 函数 $y = ax + b$ 与它的反函数是同一函数, 则 a 与 b 分别是_____

5. 已知 $f(x) = \begin{cases} x^2 & (x > 0), \\ \pi & (x = 0), \\ 0 & (x < 0), \end{cases}$ 则 $f\{f[f(-2)]\}$ 为_____

6. 设 $y = f(x)$ 的图象关于 $x = 1$ 对称, 若 $x \leq 1$ 时 $y = x^2 + 1$, 则当 $x > 1$ 时, $y =$ _____

7. 设 $y = f(x)$ 的定义域为 R , 则函数 $y = f(x-1)$ 与 $y = f(1-x)$, 两者图象关于_____对称。

8. $g(x) = 1 - 2x$, $f[g(x)] = \frac{1-x^2}{x^2}$ ($x \neq 0$), 则 $f\left(\frac{1}{2}\right) =$ _____

二、选择题

1. 下列命题中: 在同一坐标系下, (1) $y = f(x)$ 与 $x = f^{-1}(y)$ 的图象相同; (2) $y = f(x)$ 与 $x = f^{-1}(y)$ 的图象不同; (3) $x = f^{-1}(y)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 是同一函数; (4) $x = f^{-1}(y)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 是不同函数, 其中正确的是 ()

(A) (1)与(3) (B) (1)与(4) (C) (2)与(3) (D) (2)与(4)

2. 若 $f(x) = \frac{x}{1-x}$, 则 $f^{-1}(x)$ 等于 ()

(A) $f\left(\frac{1}{x}\right)$ (B) $f(-x)$ (C) $-f(x)$ (D) $-f(-x)$

3. $f(x) = \frac{2x+1}{x+a}$ ($a \neq \frac{1}{2}$) 与其反函数的图象重合, 则 ()

(A) $a = -1$ (B) $a = -2$ (C) $a = 2$ (D) $a = 1$

4. 若 $f(x) = x^2 - bx + c$ 满足 $f(1+x) = f(1-x)$, 且 $f(0) = 3$, 则 $f(b')$ 与 $f(c')$ 的大小关系是 ()

(A) $\leq$ (B) $\geq$ (C) $>$ (D) 不确定

三、解答题

1. 已知 $f(\sqrt{x} + 1) = x + 2\sqrt{x}$, 求 $f(x+1)$ 与 $f(x^2)$ 。

2. 求下列函数的反函数: (1) $y = \log_2(1-x)$ ($x \geq 0$);

(2) $y = 1 - \sqrt{1-x^2}$ ($-1 \leq x \leq 0$)。

3. $f(x) = a + b^{x-1}$ ($0 < b \neq 1$) 图象过 $(1, 3)$, $f^{-1}(x+a)$ ($x > 0$) 的图象过 $(4, 2)$, 求 $f^{-1}(x)$ 的表达式。

4. 如图 2-2, 动点 M 、 N 同时从边长为 1 的正 $\triangle ABC$ 的顶点 A 出发, 分别以每秒 1 和 $\frac{2}{3}$ 的速度沿 AB 与 AC 运动, 然后分别在 B 与 C 拐向 BC 线段, 到相遇为止, 试将 MN 的距离 s 表示为 t 的函数。

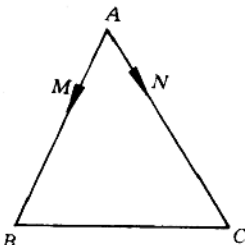


图 2-2

第 3 天 函数的定义域与值域

[学习要点]

1. 熟悉各种基本函数的定义域, 能正确地求出简单的复合函数的定义域。

2. 熟悉直接法求值域,由定义域、单调性直接推出 y 的范围,掌握常见的求值域的方法。

[家教点窍]

1. 重点是求函数的定义域:应使分式的分母不为零;偶次根式的被开方式大于或等于零;对数的真数大于零,底数大于零且不等于1;结合实际问题或几何问题应使之有意义;复合函数要从外到内根据函数的定义域求出 x 的范围。

2. 难点是求函数的值域,常用方法有:(1)配方法是求二次函数值域的基本方法;(2)某些函数的值域可转化为求其反函数的定义域;(3)某些无理函数的值域常用换元法来求之;(4)某些分式有理函数可化为二次方程,利用判别式来求值域;(5)某些函数的值域可用基本不等式来求出。另外,函数的图象、单调性、三角函数的有界性等也都可用于求函数的值域。

[典型例题]

例1 选择与填空:

(1) 函数 $y = \frac{\log_2(3^x - 9)}{|x| - 3}$ 的定义域是____; $y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ 的反函数的值域是____

解 定义域: $3^x > 9$ 且 $|x| \neq 3$, 故为 $\{x | x > 2 \text{ 且 } x \neq 3\}$; 反函数的值域即原函数的定义域,为 $\{y | y \neq 0\}$ 。

(2) 下列函数中,值域是 R^+ 的是 ()

(A) $y = x^2 + x + 1$

(B) $y = |\log_2 x|$

(C) $y = (x + 1)^{-\frac{2}{3}}$

(D) $y = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$

解 为(C)。(提示:不漏不缺,满足值域定义。)

(3) $y_1 = \sin^2 x - 3\sin x + 4$ 与 $y_2 = \frac{5}{2x^2 - 4x + 3}$ 的值域分别是____

解 $y_1 = \left(\sin x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$ 的值域为 $[2, 8]$; $y_2 = \frac{5}{2(x-1)^2 + 1}$ (分母 ≥ 1) 的值域为 $(0, 5]$ 。

(4) $f_1(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} + 3$ 与 $f_2(x) = x^2 - \frac{1}{x^2} + 3$ ($x \geq 1$) 值域分别是____

解 $x^2 + \frac{1}{x^2} + 3 \geq 2\sqrt{x^2 \cdot \frac{1}{x^2}} + 3 = 5$, 值域为 $[5, +\infty)$ 。 $x^2 - \frac{1}{x^2}$ 在 $x \geq 1$ 为增函数,最小值为0,故值域为 $[3, +\infty)$ 。

(5) 若 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 则 $f(x^2)$ 、 $f(\sin x)$ 、 $f(x-k) + f(x+k)$ 的定义域分别是____ (其中 $0 < k < 1/2$)。

解 $f(x^2)$: $0 \leq x^2 \leq 1$, 定义域 $[-1, 1]$; $f(\sin x)$: $0 \leq \sin x \leq 1$, 定义域是 $[2k\pi, 2k\pi + \pi]$ ($k \in Z$); $f(x-k) + f(x+k)$: $0 \leq x-k \leq 1$ 且 $0 \leq x+k \leq 1$, 即定义域为 $[k, 1-k]$ 。

例2 (1)求函数 $y = \frac{\sqrt{2x-x^2}}{\lg(2x-1)} + (3x-2)^0$ 的定义域; (2)若 $y = \frac{2x-1}{x+1}$ 的值域是