随机函数和湍流

S. 潘契夫 著

科学出版社

随机函数和湍流

S. 潘 契 夫 著

谈镐生 岳曾元
关德湘 李荫亭 譯

科学出版社

1976

内 容 简 介

本书分三部分：第一部分概述经典概率论和随机过程，并且系统地讨论了随机场理论；第二部分为流体力学湍流统计理论；第三部分详细地论述了大气湍流的统计理论，以及随机函数对气象学、气候学和气象预报中的各种问题的应用。

本书可供流体力学和气象学等方面的研究人员、工程技术人员以及高等院校有关专业师生参考。

S. PANCHEV
RANDOM
FUNCTIONS AND TURBULENCE
Pergamon Press
1971

随机函数和湍流

S. 潘契夫 著

谈镐生等 译

*

科学出版社出版
北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1976 年 8 月第 一 版 开本：787×1092 1/16
1976 年 8 月第一次印刷 印张：22 3/4
印数：0001—7,860 字数：523,000

统一书号：13031·394
本社书号：595·13—2

定价：2.35 元

譯　　序

湍流现象在工程技术中大量存在，而湍流理论又是百年来没有彻底解决的问题．因此流体力学的这一分支受到各国理论与实际工作者的重视，我国许多部门也在开展这方面的工作．

本书以随机函数理论为数学工具，系统地研究流体力学湍流、大气湍流及其应用．内容较全面，阐述较浅显易懂，可以作为一本入门性的读物．我们本着“洋为中用”的精神翻译出版，向广大读者介绍．

本书于 1965 年在保加利亚首先出版，1967 年被译为俄文；1971 年的英译本是根据俄译本翻译的，并且增加了一个附录．现在的中译本就是按这个英译本翻译的．

原书英译本文辞谬误较多，编排误差不少，内容亦偶有欠妥之处，均由译者加以改正，不一一注明．缺漏之处，在所难免，欢迎读者批评指正．

译　者

引 言

在过去三十年间，一个新领域在物理与技术中迅速发展起来，它以最广泛涵义下的集体现象作为研究对象，而用随机函数理论作为数学方法．正如我们以后将清楚看到的，从三十年代开始出现的这一数学新领域的发展，是解决许多具体实际问题所迫切要求的．

到目前为止，随机函数理论已用得非常广泛，实例不胜枚举．只举其中最重要的，便足以说明其重大意义．其中，必须予以首先考虑的是，在无线电接收器和电子系统中，为了在随机噪音背景上将有用信号区分开来，以及为了信息的传输和处理的某些方面，而对起伏过程所作的研究．

复杂计算机与自动控制系统的新近发展——它不仅大大减轻了人的体力劳动，而且甚至执行了人脑的某些功能——已经扩展了随机函数数学工具的应用范围．没有这一工具，将不能说明上述自动系统操作中的各种随机扰动．为这些以及一些其它任务，一个变量-时间的概率函数(随机函数)已获得应用．

然而，物理学和力学，特别是湍流理论的最近发展趋势，使得有必要研究多于一个变量的随机函数——所谓随机场(标量场与向量场)．除当前湍流运动的统计理论之外，有关随机场理论的各种数学问题也都受到注意．随机函数的这一最新应用领域成为本书第二和第三部分的详细讨论对象．

随机函数理论，除了对研究流体动力学中“纯粹”湍流具有其独立的科学意义外，还由于它的方法和结果可以应用到湍流的各种实用方面而有着深远的意义．这一点对于大气湍流尤为正确．

在大气动力学中，湍流是与人类生活和工作中一些实质性现象有关的最重要因素之一．只要提到象固体杂质在大气中的扩散以及大工业中心上空空气污染的控制这类重要问题，不可能在不考虑大气湍流条件下获得解决就够了．尽管费尽心机，有关湍流理论的现有半经验方法对这一目的是不够的．最近，已经非常注意建立一种用拉格朗日变量的湍流统计理论，为此目的，非常广泛地使用了随机函数的相关理论与谱理论．

气象要素(风速、温度、空气湿度)的湍流起伏使大气变成一种随机非均匀介质．这一现象造成光、声和无线电波的独特散射，它们在大气中漫射，而对我们则显现为无线电接收系统的噪音，超短波的远距离传送，声音的减弱，地面与天体光源的闪烁等熟悉的形式．这些现象中有些是有用的，另一些则是有害的．为避免或尽量减小后者的影响，在无线电技术与无线电物理、大气声学以及光学诸领域中的专家们具备大气湍流的基本知识是必要的．

装有自动驾驶系统的飞机在实际湍流大气中飞行时，受到连续的随机扰动；没有关于这些扰动的统计结构的知识，则对于控制系统工作稳定性的研究是不可能的．

涉及大气上层以及属于天体物理学的一些理论问题与电离层中的湍流运动以及电离星际气体的性状有关．这些问题在湍流理论的范围内找到了可能的解释．例如，无线电波的分布主要依赖于电离层中的湍流电子脉动频率．而这些反过来又可由无线电波特征

量(相位和振幅)的起伏来决定.

最后，与目前预报天气的方法有关的一些重要问题——观测数据的内插与外插，平均，为方程的数值(计算机)解选择参考点的网格，等等，可借助于随机函数理论并用具有天气图尺度运动的气象场(大气宏观湍流)的统计结构知识来解决．这些问题已经并将继续吸引越来越多的应用数学家和工程师们的注意，对于他们，熟悉上述问题的气象方面(物理基础)已证明是绝对不可缺少的.

关于随机函数理论及其对湍流统计理论的应用已发表过极其大量的研究．其中绝大多数为概述文章，也有少数专题论文．然而，这些研究通常讨论个别的具体问题．因此，这些研究高度专业化因而对于初学者是非常难的．本书目的是在湍流统计理论所需限度内，通过系统地描述一个或多个变量的随机函数理论来克服这一缺点．由于在本书中必须概略涉及许多问题，我们对本书的主要部分，即第二到第八章，力求其完整；其余地方在篇幅许可下，把问题扼要叙述，而对于更全面的表述，则向读者介绍了原始文献．书中也包括了作者的若干贡献.

本书从经典概率论的简短说明开始，接着较详细地叙述了一个变量的随机函数理论(随机过程，第二章)．包括这项内容是基于下述事实：即没有这一领域的最低限度的必要知识，读者在理解本书所讨论的专业问题时将遇到极大困难．阅读第一和第二章可作为更深入地学习随机过程理论及其对前述各种问题应用的基础．第三章中系统地讨论了随机场理论，它目前只应用于湍流运动理论.

第四到第七章讨论了湍流运动当前的统计理论．有能力的读者可能不同意对于该理论的不同方法进行分别讨论．虽然这样安排必然要求在不同节中几次考虑同一问题，但我们仍然认为这种讨论方法是有益的，因为它可以清楚地表述出不同方法的优缺点及其未来的可能性.

第八到第十章充分详细地讨论了大气湍流的统计理论，并详细分析了随机函数对气象学、气候学和预测的各种问题的应用．书末所附参考文献未包括本书写作时已发表的全部著作，而只列举了由于某种理由被引证、或是作者认为有必要包括的那些著作．为方便起见，它们对每部分分别给出．此外，在准备本书俄文版和英文版过程中又用到许多新的参考文献．它们作为“补充参考文献”附出，并在正文中用星号表示；例如[23*]，[50*]等等．在引证所有文献时，或先写作者名字，然后写相应文献的号数，或只写出这一号数.

目 录

第二部分 流体动力学湍流

第三部分 大 气 湍 流

第 一 部 分

随机函数论大要

第一章　关于概率论的某些知识

§1. 随机变量与分布函数

按照概率论，一个变量，作为一定条件下的实验结果，可取一些可能数值中的任何一个但不可能事先预断，就称作随机的．然而，该变量可能数值的范围能够事先知道．例如在掷骰子时，事先就知道六个数字之一将出现；在测量气温时，将记录下在测量点的平均温度附近摆动的度数，等等．在第一例中，我们处理离散量，而在第二例中处理连续随机量．为理解随机量的统计规律，这些知识尚不够，还必需知道给定值的概率．为此，在概率论中引进了分布函数的概念．这一概念是连续随机变量可能值的每一区间（或者离散随机变量的每一可能值）与它在该区间发生（或者取这些值）的概率之对应法则的数学表达式．设 x 为一任意实数，而 ξ 为一随机变量．让我们来考察事件 $\xi<x$，它由随机变量 ξ 具有小于 x 的值这一事实所构成．这一事件的概率一般用 $P(\xi<x)$ 表示．它显然是 x 的函数．让我们引进

$$F(x)=P(\xi<x).\tag{1.1}$$

函数 $F(x)$ 称为积分分布函数．如果给出分布函数 $F(x)$，则随机变量 ξ 就认为是已知的．

按定义，$F(x)$ 具有如下基本特性：

首先，由于 $F(x)$ 是一概率，其值必界于

$$0\leqslant F(x)\leqslant 1.\tag{1.2}$$

积分分布律 $F(x)$ 是 x 的连续非减函数，即若 $x_2>x_1$，则 $F(x_2)\geqslant F(x_1)$．事实上，设有两个事件 $\xi<x_1$ 与 $x_1\leqslant\xi<x_2$．其中 $x_1<x_2$．显然这两个事件是互斥的，即它们不能同时存在．它们相加起来等价于一个单独的事件 $\xi<x_2$．根据熟悉的概率加法定理[7]，等价事件 $\xi<x_2$ 的概率为

$$P(\xi<x_2)=P(\xi<x_1\text{ 或者 }x_1\leqslant\xi<x_2)=P(\xi<x_1)+P(x_1\leqslant\xi<x_2),$$

由此得出

$$P(x_1\leqslant\xi<x_2)=P(\xi<x_2)-P(\xi<x_1)=F(x_2)-F(x_1).\tag{1.3}$$

换句话说，随机变量 ξ 在半闭区间 (x_1,x_2) 中发生的概率等于函数 $F(x)$ 在同一区间的增量．因为(1.3)式左端永远是非负的，所以有不等式

$$F(x_2)\geqslant F(x_1).\tag{1.4}$$

概率论中通常只考虑其可能值为有限的随机量．因此不等式 $\xi<x$ 的概率在充分

大的 x 邻域任意接近于 1，而在绝对值充分大的负 x 邻域任意接近于零. 根据这一点以及前面证明的 $F(x)$ 单调特征，可写出

$$F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)=0,\quad F(\infty)=\lim_{x\to\infty}F(x)=1. \tag{1.5}$$

对于离散随机变量，分布函数 $F(x)$ 是一不连续函数，其值在 ξ 的可能值 x_i 处改变，由此，在 x 的两个相邻值间[1]，$F(x)=$常数. 因此 $F(x)$ 的图象是一阶梯曲线.

在连续随机量的情形，$F(x)$ 是一可微函数. 其导数

$$f(x)=F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} \tag{1.6}$$

称作微分分布函数或者(更经常地)概率密度. 根据(1.3)式，也可把函数 $f(x)$ 写为

$$f(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(x\leqslant\xi<x+\Delta x)}{\Delta x}, \tag{1.7}$$

按此式，第二项的意义很清楚.

由(1.7)得知，略去相对 Δx 的高阶无穷小，乘积

$$f(x)\Delta x\approx P(x\leqslant\xi<x+\Delta x) \tag{1.8}$$

表示量 ξ 在区间 $(x, x+\Delta x)$ 中发生的概率. 考虑到 (1.3) 式，我们把 (1.6) 在 a 和 b 间积分，则有

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)=P(a\leqslant\xi<b). \tag{1.9}$$

由定积分的几何解释，概率 $P(a\leqslant\xi<b)$ 在图中可表为由线段 ab 和过此线段两端的纵坐标线组成并在上面以曲线 $f(x)$ 为界的曲边梯形的面积. 由于 $F(x)$ 是非减函数，

$$f(x)\geqslant 0. \tag{1.10}$$

如果在 (1.9) 中，我们令 $a=-\infty, b=+\infty$，并利用 (1.3)，就很容易得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=F(\infty)-F(-\infty)=1. \tag{1.11}$$

后者意味着曲线 $f(x)$ 下面的面积等于 1. 由 (1.9)，令 $a=-\infty, b=x$，我们又有

$$F(x)=P(\xi<x)=P(-\infty<\xi<x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx. \tag{1.12}$$

例 1. 均匀分布. 这是概率密度 $f(x)$ 在区间 (a, b) 中为常数值，在区间外等于零的分布律 (图 1). 按定义，$f(x)=c$. 因为由 (1.11)，线段 ab 上的矩形面积(图 1)应等于1，

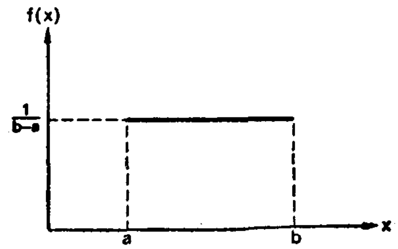

图 1 均匀分布的函数 $f(x)$

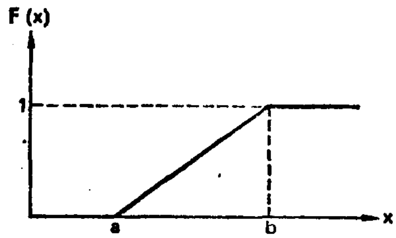

图 2 均匀分布的函数 $F(x)$

1) 应指两个不跨过 x_i 的邻近值. ——译者注

因此有

$$c=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b \\ 0 & x<a,\ x>b.\end{cases}\tag{1.13}$$

根据（1.12），

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x-a}{b-a} & a<x<b \\ 1 & x>b \\ 0 & x<a.\end{cases}\tag{1.14}$$

例2．正态分布．

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.\tag{1.15}$$

也称作高斯分布．在 $x=a$，函数 $f(x)$ 有最大值

$$f_{最大}=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.\tag{1.16}$$

并且，当 $|x|\to\infty$ 时，$f(x)\to 0$．曲线形状本质上依赖于参数 σ 的值（图3）．

容易证明，由（1.15）式定义的 $f(x)$ 满足（1.11）．在此例中，按照（1.12），积分分布函数为

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),\tag{1.17}$$

其中

$$\Phi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^u e^{-\frac{t^2}{2}}dt\tag{1.18}$$

是熟悉的高斯函数（误差积分）．

在某些情况下，概率现象的观察结果由不只一个数，而是两个，三个或者一般 n 个数 $\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_n$ 构成．我们可认为这些数构成一个多维随机变量，

$$\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n).\tag{1.19}$$

给出这些量的几何解释是很方便的．于是不管变量 $\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_n$ 的本性如何，我们将把它们看作是 n 维欧几里德空间一随机点的坐标，或者看作 n 维随机向量 ξ 的各分量．这使我们能利用几何图示方法．让我们在这里只考虑二维随机量．平面上具有分量 (ξ_1,ξ_2) 的随机向量可作为这种变量的例子．如果知道其二维分布函数

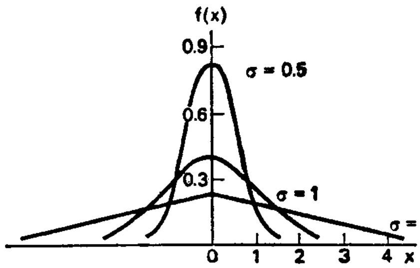

图 3　参数 σ 为各种值的正态分布曲线

$$F(x_1,x_2)=P(\xi_1<x_1,\xi_2<x_2),\tag{1.20}$$

我们就假定该二维随机变量是给定的．这个函数表示事件 $\xi_1<x_1$ 和 $\xi_2<x_2$ 同时发生的概率，或者在几何意义上，表示向量 $\xi=(\xi_1,\xi_2)$ 的端点处于图4阴影区中的概率．

由于 $\xi_1<-\infty$ 和 $\xi_2<-\infty$ 是不可能事件，而 $\xi_1<\infty$ 和 $\xi_2<\infty$ 按概率论的术语为可靠

事件，并且函数 $F(x_1, x_2)$ 是连续的，因此类似于 (1.5)，我们写出

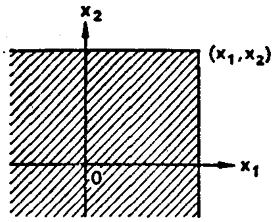

图 4　二维随机量的几何解释

$$F(x_1, -\infty)=F(-\infty, x_2)=0,\quad F(\infty, \infty)=1. \tag{1.21}$$

显然还有

$$\begin{aligned} F(x_1, \infty)&=P(\xi_1<x_1 \text{ 和 } \xi_2<\infty)\\ &=P(\xi_1<x_1)=F(x_1),\\ F(\infty, x_2)&=F(x_2). \end{aligned} \tag{1.21'}$$

让我们建立比值

$$\frac{P(x_1\leqslant\xi_1<x_1+\Delta x_1 \text{ 和 } x_2\leqslant\xi_2<x_2+\Delta x_2)}{\Delta x_1\Delta x_2}. \tag{1.22}$$

如果当 $\Delta x_1\to 0$ 和 $\Delta x_2\to 0$ 时存在极限，就把它记作 $f(x_1, x_2)$，并称为二维概率分布密度，又根据 (1.20)，

$$f(x_1, x_2)=\frac{\partial^2 F(x_1, x_2)}{\partial x_1\partial x_2}. \tag{1.23}$$

类似于 (1.8)，$f(x_1,x_2)dx_1dx_2$ 表示点 M 处于具有坐标 (x_1, x_2) 的面积元 dx_1dx_2 之内的概率．于是点 M 处于任意面积 S 内的概率等于二重积分

$$P(M\in S)=\iint_S f(x_1, x_2)dx_1dx_2. \tag{1.24}$$

显然 $f(x_1, x_2)\geqslant 0$．函数 $F(x_1, x_2)$ 可通过二重积分用 $f(x_1, x_2)$ 来表达，

$$F(x_1, x_2)=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} f(x_1', x_2')dx_1'dx_2'. \tag{1.25}$$

因此在 $x_1=x_2=\infty$ 的情形，应用 (1.21) 我们得到

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)dx_1dx_2=1. \tag{1.26}$$

如果已知二维分布密度 $f(x_1, x_2)$，就不难决定随机变量 ξ_1 和 ξ_2 的相应一维密度．事实上，由 (1.21) 和 (1.25)，当 $x_2=\infty$ 时，我们得到[1)]

$$F_1(x_1)=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1', x_2')dx_1'dx_2'.$$

对 x_1 微分，我们得出

$$f_1(x_1)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)dx_2, \tag{1.27}$$

类似地，

$$f_2(x_2)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)dx_1. \tag{1.28}$$

如果事件 $\xi_1<x_1$ 和 $\xi_2<x_2$ 是独立的，则随机变量 ξ_1 和 ξ_2 就称为独立的．按照概率乘

1) $F_1(x_1)$ 以及下面的 $f_1(x_1), f_2(x_2), F_2(x_2)$ 的下标为译者所加．

法定理，两个独立事件联合发生的概率等于这些事件概率的乘积．于是由 (1.20) 直接得出，在独立随机量情形，关系式

$$F(x_1, x_2) = F_1(x_1) F_2(x_2) \tag{1.29}$$

成立．

相反的推断也成立：如果 $F(x_1, x_2)$满足 (1.29)，则随机量是独立的．微分(1.29) 并用(1.6) 和 (1.23)，我们得到

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2). \tag{1.30}$$

作为例子，我们考察二维正态分布

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{(1-r^2)}} e^{-A(x_1, x_2)}$$

$$A(x_1, x_2) = \frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x_1-a_1)^2}{\sigma_1^2} - 2r\frac{(x_1-a_1)(x_2-a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right]. \tag{1.31}$$

由此并由(1.27)我们得到

$$f_1(x_1) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_1-a_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

以及$f_2(x_2)$的类似表达式．因此，如果二维随机变量(ξ_1, ξ_2)具有正态分布，那么变量ξ_1, ξ_2也各具有正态分布．在$r=0$的情形，由 (1.31) 式定义的函数$f(x_1, x_2)$ 满足条件 (1.30)．因此参数r描述着随机量之间的依赖性．在下节中我们将更详细地解释这个参数的意义．

§ 2．随机变量的数字特征

从概率论的观点来说，为定义一个随机变量，如前所述，必须知道其可能值的集合(或者在连续随机变量情形，就是包括这些值的区间)以及与它们对应的概率．换句话说，必须知道它的分布函数．但实际上，确定这一函数的解析形式往往是困难的，并且也并不总是必要的．只要知道随机变量的某些平均特征就够了．其中最简单的是随机变量的平均值(它的数学期望)[1]，由下面表达式定义：

$$\bar{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx. \tag{2.1}$$

然而，平均值$\bar{\xi}$只提供了不同ξ值所围绕的中心的表达式．因此单单$\bar{\xi}$不足以完全描述随机变量ξ．在需要更完全地描述随机变量ξ的情况时，要用到各阶分布矩或统计矩：

$$b_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\, dx, \tag{2.2}$$

1) 此处及以后，所有平均运算均用横线表示．此外，符号 $M(\xi)$和 $E(\xi)$在文献中得到广泛应用．

$$B_k=\int_{-\infty}^{\infty}(x-b_1)^k f(x)\,dx. \tag{2.3}$$

前者叫 k 阶原点矩，后者叫 k 阶中心矩．当$\bar{\xi}=0$ 时；$b_k=B_k$．显然 $B_0=1$，$B_1=0$，而 $b_1=\bar{\xi}$．二阶中心矩

$$B_2=\int_{-\infty}^{\infty}(x-b_1)^2 f(x)\,dx \tag{2.4}$$

称为随机变量的方差，用 σ^2 表示，而 $\sigma=B_2^{\frac{1}{2}}$ 称为均方根差．随机变量离开平均值的脉动或偏差构成差 $\xi'=\xi-\bar{\xi}$．去掉(2.4)中的括号，我们于是得到

$$B_2=b_2-b_1^2. \tag{2.5}$$

用类似方法，由(2.3)当 $k=3,4,\cdots\cdots$，我们得到：

$$\begin{aligned}&B_3=b_3-3\,b_1b_2+2\,b_1^3,\\&B_4=b_4-4\,b_1b_3+6\,b_1^2b_2-3\,b_1^4,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$B_k=\sum_{m=0}^{k}(-1)^{k-m}\binom{k}{m}b_m b_1^{k-m}.$$

逆公式具有如下形式：

$$\begin{aligned}&b_0=1,\\&b_1=b_1,\\&b_2=B_2+b_1^2,\\&b_3=B_3+3\,b_1B_2+b_1^3,\\&b_4=B_4+4\,b_1B_3+6\,b_1^2B_2+b_1^4,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned} \tag{2.7}$$

此处和别处我们都假定积分(2.2)，(2.4)绝对收敛，即积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x)|f(x)\,dx$$

存在，其中 $\varphi(x)$是(2.2)—(2.4)中的相应函数．否则结果将没有明确的物理意义，因为当 $a\to-\infty$和 $b\to\infty$时，积分

$$\int_a^b\varphi(x)f(x)\,dx$$

的值将依赖于 a 和 b 各自趋于$-\infty$和∞的速度．

实际上，这些要求通过决定所研究随机变量的平均值和方差都能得到满足．我们所知道高阶矩的数目越多，给定量(在统计意义上)就确定得越好．在极端情况，知道了矩的无穷系列，就等于知道了完全确定随机变量的分布函数．

例：正态分布的平均值，方差和高阶矩．在(1.15) 中我们引进 $h=1/\sigma\sqrt{2}$和 $h(x-a)=y$．于是

$$\bar{\xi}=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-h^2(x-a)^2}dx=\frac{a}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}dy+\frac{1}{h\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}ye^{-y^2}dy.$$

这两个积分中的第一个(波哇松积分)等于$\sqrt{\pi}$,而第二个积分(被积函数为奇函数)等于零。因此我们得出

$$\bar{\xi}=a. \tag{2.8}$$

类似地可以证明

$$B_2=\sigma^2. \tag{2.9}$$

后两个公式说明了(1.15)中参数 a 和 σ 的意义：a 是该随机量的平均值,而 σ^2 是它的方差。

现在我们来证明,所有偶数阶的高阶中心矩可用 σ^2 表出,而所有奇数阶矩等于零。的确,对应于定义(2.3)有

$$B_k=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^k e^{-h^2(x-a)^2}dx=\frac{h^{-k}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}y^k e^{-y^2}dy.$$

因此直接得到：

$$B_{2n-1}=0 \qquad (n=1,2,\cdots), \tag{2.10}$$

$$B_{2n}=\frac{2h^{-2n}}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty}y^{2n}e^{-y^2}dy \qquad (n=1,2,\cdots). \tag{2.11}$$

经过多次的部分积分，容易证明

$$\int_{0}^{\infty}y^{2n}e^{-y^2}dy=\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\pi} \tag{2.12}$$

其中

$$(2n-1)!!=(2n-1)(2n-3)\cdots 3\times 1. \tag{2.12'}$$

关于偶数阶中心矩最后我们得到

$$B_{2n}=(2n-1)!!\sigma^{2n}. \tag{2.13}$$

让我们写出前几个偶阶矩：

$$B_4=3\sigma^4;\quad B_6=15\sigma^6;\quad B_8=105\sigma^8\cdots \tag{2.14}$$

所得结果表明,按正态规律分布的随机变量,只要知道其平均值 $\bar{\xi}$ 和方差 σ^2,就可以看成是完全确定的。

随机变量的正态分布律在概率论及其应用中具有特殊地位。当不需要非常准确时,形状近于正态曲线的许多试验曲线都可用这一规律来近似。后者的一个重要特征是其对称性,解析地体现为 $B_{2n-1}=0$。如果这样一条试验曲线的 $B_3\neq 0$,则这就直接指示出其非对称性。因为量 B_3具有随机变量的三次方的量纲,因此引进所谓非对称系数

$$S=B_3/B_2^{\frac{3}{2}} \tag{2.15}$$

以得到曲线非对称性的无量纲数字特征。

对于正态分布,$B_3=0$,因此 $S=0$。另一个表征与正态分布偏离的无量纲特征量定义为关系式