

高等学 校 教 材

樊正复 马新民 主编

概率论与数理统计



机械工业出版社
China Machine Press

本书是遵照国家教委工科数学课程指导委员会制定的概率论与数理统计课程的教学基本要求编写而成。本书共分六章,主要介绍随机事件及其概率、离散型随机变量、连续型随机变量、随机抽样与参数估计、假设检验、回归分析及方差分析等内容。编写力求循序渐进、通俗易懂、难点分散、思路清晰、重视实际等原则,并附有习题及答案和综合题及其解答,对于在校大学生或参加自考的广大青年都将是一本很好的教材。

图书在版编目 (CIP) 数据

概率论与数理统计/樊正复,马新民主编.——北京:机械工业出版社,2000.12

高等学校教材

ISBN 7-111-08589-2

I. 概... II. ①樊...②马... III. ①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 IV. 021

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2000) 第 58450 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

责任编辑:刘 辉 商红云 版式设计:张世琴

责任校对:张 媛 封面设计:李雨桥 责任印制:路 琳

北京机工印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

2001 年 1 月第 1 版·第 1 次印刷

1000mm×1400mm B5·7.5 印张·287 千字

0 001--5 000 册

定价:19.00 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

本社购书热线电话 (010) 68993821、68326677-2527

前 言

本书是遵照国家教委工科数学课程指导委员会制定的概率论与数理统计课程的教学基本要求编写而成。适用于各类工科专业本科教学使用。

参加编写此书的作者皆是多年从事该门课程教学工作的教授或副教授。在编写过程中力求循序渐进、通俗易懂、难点分散、思路清晰、重视实际应用等原则，让读者能够在较短时间内获得处理随机变量的知识和方法。对于在校大学生或参加自考的广大青年都将是一本很好的教材。

本书第一、二、三章由樊正复编写；第四、五章由马新民编写；第六章由张德生编写。张瑞平同志为全书选编了适量的习题并作了答案（附录B）。另外，袁浦疆同志为本书编写了“综合题及其解答”（附录A），对于学习成绩优秀，有志报考硕士研究生的同学，阅读这部分内容将会大有收益。

我们希望本书在使用过程中不断地得到改进和提高，真诚欢迎同行专家和读者们多提宝贵意见。

特别感谢机械工业出版社对本书的大力支持和付出的辛勤工作。

编者

2000年7月

目 录

前言

第一章 随机事件及其概率	1
第一节 随机事件与运算	1
第二节 概率的定义	5
第三节 概率的计算公式	11
第四节 事件的独立性与贝努里概型	16
习题一	22
第二章 离散型随机变量	25
第一节 离散型随机变量及其分布列	25
第二节 数学期望与方差	33
第三节 二维离散型随机向量	41
第四节 分布函数	48
习题二	49
第三章 连续型随机变量	53
第一节 连续型随机变量的分布	53
第二节 随机变量函数 $G(x)$ 的分布	63
第三节 连续型随机变量的数学期望与方差	67
第四节 二维连续型随机向量	73
第五节 n 维随机向量与极限定理	92
习题三	102
第四章 随机抽样与参数估计	107
第一节 随机样本和统计量	107
第二节 抽样分布	109
第三节 参数的点估计	121
第四节 估计量的评选标准	127
第五节 参数的区间估计	133
习题四	139
第五章 假设检验	143
第一节 假设检验的基本概念	143
第二节 一个正态总体的参数检验	146

第三节	两个正态总体的参数检验	152
第四节	分布函数的拟合检验	157
习题五		163
第六章	回归分析及方差分析	167
第一节	一元线性回归	167
第二节	多元线性回归	179
第三节	单因素试验的方差分析	182
第四节	双因素试验的方差分析	188
习题六		193
附录		196
附录 A	综合题及解答	196
附录 B	习题答案	212
附录 C	本书常用附表	221
附表 1	泊松分布 $P(X=k) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ 的数值表	221
附表 2	标准正态分布函数 $\Phi(u)$ 的数值表	222
附表 3	χ^2 检验的临界值表	224
附表 4	F 检验的临界值表	226
附表 5	t 检验的临界值表	230
参考文献		231

第一章 随机事件及其概率

第一节 随机事件与运算

概率论与数理统计是研究随机现象 ^{p_i} 的统计规律的一门数学学科。

在相同条件下重复进行某一试验，观察其结果，如果结果总是相同的，这种现象就叫作确定性现象，或称为必然现象。例如，在一个标准大气压下加热水到 100°C ，水就一定沸腾。如果在相同条件下重复进行某一试验，每次结果未必相同，这类现象就称为不确定现象，或称为随机现象。例如，抛掷一枚硬币，其结果有时是正面朝上，有时背面朝上。

对随机现象只进行一次或少数几次观察，似乎没有什么规律可言，但在大量重复性试验之后，随机现象就呈现出某种规律性，这种规律性叫作随机现象的统计规律性。

一、随机试验与基本空间

为了便于深入讨论随机现象，我们约定，满足以下三个条件的试验称为随机试验：

- (1) 在相同条件下可重复地进行。
- (2) 试验前能够明确知道试验的所有可能的结果。
- (3) 试验前不能预知是哪一结果出现。

例如，掷一颗骰子的试验就满足上述三个条件。这一试验的所有可能结果是 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ，掷前我们不能断定是几点出现。所以该试验就是一个随机试验。

类似的例子是很多的。读者不难验证，下列试验都是随机试验。

- (1) 掷硬币的试验。
- (2) 检查产品是否合格。
- (3) 检验灯泡的寿命。
- (4) 观测电话台一小时内接到的呼唤次数。
- (5) 测量某种产品的零件的长度。

我们将随机试验的所有可能结果所组成的集合 U ，称为该试验的基本空间。如以上所列的随机试验的基本空间分别是：① $U = \{\text{正面、反面}\}$ ；② $U = \{\text{合格、不合格}\}$ ；③ $U = [0, +\infty)$ ；④ $U = \{1, 2, 3, \dots\}$ ；⑤ $U = (a, b)$ 。

二、事件

在一次试验中可能发生,也可能不发生的事情叫作随机事件,简称为事件。

例如,“掷一颗骰子出现偶数点。”就是一个事件,它可以用 $A=\{2,4,6\}$ 来表示。“电话台在一小时内接到 50 次到 60 次呼唤。”也是一个事件,它可以用 $B=\{50,51,52,\dots,60\}$ 来表示。可见,事件可以用试验的基本空间的一个子集来表示。从而我们可称事件是基本空间 U 的某个子集。记为 $A\subseteq U$ 。

如果某事件只包含基本空间 U 中的一个元素,我们就称该事件是基本事件。例如“电话台一小时内接到 53 次呼唤。”,这样的事件就是基本事件。基本事件的个数与基本空间 U 中的元素的个数是一致的。

三、事件的关系及运算

(1) 每次试验必然发生的事件称为必然事件;每次试验都不可能发生的事件称为不可能事件。

例如,“掷一颗骰子出现的点数小于 7”就是一个必然事件,我们用 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$ 表示。由于必然事件总是包含了基本空间中的所有元素,所以我们总用 U 表示必然事件。不可能事件用 V 表示, V 不包含 U 中的任何元素。

(2) 如果事件 A 发生,事件 B 就必然发生,则称事件 B 包含事件 A ,记作 $A\subseteq B$ 。

例如, A = “灯泡寿命不超过 200h。”

B = “灯泡寿命不超过 300h。”

事件 A 发生必然导致事件 B 发生,故 $A\subseteq B$ 。

(3) 如果 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$ 则称 A 与 B 是等价的,记为 $A=B$ 。

例如,在图 1-1 所示的电路中, A = “灯亮” B = “开关 B 接通。”易知 $A=B$ 。

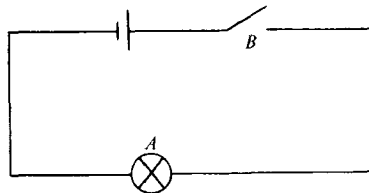


图 1-1

(4) A 与 B 两事件中至少有一个发生的事件,称为 A 与 B 的和事件,记为 $A+B$ 。

例如,同时掷两个均匀的硬币,若把正面朝上记为“1”,否则记为“0”。

A = “恰有一个正面向上” = $\{(1,0),(0,1)\}$

B = “两个正面都朝上” = $\{(1,1)\}$

则 $A+B$ = “至少有一个正面向上”

= $\{(1,0),(0,1),(1,1)\}$

(5) A 与 B 同时发生的事件,称为 A 与 B 的积事件,记为 AB 。

例如, A = “从一副扑克牌中任取一张抽到黑桃”

B = “抽到 A ”

则 AB = “抽到黑桃 A 。”的事件

(6) 如果 A 、 B 两事件不可能同时发生,则称 A 与 B 是互不相容的事件。即:若

$AB=V$ 就称 A 与 B 互不相容。

例如, A = “抽到黑桃的事件”

B = “抽到方块的事件”

显然, 一次抽一张牌, 不可能既是黑桃又是方块, 所以 A 与 B 是互不相容的。

(7) A 发生但 B 不发生的事件, 称为 A 与 B 的差事件, 记为 $A-B$ 。

例如, 从一副扑克牌中任取一张的试验。

A = “抽到偶数点的事件”

B = “抽到点数大于 7 的事件”

则 $A-B$ = “抽到 2、4、6 点的事件”

(8) 若 $A+B=U$ 且 $AB=V$ 则称 B 是 A 的对立事件, 记作 $\bar{A}=B$ 。

例如, 检验产品是否合格的试验。

A = “抽到的产品合格”

B = “抽到不合格产品”

显然 $A+B=U$ 且 $AB=V$, 所以 A 与 B 互相对立, $\bar{A}=B$ 。

上述的(2)、(3)、(6)、(8)是两事件的关系;(4)、(5)、(7)是对事件规定的加法、乘法、减法运算。图 1-2, 分别直观地显示了各种关系和运算, 这将有利于我们分析和思考问题。

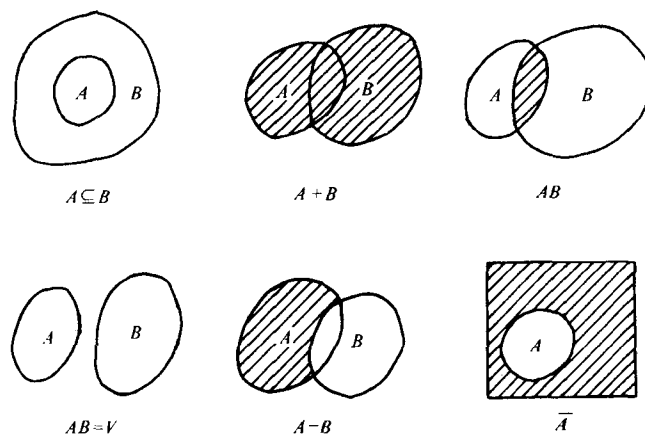


图 1-2

利用事件的关系和运算, 我们可以用简单事件去表达一个复杂事件。

例 1-1 设 A_i = “第 i 次射击且命中目标” ($i=1, 2, 3, \dots$), 试用 A_i 表示 “第 K 次才命中目标的事件 B_K ”。

解 第 K 次才命中目标是指前 $K-1$ 次都未命中目标, 而第 K 次命中目标的事件。

所以

$$B_K = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \cdots \bar{A}_{K-1} A_K$$

例 1-2 设 A, B, C 分别代表不同的事件, 试用 A, B, C 表示①“三事件都不发生的事件”。②“三事件中至少有两个事件发生的事件”。③“三个事件不会同时发生的事件”。

解 (1) $\overline{ABC}$
 (2) $AB + BC + AC$
 (3) $\overline{ABC}$

例 1-3 在图 1-3 的电路中 A 是灯, B, C, D 是三个继电器。若用 A 表示“灯亮”; B, C, D 分别表示 B, C, D 接通的事件。试用 B, C, D 表达 A 。

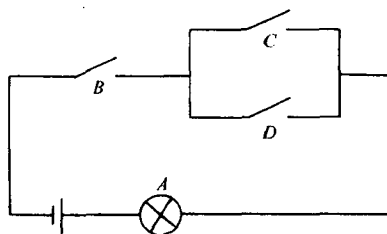


图 1-3

解 B 与 C 接通则灯亮, 或 B 与 D 接通则灯亮。

所以 $A = BC + BD$

四、事件的运算法则

前面说过, 对于某一试验而言, 其所有可能结果组成了基本空间 U , 事件 A 是 U 的一个子集, 因此可以将事件看成是一个集合。我们又规定了事件的和、积、差的运算, 它们与集合的并、交、差是完全一致的。所以集合的有关运算公式, 对于事件的运算也是完全适用的。在表 1-1 中列出事件与集合之间的对应关系, 以及常用的运算规律。今后我们将不加证明地将这些运算规律应用在事件的运算中, 这将为我们的深入讨论事件的概率提供很多方便。

表 1-1

事 件	集 合
必然事件 U	基本空间 U
不可能事件 V	空集 $\emptyset$
事件 A	子集 A
事件 B 包含事件 A	$A \subseteq B$ (B 包含 A)
A 与 B 等价	$A = B$ (A 与 B 相等)
和事件 $A+B$	$A \cup B$ (A 与 B 的并)
积事件 AB	$A \cap B$ (A 与 B 的交)
差事件 $A-B$	$A - B$ (属于 A 而不属于 B)
A 的对立事件 $\bar{A}$	A 的余集 $\bar{A}$
A 与 B 互不相容	$AB = \emptyset$

(1) 交换律 $A+B=B+A, AB=BA$

(2) 结合律 $(A+B)+C=A+(B+C)$

$(AB)C=A(BC)$

- (3) 分配律 $A(B+C)=AB+AC$
 $A+(BC)=(A+B)(B+C)$
- (4) 同一律 $AU=A, A+V=A$
- (5) 等幂律 $AA=A, A+A=A$
- (6) 互补律 $A+\bar{A}=U, A\bar{A}=V$
- (7) 两重否定律 $\overline{\overline{A}}=A$
- (8) 德·摩根律 $\overline{A+B}=\bar{A}\bar{B}, \overline{AB}=\bar{A}+\bar{B}$

例 1-4 已知 $A=BC+BD$, 试求 $\bar{A}$ 。

$$\begin{aligned}\text{解 } \bar{A} &= \overline{BC+BD} \\ &= \overline{BC} \cdot \overline{BD} \\ &= (\bar{B}+\bar{C})(\bar{B}+\bar{D}) \\ &= \bar{B}+\bar{C}\bar{D}\end{aligned}$$

例 1-5 “A、B 两事件至少有一个发生”与“A、B 最多有一个发生”是否互相对立？

$$\text{解 } \overline{A+B}=\bar{A}\bar{B}$$

而“A、B 最多有一个发生的事件” $=\bar{A}B+A\bar{B}+\bar{A}\bar{B}$, 可见所说的两事件并不互相对立。

第二节 概率的定义

一、古典的概率定义

人们很希望用一个数表示事件发生的可能性的。如何找到这个数？早在 1650 年拉普拉斯 (Laplace) 给出了如下的定义：

定义 1-1 如果试验的基本空间中的元素个数是有限个 (n 个), 而且每一基本事件发生的可能性是相等的, 事件 A 包含了 U 中的 m 个元素, 则称 $\frac{m}{n}$ 为事件 A 发生的概率, 记为

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

例 1-6 求事件 A = “掷一颗骰子出现偶数点”的概率。

$$\begin{aligned}\text{解 } U &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad n=6 \\ A &= \{2, 4, 6\} \quad m=3 \\ P(A) &= \frac{m}{n} = 0.5\end{aligned}$$

例 1-7 盒中装有三个白球、两个黑球, 从中任取两个, 问抽到的两个全是白球的概率为多少？

解 如果用①②表示两个黑球,用3、4、5表示三个白球。基本空间 $U = \{\text{①②}, \text{①3}, \text{①4}, \text{①5}, \text{②3}, \text{②4}, \text{②5}, 34, 35, 45\}$ 。

$A = \{\text{抽到的全是白球}\} = \{34, 35, 45\}$

所以
$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{10} = 0.3$$

由于我们关注的是基本空间 U 中元素的个数 n , 以及事件 A 中包含的元素的个数 m , 并不重视 U 、 A 中元素的具体情况, 所以在利用定义 2-1 求事件 A 的概率时, 只要 U 是有限、等可能的 (U 中的元素个数是有限的; 基本事件发生的可能性是彼此相等的。), 我们不必将 U 与 A 的具体构造写出来, 仅需利用中学时期学过的排列与组合的知识, 以及乘法原理、加法原理, 求出 n 与 m 即可。如本例可作如下计算

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_3^2}{C_5^2} = 0.3$$

例 1-8 设有一批产品共 100 件, 其中有 5 件是次品。现从中任取 50 件, 求:

(1) $A = \text{“其中无次品”}$ 的概率。

(2) $B = \text{“其中恰有两件次品”}$ 的概率。

解 (1) $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{95}^{50}}{C_{100}^{50}} = 2.8\%$

$$(2) P(B) = \frac{C_5^2 \cdot C_{95}^{48}}{C_{100}^{50}} = 32\%$$

例 1-9 有 n 个人, 每人都等可能地被分配在 N 个房间中的任一间 ($N \geq n$)。试求以下两事件的概率:

$A = \text{“恰在指定的 } n \text{ 间房中各有一人”}$ 。

$B = \text{“恰好每人各占一间”}$ 。

解 每个人各有 N 种分法, n 个人就有 N^n 个不同的分法, 故基本空间 U 中的元素个数是 N^n 。在指定的 n 个房间中各有一人的分法有 $n!$ 个, 故 A 中元素的个数为“全排” $n!$

$$P(A) = \frac{n!}{N^n}$$

事件 B 中元素的个数可作如下考虑, 先要在 N 间房中任取定 n 个, 共有 C_N^n 个不同的指定方法, 然后在指定的 n 个房间中各有一个人的分配方法有 $n!$ 个。根据乘法原理, B 中元素的个数为 $C_N^n \cdot n!$ 。故

$$P(B) = \frac{C_N^n \cdot n!}{N^n} = \frac{A_N^n}{N^n}$$

例 1-10 全班有 30 名同学, 试求“他们生日各不相同”的概率。

解 此问题相当于“将 30 个人分配到 365 个房间中恰好每人各占一间。”的

概率问题。

$$P(A) = \frac{A_{365}^{30}}{365^{30}} = 29.4\%$$

例 1-11 从 0、1、2、3 中任取 3 个数排成一列。求“恰好排成一个三位的偶数”的概率。

解 设 $A_1 =$ “排出以 0 为个位数的偶数”

$A_2 =$ “排出以 2 为个位数的偶数”

显然，基本空间 U 中的个数为 A_4^3 。 A_1 中元素的个数为 A_3^2 。 A_2 中元素的个数为 $2 \times 2 = 4$ ，由加法原理可知，所求事件 A 中的元素个数为 A_1 中元素的个数与 A_2 中元素的个数之和。

所以
$$P(A) = \frac{A_3^2 + 4}{A_4^3} = \frac{10}{24} = 0.416$$

二、几何概率的定义

测量同一种零件的长度，其基本空间是一个区间 (a, b) 。射击打靶的试验，其基本空间 U 是一个平面区域 $\{(x, y): x^2 + y^2 \leq R^2\}$ 。这样的基本空间中元素的个数是无限的。在这种情况下，就不能用古典概率定义去求某事件发生的概率，必须另作考虑。

例 1-12 将一个有刻度的木圆盘绕中心轴旋转，然后用针投向木圆盘。试求“针扎在 70° 到 130° 之间的角域内”的概率。

解 基本空间 $U = [0, 360)$

所求事件 $A = [70, 130]$

显然事件 A 的概率
$$P(A) = \frac{130 - 70}{360 - 0} = \frac{1}{6}$$

定义 1-2 如果随机试验的基本空间 U 可以用线段或某有限平面区域来表示，且每一基本事件发生的可能性又是相等的，则事件 A 的概率

$$P(A) = \frac{A \text{ 的测度}}{U \text{ 的测度}}$$

这里的测度仅指线段的长度，或平面图形的面积，不涉及更为复杂的集合的测度。

例 1-13 甲乙二人相约在某一时间段 T 内到预定点会面，且先到者须等待 10min 后方可离去。求甲乙二人能够见面的概率。（ $T = 60$ ）

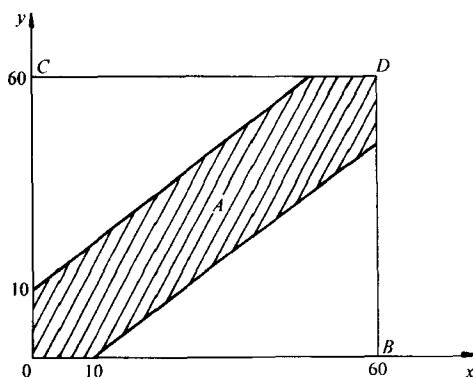


图 1-4

解 如图 1-4, 设甲在 x 时刻到达预定地点, 乙在 y 时刻到达. (x, y) 就可以表示一个基本事件. 由于二人在 $[0, 60]$ 内某一时刻到达预定地点是随机的, 则可认为每一基本事件是等可能的。

基本空间 $U = \{(x, y): 0 \leq x \leq 60, 0 \leq y \leq 60\}$

$A = \text{“二人能够见面”} = \{(x, y): |x - y| \leq 10\}$

U 与 A 所对应的平面图形如图 1-4 所示, 根据几何概率定义可知

$$P(A) = \frac{60^2 - 2 \times \frac{1}{2} \times 50^2}{60^2} = 30.5\%$$

例 1-14 如图 1-5 所示, 平面上画有等距离为 a 的一些平行线, 若向该平面上随机地投掷长为 l 的针, 试求针与平行线相交的概率. ($l < a$)

解 设针的中点到最近的平行线的距离为 y , 针与平行线的夹角为 φ , 则 (φ, y) 表示一个试验结果, 将点 (φ, y) 作为基本空间 U 中的一个元素。

$$U = \left\{ (\varphi, y): 0 \leq \varphi < \pi, 0 \leq y \leq \frac{a}{2} \right\}$$

$A = \text{“针与平行线相交”}$

$$= \left\{ (\varphi, y): 0 \leq y \leq \frac{l}{2} \sin \varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi \right\}$$

由图 1-5 可知

$$P(A) = \frac{\int_0^\pi \frac{l}{2} \sin \varphi \, d\varphi}{\frac{a}{2} \cdot \pi} = \frac{2l}{a\pi}$$

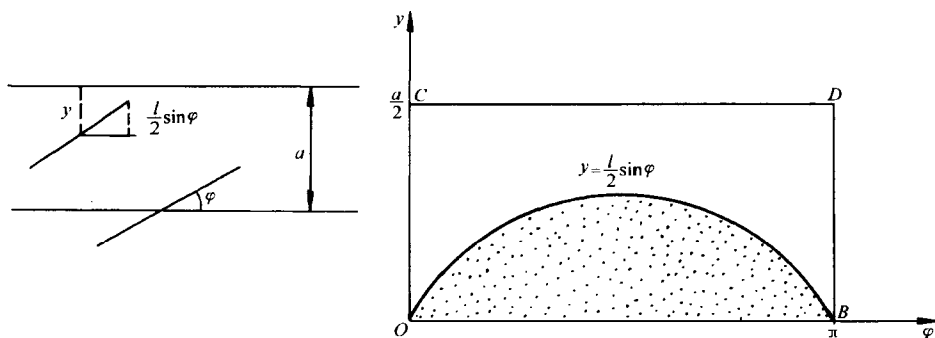


图 1-5

三、概率的统计定义

在上述的两个定义下, 仅当每个基本事件发生的概率是相等时方可使用。但是有很多问题, 基本事件是否具有等可能性很难决断。例如, 电话台在一小时内接到 60 次呼唤与接到 61 次呼唤, 这两个基本事件是否可以认为它们具有等可能

性呢？我们不能乱下结论，而要通过实际的观测统计去研究这类事件发生的概率。

历史上有人作过成千上万次的投掷硬币的试验，表 1-2 是试验的记录结果。

令 $A = \text{“硬币的正面向上”}$ ，由古典概率定义可知 $P(A) = 0.5$ 。

表 1-2

实验者	投掷次数 n	出现“正面朝上”的次数 μ	频率 μ/n
Demorgan	2048	1061	0.518
Buffon	4040	2048	0.5069
Peorson	12000	6019	0.5016
Pearson	24000	12012	0.5005

从试验的记录看，随着试验次数 n 的增加，事件 A 出现的频率就越来越接近事件 A 的概率。这个现象不因人而异，它是事件本身所固有的一种属性，即随机事件在一次试验中可能出现也可能不出现。但在大量地重复试验中，事件 A 出现的频率呈现出一种统计规律——随着试验次数 n 的增加，频率总在某一常数附近摆动，而且摆动的幅度会越来越小。

定义 1-3 在条件不变的情况下，作 n 次随机试验，记 μ 是事件 A 出现的次数（频数）。如果频率 μ/n 稳定地在某一数值 p 的附近摆动，而且一般来说，随着试验次数增大，摆动的幅度越来越小，则称 p 为事件 A 的概率，记为 $P(A) = p$ 。

简言之，频率的稳定值是事件 A 的概率。

定义 1-3 是人们长期观察得到的规律性的结论。该定义对基本事件无等可能性的要求，更加接近实际，它揭示了以下几点：

(1) “概率”这一概念不再仅仅停留在人们主观的分析计算上，而是建立在实践的基础上。

(2) 由理论推导计算出的事件的概率值，可以通过大量的试验结果加以验证。

(3) 给人们提供了如何得到事件 A 的概率的近似值的方法。

例如，抽查 1000 件产品，发现有 20 件是次品，由于 $n=1000$ 是一个相当大的数，可以说产品的次品率是 2%，或说从这批产品中任抽一个抽到次品的概率是 2%。

以上所讲的三个概率的定义，是在不同的情况下分别给出的事件发生的可能性大小的数量描述。表面上看它们彼此是很不相同的，但无论用哪种定义去计算出的概率都满足以下特点：

(1) 必然事件的概率 $P(U)=1$ 。

(2) 不可能事件的概率 $P(V)=0$ 。

(3) 任意事件 A 的概率 $P(A)$ 满足 $0 \leq P(A) \leq 1$ 。

四、概率的公理化定义

上面给出的概率定义,反映了人们认识的一个历程。为了使概率的理论更加严密,数学家提出了概率的公理化定义,从而建立起概率的公理化体系,但限于学时,我们仅列出概率空间的定义,供同学参考。

设 U 为点集 $\{\omega\}$; F 是 U 的一些子集组成的集合。若 F 满足以下三条就称 F 为 σ 代数:

- (1) $U \in F$
- (2) 若 $A \in F \Rightarrow \bar{A} \in F$
- (3) 若 $A_i \in F \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$

定义 1-4 $P(A)$ 是定义在 σ 代数 F 上的一个实值集函数,对 $\forall A \in F$, 若有:

- (1) $P(A) \geq 0$
- (2) $P(U) = 1$
- (3) 若 $A_i A_j = \emptyset$ (空集) ($i \neq j$) 有

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

则称 $P(A)$ 为 F 上的概率。并称 (U, F, P) 为概率空间。

例 1-15 设 $U = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$; F 是 U 的一切子集所组成的集合类; 对于任意的 $A \in F$, 定义函数 $P(A) = \sum_{k \in A} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} (\lambda > 0)$, $P(\phi) = 0$ 。试证 $P = P(A)$ 是 F 上的概率。

证 易知 F 是 σ 代数。

$$(1) P(A) = \sum_{k \in A} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \geq 0$$

$$\begin{aligned} (2) P(U) &= \sum_{k \in U} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{对 } \forall A \in F \text{ 有 } P(A) = \sum_{k \in A} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \leq \sum_{k \in U} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = 1$$

所以

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

$$(3) P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{k \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k \in A_n} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

证毕

第三节 概率的计算公式

本节我们将从概率的定义出发, 逐渐给出概率的加法公式、乘法公式, 以及全概公式和贝叶斯公式。

一、加法公式

定理 1-1 如果事件 A 、 B 互不相容, 则有

$$P(A+B) = P(A) + P(B) \quad \text{或} \quad P(A \cup B)$$

证 仅用古典的概率定义给出证明。

设基本空间 $U = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 其中基本事件是等可能的。

令 $A = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_r\} \subseteq U$

$B = \{e''_1, e''_2, \dots, e''_s\} \subseteq U$

由于 $AB = \emptyset$ 可知

$$A+B = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_r, e''_1, e''_2, \dots, e''_s\}$$

所以

$$P(A+B) = \frac{r+s}{n} = \frac{r}{n} + \frac{s}{n} = P(A) + P(B)$$

例 1-16 在 10 件产品中有 3 件次品, 从中任取两件。求至少取得一件次品的概率。

解 $A =$ “取得的两件都是次品”

$B =$ “取得的两件中恰有一件是次品”

易知

$$AB = \emptyset$$

$A+B =$ “至少取得一件次品”

$$P(A+B) = P(A) + P(B) = \frac{C_3^2}{C_{10}^2} + \frac{C_3^1 \cdot C_7^1}{C_{10}^2} = \frac{24}{45}$$

定理 1-2 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

证 $P(A+\bar{A}) = P(U) = 1$

又因为

$$A\bar{A} = \emptyset \quad P(A+\bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

所以

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

定理 1-3 若 $A \subseteq B$ 则 $P(B-A) = P(B) - P(A)$

证 因 $B = A + (B-A)$ 且 $A(B-A) = \emptyset$

所以

$$P(B) = P(A) + P(B-A)$$

即

$$P(B-A) = P(B) - P(A)$$

推论 1-1 若 $A \subseteq B$ 则 $P(A) \leq P(B)$

定理 1-4 A, B 为任意两事件则有

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) \quad \text{加法公式}$$

证

因为 $A+B=A+(B-AB)$ 且注意到

$$A(B-AB)=V \quad AB \subseteq B$$

由定理 1-1 和定理 1-3 得

$$\begin{aligned} P(A+B) &= P(A) + P(B-AB) \\ &= P(A) + P(B) - P(AB) \end{aligned} \quad \text{证毕}$$

推论 1-2 $P(A+B) \leq P(A) + P(B)$

例 1-17 袋中有红、黄、白球各一个,每次任取一个,有放回地抽取 3 次。求取得的三次球里没有红球或没有黄球的概率。

解 设 $\bar{R}$ = “三次都没有取到红球”

$\bar{Y}$ = “三次都没有取到黄球”

$$\begin{aligned} P(\bar{R} + \bar{Y}) &= P(\bar{R}) + P(\bar{Y}) - P(\bar{R}\bar{Y}) \\ &= \frac{2^3}{3^3} + \frac{2^3}{3^3} - \frac{1^3}{3^3} = \frac{5}{9} \end{aligned}$$

定理 1-5 A, B, C 为任意三个事件,则有

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

证 $P(A+B+C) = P(A+B) + P(C) - P[(A+B)C]$

$$= P(A) + P(B) - P(AB) + P(C) - P(AC+BC)$$

$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC)$$

$$+ P(ABC)$$

例 1-18 袋内放有 10 枚硬币,其中有两枚 5 分,三枚 2 分,五枚一分。从中任取 5 枚。求其总面值超过一角的概率。

解 A_1 = “取得的五枚中有两枚 5 分的”

A_2 = “取出的五枚中有一枚 5 分,三枚 2 分,一枚 1 分”

A_3 = “取出的五枚中有一枚 5 分,两枚 2 分,两枚 1 分”

A = “总面值超过一角”

则 $P(A) = P(A_1 + A_2 + A_3)$

$$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3)$$

$$- P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3)$$

$$= \frac{C_2^2 \cdot C_8^3}{C_{10}^5} + \frac{C_2^1 \cdot C_3^3 \cdot C_5^1}{C_{10}^5} + \frac{C_2^1 C_3^2 C_5^2}{C_{10}^5}$$

$$= 0.5$$

推论 1-3 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为任意的 n 个事件,则有

$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i \neq j}^n P(A_i A_j) + \sum_{i \neq j \neq k}^n P(A_i A_j A_k)$$