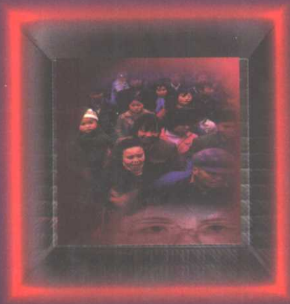
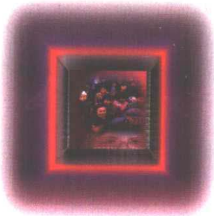


人口分布参数系统控制理论

于景元
郭宝珠 著
朱广田

华中理工大学出版社



人口分布参数系统控制理论

于景元
郭宝珠 著
朱广田

华中理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

人口分布参数系统控制理论/于景元等著
武汉:华中理工大学出版社，1999年1月
ISBN 7-5609-1862-x
Ⅰ.人…
Ⅱ.①于… ②郭… ③朱…
Ⅲ.人口分布-参数-系统理论
Ⅳ.C922

人口分布参数系统控制理论

于景元 郭宝珠 朱广田 著
责任编辑 唐元瑜 郑兆昭

*

华中理工大学出版社出版发行
(武昌喻家山 邮编:430074)
新华书店湖北发行所经销
华中理工大学出版社印刷厂印刷

*

开本:850×1168 1/32 印张:11.75 插页:2 字数:286 000
1999年1月第1版 1999年1月第1次印刷
印数:1—1 000
ISBN 7-5609-1862-x/C·42
定价:26.00元
(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

内容简介

人口控制是一项十分复杂的社会系统工程.为正确认识和解决这一问题,我国科学工作者结合我国的人口控制问题进行了一系列开创性工作,取得了许多既有理论意义又有实用价值的成果,本书介绍的就是这些研究成果的理论部分.以人口系统连续模型,即用偏微分方程描述的带有边界控制的分布参数系统模型为基础而进行的理论研究,既适用于人口发展过程,也适用于类似人口系统的其它生灭过程,如森林系统的造林与采伐,经济系统的生产与消费等.本书的具体内容包括:人口年龄递进和胎次递进的控制模型;人口发展算子;人口发展半群;人口系统稳定性;人口系统控制等.

本书适合于广大控制论、系统工程和系统科学、生态学和生物数学工作者、人口研究以及人口科学和软科学等科学工作者,以及大专院校有关专业的教师和研究生等阅读与参考.

FP4·/02

前　言

一个地区或一个国家甚至整个世界的人口是个动态系统，通常称为人口系统.虽然这个系统有其自身的特点，但它仍然要遵循系统所具有的一般规律.正是这个原因的推动，形成了以系统思想、理论、方法和技术研究人口问题的新途径和新方法，为人口科学的发展带来了新的活力.从70年代末开始，我国科学技术工作者结合我国人口控制问题的研究，在这个方向上进行了一系列开创性工作，取得了许多既有理论意义又有实际应用价值的研究成果，为政府制定人口政策和发展目标提供了科学基础.从基础、应用基础和应用研究三个层次来看，这些研究在每个层次上都有相应的研究成果.人口预测和软件、人口分析技术和软件、人口数据库、人口管理信息系统、人口决策支持系统等等，都属于应用研究；人口控制论和人口系统工作的理论，属于应用基础研究；而人口分布参数系统控制理论，即本书的内容，则属于基础研究.

人口分布参数系统理论是以人口系统连续模型，即用偏微分方程描述的带有边界控制的分布参数系统模型为基础而进行的理论研究，它与系统的具体属性关系不大.这就是说，本书所建立的理论，对有类似模型的其他系统也是适用的.人口发展过程是个生灭过程，或称作增长过程(正增长、负增长、零增长).人口系统数学模型实际上是生灭过程的一种数学描述.这类过程在现实中是广泛存在的，如经济系统的生产和消费，森林系统的造林和开采，种群的繁衍等等，本质上都是生灭过程.本书的理论和方法对这些系

统都是适用的. 特别需要指出的是,从控制理论观点来看,在一般生灭过程中,描述“生”和“灭”的两个变量都可以作为控制变量,“生”的变量出现在边界条件中,而“灭”的变量出现在状态方程右端,这就形成了有两个控制变量的边界控制分布参数系统. 在分布参数系统控制理论中,这也是很典型的一类系统. 但在人口系统中,只有“生”的变量可以作为控制变量,而“灭”的变量——死亡率仅以参数形式出现在状态方程中. 从这个意义讲,本书所讨论的问题要比人口系统广泛,实际上是增长过程的分布参数系统控制理论. 但这些研究毕竟都是从人口系统研究中发展起来的,且与之有深刻的内在联系,所以,我们仍用人口分布参数系统控制理论来概括这些内容.

全书共七章,分别讨论了人口系统控制模型、人口算子谱分析、人口算子半群和解的性质、人口系统稳定性、可控性、最优控制等. 其中,第一章还补充介绍了 Banach 空间线性算子半群的基础知识,其目的是为使读者在大学知识的基础上借助本章介绍的有关知识能阅读这本书的主要内容. 另一方面,书中有关紧算子半群及半群稳定性处理的介绍,对其他类型分布参数系统也有意义.

本书所反映的大部分研究成果是由作者及其研究集体得到的. 其初稿是为从事分布参数系统控制理论研究的研究生们准备的,目的是使他们无需查找零散的文献而能迅速进入该领域的研究. 并且,随着研究工作的扩展和深入,有必要把这些研究成果整理成书,以便使更多的关心这个领域的研究者了解这方面的进展. 但由于时间紧迫,使一些新近获得的研究成果尚未来得及收入到本书中来,这只能待将来做进一步的补充.

在本书形成过程中,研究生张升海、汤鸿志、王学军、王小沛等都参加了校订和修正等工作,他们付出了辛勤的劳动. 香港中文大学陈炜良教授给予了富有成效的合作,为本书的形成也作出了贡献. 在此,特向所有为本书的形成和出版作出直接、间接贡献的同

行们，表示深切的谢意．此外，我们还要特别感谢国家自然科学基金的支持，正是这些支持，使得我们的研究工作能够坚持下来．

本书难免有缺点和不足之处，除作者负责之外，欢迎读者批评指正．

作　者

一九九六年十月于北京

目　　录

第一章

线性算子半群

线性算子半群理论用来研究 Banach 空间 X 上的线性发展方程：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = Au(t) + f(t)\\ u(0) = u_0 \in X\end{cases}$$

其中 A 为 X 上的线性算子. 在以后讨论的线性人口发展方程是一个典型的 Banach 空间上的线性发展方程. 为了今后的应用而使本书自成体系，在本章中先简要回顾一些线性算子的抽象理论及其对抽象 Cauchy 问题的应用，其取向主要取决于本书所讨论的问题及其潜在的应用. 虽然线性算子半群的抽象理论在 Hille, Phillips 的经典著作问世以来已成为泛函分析的一个重要部分，且许多泛函分析著作，例如参考文献 2 中都有提及，但也还有另外几本典型的著作，如参考文献 3 和 4. 事实上，本书的许多材料来源于这些文献而不再特别指出，而正半群的结果则来源于参考文献 5. 在叙述最新结果时，我们将引用相应的文献资料.

1.1 抽象函数

在以后的讨论中，将经常遇到抽象函数，即定义在实直线或复数平面的某子集并在指定的Banach空间取值的函数. 本节讨论抽象函数的一些分析性质，主要的是指抽象函数的连续性、微分和积分等.

定义1.1.1 定义在(实数或复数)域 K 中某个子集 G 上并在Banach空间 X 中取值的抽象函数 $x(t)$ 称为在点 $t_0\in G$ 连续，如果对任意点列 $t_n\in G$，有

$$\lim_{t\to t_0}\| x(t_n) - x(t_0)\| = 0$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示 X 上的范数. 如果对任意 $t\in G$，$x(t)$ 都连续，则称 $x(t)$ 在 G 上连续.

与数学分析中普通数值函数一样，不难证明当 K 为实数域且 G 为 K 中有穷闭区间，或 K 为复数域且 G 为 K 中有界闭集时，$x(t)$ 在 G 上连续意味着 $x(t)$ 在 G 上一致连续.

定义1.1.2 定义在数域 K 中区域 G 上并在Banach空间 X 中取值的抽象函数 $x(t)$ 称为在 $t_0\in G$ 强可导(或强可微)，如果存在 $x'_o\in X$，使得

$$\lim_{\tau\to 0}\left\| \frac{x(t_0+\tau) - x(t_o)}{\tau} - x'_o\right\| = 0$$

x'_o 称为 $x(t)$ 在 t_0 点的强导数，表示成 $x'(t_0)=x'_o$. 如果 $x(t)$ 在 G 上每一点都强可微，则称 $x(t)$ 在 G 上强可微.

下面讨论抽象函数的Riemann积分.

定义1.1.3 设 $x(t)$ 是定义在 $[\alpha,\beta]$ 上取值于Banach空间 X 的抽象函数，对 $[\alpha,\beta]$ 的任意有限分划

$$D:\quad \alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = \beta$$

作和

$$S_D = \sum_{i=0}^{n-1} x(\xi_i)(t_{i+1} - t_i) \text{ 对任取 } \xi_i \in [t_i, t_{i+1}]$$

令 $\Delta_D = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant n-1} |t_{i+1} - t_i|$，如果存在 X 中元素 z 使得对任意分划 D，都有

$$\lim_{\Delta_D \to 0} S_D = z$$

则称 $x(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上 Riemann 可积分. z 叫作 $x(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上的 Riemann 积分，记作

$$\int_\alpha^\beta x(t) \mathrm{d}t = z$$

定理 1.1.4　定义在有限区间 $[\alpha, \beta]$ 并在 Banach 空间 X 中取值的连续函数 $x(t)$ 必在 $[\alpha, \beta]$ 上 Riemann 可积.

证明：任给 $\varepsilon > 0$，由于 $x(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续，因而一致连续. 于是存在 $\delta > 0$，使得对任意 $t_1, t_2 \in [\alpha, \beta]$，只要 $|t_1 - t_2| < \delta$ 便有 $\| x(t_1) - x(t_2) \| < \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha}$. 取分划 $D_0: \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$，$\Delta_{D_0} = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant n-1} |t_{i+1} - t_i| < \delta$，对 $[\alpha, \beta]$ 的任意两个分划 D_1, D_2，如果 D_2 的分点全是 D_1 的分点，则称 $D_1 \supset D_2$，即 D_1 是比 D_2 更细的分划. 一切有穷分划的全体 D 组成一个定向半序集. 于是当分割 D_1，$D_2 \supset D_0$ 时，对应的和有

$$\| S_{D_1} - S_{D_2} \| < \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha} (\beta - \alpha) = \varepsilon$$

从而 S_D 是基本定向列. 由于 X 是完备的，故 S_D 收敛于 X 中一元.

注：设 $x(t)$ 是定义于 $[\alpha, \beta]$ 上取值于 Banach 空间 X 的 Riemann可积的抽象函数，如果 $\| x(t) \|$ 是通常的 $[\alpha, \beta]$ 上的数值 Riemann 可积函数，则

$$\left\| \int_\alpha^\beta x(t) \mathrm{d}t \right\| \leqslant \int_\alpha^\beta \| x(t) \| \mathrm{d}t$$

事实上，只须注意将任意的和

$$\| S_D \| = \| \sum_{i=0}^{n-1} x(\xi_i)(t_{i+1} - t_i) \| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \| x(\xi_i) \| (t_{i+1} - t_i)$$

对定向列 S_D 取极限，则可得所要的结果. 又从定义不难看出，如果 $x(t)$是 Riemann 可积的抽象函数，T 是从 X 到另一 Banach 空间 Y 的线性连续算子，则 $T(x(t))$也是 Riemann 可积分的 Y 中的抽象函数，且

$$T\left(\int_\alpha^\beta x(t)\mathrm{d}t \right) = \int_\alpha^\beta T(x(t))\mathrm{d}t$$

特别地当 $Y=K$(实数或复数域)时，对于任意 $x^* \in X^*$ (X 的共轭空间)有：

$$x^*\left(\int_\alpha^\beta x(t)\mathrm{d}t \right) = \int_\alpha^\beta x^*(x(t))\mathrm{d}t$$

此式右端是通常的数值函数 $x^*(x(t))$的 Riemann 积分.

定理 1.1.5 设 $x(t)$为定义于有限区间$[\alpha,\beta]$取值于 Banach 空间 X 的抽象函数，如果 $x(t)$的导数(强导数)$x'(t)$于$[\alpha,\beta]$连续，则有下面的 Newton-Leibniz 公式：

$$\int_\alpha^\beta x'(t)\mathrm{d}t = x(\beta) - x(\alpha)$$

证明：事实上，对于任意的 $x^* \in X^*$，有

$$\begin{aligned} x^*\left(\int_\alpha^\beta x'(t)\mathrm{d}t \right) &= \int_\alpha^\beta x^*(x'(t))\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x^*(x(t))\mathrm{d}t \\ &= x^*(x(\beta)) - x^*(x(\alpha)) \\ &= x^*(x(\beta) - x(\alpha)) \end{aligned}$$

从而 $\int_\alpha^\beta x'(t)\mathrm{d}t = x(\beta) - x(\alpha)$

在一些问题中，需要比 Riemann 积分更一般的 Lebesgue 积分，为此特引入“可测”抽象函数.

定理 1.1.6 设 Ω 为实直线上的区间，B 为 Ω 内 Lebesgue 可测集全体，μ 为 Lebesgue 测度，考察测度空间(Ω,B,μ)，设 Ω 为有穷个互不相交的可测集 $\Delta_1,\cdots,\Delta_n$ 的并集. 如果定义于 Ω 取值于

Banach 空间 X 的抽象函数 $x(s)$ 在每个 Δ_i 上取常值(不同的 Δ_i，值可以不同)，那么 $x(s)$ 叫作 Ω 上的抽象阶段函数. 定义于 (Ω,B,μ) 取值于 X 的抽象函数 $x(s)$ 称为强可测的，如果存在一串定义于 (Ω,B,μ) 取值于 X 的抽象阶段函数 $x_n(s)$ 使得：

$$x(s) = \lim_{n\to\infty} x_n(s) \quad s \in \Omega \quad \text{a.e.}$$

由定义 1.1.6 可以看出，如果抽象函数 $x(s)$ 是强可测的，则 $\|x(s)\|$ 作为数值函数也是强可测的，同数值函数的情形一样可以证明，Ω 上连续函数必为强可测的.

定义 1.1.7　定义于 (Ω,B,μ) 取值 X 的强可测函数 $x(s)$ 称为依 Bochner 可积分的，如果数值函数 $\|x(s)\|$ 为 Lebesgue 可积分实值函数. Bochner 可积分抽象函数 $x(s)$ 的 Bochner 积分表示为 $\int_\Omega x(s)\mathrm{d}\mu$，其中 (Ω,B,μ) 为 Lebesgue 测度空间.

Bochner 积分定义如下：

首先考察抽象阶段函数 $x(s)$，将 Ω 分解成互不相交的可测集的并，即

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} \Delta_i, \quad \Delta_i \cap \Delta_j = \varnothing,\ i \neq j,\ i,j = 1,2,\cdots,n$$

设在 Δ_i 上 $x(s)=C_i$，定义 $x(s)$ 的 Bochner 积分为

$$\int_\Omega x(s)\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} C_i \mu(\Delta_i)$$

设 $x(s)$ 是一般的 Bochner 可积分抽象函数，则由定义 $x(s)=\lim_n x_n(s)$，$s\in\Omega$，a.e.，其中 $x_n(s)$ 为抽象阶段函数. 定义

$$y_n(s) = \begin{cases} x_n(s) & \text{如果 } \|x_n(s)\| \leqslant \|x(s)\|(1+1/n) \\ 0 & \text{如果 } \|x_n(s)\| > \|x(s)\|(1+1/n) \end{cases}$$

则 $y_n(s)$ 是抽象阶段函数，且

$$\begin{gathered} \|y_n(s)\| \leqslant \|x(s)\|(1+1/n) \\ \lim_n \|y_n(s) - x(s)\| = 0 \qquad s \in \Omega \text{ a.e.} \end{gathered} \tag{1.1-1}$$

因为 $\|x(s)\|$ Lebesgue 可积分，所以对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在

可测集 Δ,使得 $\mu(\Delta)<\infty$,且

$$\int_{\Omega-\Delta}\|x(s)\|\mathrm{d}s\leqslant\varepsilon$$

于是因为 $y_n(s)$是阶段函数

$$\left\|\int_{\Omega-\Delta}y_n(s)\mathrm{d}\mu\right\|\leqslant\int_{\Omega-\Delta}\|y_n(s)\|\mathrm{d}\mu\leqslant\int_{\Omega-\Delta}\|x(s)\|\mathrm{d}s\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

但 $x(s)-y_n(s)$强可测,从而 $\|x(s)-y_n(s)\|$ 必可测.

于是由(1.1-1),及 $\mu(\Delta)<\infty$,按 EropoB 定理取可测集 $\Delta_1\subset\Delta$使 $\mu(\Delta-\Delta_1)<\varepsilon$,且

$$\lim_{n\to\infty}\|x(s)-y_n(s)\|=0$$

于 Δ_1 上一致成立.从而对 $s\in\Delta_1$,一致地有

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}\|y_n(s)-y_m(s)\|=0$$

所以

$$\left\|\int_{\Delta_1}(y_n(s)-y_m(s))\mathrm{d}\mu\leqslant\int_{\Delta_1}\|y_n(s)-y_m(s)\|\mathrm{d}\mu\to 0\right.$$

$$n\to\infty,m\to\infty$$

由于 X 是完备的,所以存在 $y_0\in X$,使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Delta_1}y_n(s)\mathrm{d}\mu=y_0$$

但

$$\int_\Omega y_n(s)\mathrm{d}\mu=\int_{\Omega-\Delta}y_n(s)\mathrm{d}\mu+\int_{\Delta_1}y_n(s)\mathrm{d}\mu+\int_{\Delta-\Delta_1}y_n(s)\mathrm{d}\mu$$

上式第一项依范数小于 $\varepsilon(1+1/n)$.第三项按范数

$$\leqslant\int_{\Delta-\Delta_1}\|y_n(s)\|\mathrm{d}\mu\leqslant\int_{\Delta-\Delta_1}\|x(s)\|\mathrm{d}\mu(1+1/n)$$

从而由 $\|x(s)\|$ 之可积性及 $\mu(\Delta-\Delta_1)<\varepsilon$ 可知,当 ε 充分小时,若第三项范数充分小,由 ε 任意性可知

$$\lim_n\int_\Omega y_n(s)\mathrm{d}\mu\quad(强)$$

在 X 中存在. 我们把这个元定义为 $x(s)$ 的 Bochner 积分记作 $\int_\Omega x(s)\mathrm{d}\mu$，且

$$\int_\Omega x(s)\mathrm{d}\mu = \lim_n \int_\Omega y_n(s)\mathrm{d}\mu$$

注意这样定义的 Bochner 积分值与上述的阶段函数列 $y_n(s)$ 的特殊选取无关. 事实上，如果有另一串阶段函数列 $z_n(s)$，使得

$$\| z_n(s) \| \leqslant \| x(s) \| (1 + \frac{1}{n})$$

$$\lim_n \| x(s) - z_n(s) \| = 0 \qquad s \in \Omega \text{ a.e.}$$

定义阶段函数列 $\omega_n(s)$：$\omega_{2n-1}(s) = y_n(s)$，$\omega_{2n}(s) = z_n(s)$，则有

$$\| \omega_n(s) \| \leqslant \| x(s) \| (1 + \frac{1}{n})$$

$$\lim_n \| x(s) - \omega_n(s) \| = 0 \qquad s \in \Omega \text{ a.e.}$$

从而由前边所说 $\lim_n \int_\Omega \omega_n(s)\mathrm{d}\mu = \omega_0 \in X$(强)，于是$\{\int_\Omega y_n(s)\mathrm{d}\mu\}$，$\{\int_\Omega z_n(s)\mathrm{d}\mu\}$，作为$\{\int_\Omega \omega_n(s)\mathrm{d}\mu\}$ 的两个子列必然都收敛于 ω_0，即

$$\lim_n \int_\Omega y_n(s)\mathrm{d}\mu = \lim_n \int_\Omega z_n(s)\mathrm{d}u = \omega_0$$

注：由 Bochner 积分定义可以看出，如果 $x(s)$ 在 Ω 上按 Bochner 意义可积分，那么它在 Ω 的任意可测集 Δ 上也按Bochner 可积分，且

$$\| \int_\Delta x(s)\mathrm{d}\mu \| \leqslant \int_\Delta \| x(s) \| \mathrm{d}\mu$$

由 Lebesgue 积分的绝对连续性，立即得到 Bochner 积分的绝对连续性. 即对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对于任意可测集 $\Delta \in \Omega$，只要 $\mu(\Delta)<\delta$，便有 $\| \int_\Delta x(s)\mathrm{d}\mu \| \leqslant \varepsilon$.

此外积分$\int_\Delta x(s)\mathrm{d}\mu$ 有加法性质. 即若 $\Delta_i \subset \Omega, \Delta_i \cap \Delta_j = \varnothing$，$i \neq j$，$i, j = 1, 2, \cdots, n$，则

$$\int_{\Delta} x(s)\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n}\int_{\Delta_i} x(s)\mathrm{d}\mu$$

且由绝对连续性得积分 $\int_{\Delta} x(s)\mathrm{d}\mu$ 的全加法性. 即如果 $\Delta = \bigcup_{i=1}^{\infty}\Delta_i$, $\Delta_i \cap \Delta_j \neq \varnothing$, $i \neq j$, $\mu(\Delta_j) < \infty$, $i,j = 1,2,\cdots$, 则

$$\int_{\Delta} x(s)\mathrm{d}\mu = \lim_n \sum_{i=1}^{n}\int_{\Delta_i} x(s)\mathrm{d}\mu(\text{强})$$

定理 1.1.8 设 T 是 Banach 空间 X 到 Banach 空间 Y 的线性有界算子, $x(s)$ 是在 X 中取值的 Bochner 可积函数, 则对任意 $\Delta \subset \Omega$, 有

$$\int_{\Delta} Tx(s)\mathrm{d}\mu = T\int_{\Delta} x(s)\mathrm{d}\mu$$

证明: 按 Bochner 积分定义, 取在 X 中取值的一串抽象阶段函数 $y_n(s)$, 使得

$$\| y_n(s) \| \leqslant \| x(s) \| (1 + 1/n) \quad n = 1,2,\cdots$$
$$\lim_n y_n(s) = x(s)(\text{强}) \quad s \in \Omega \text{ a.e.}$$

由阶段函数的 Bochner 积分定义直接看出

$$\int_{\Delta} Ty_n(s)\mathrm{d}\mu = T\int_{\Delta} y_n(s)\mathrm{d}\mu, \quad n = 1,2,\cdots$$

又

$$\|Ty_n(s)\| \leqslant \|T\|\|y_n(s)\| \leqslant \|T\|\|x(s)\|(1 + 1/n)$$
$$\lim_n Ty_n(s) = Tx(s)(\text{强}) \quad s \in \Omega \text{ a.e.}$$

仿照前面定义 Bochner 积分时的推理, 可得

$$\lim_n \int_{\Delta} Ty_n(s)\mathrm{d}\mu = \int_{\Delta} Tx(s)\mathrm{d}\mu(\text{强})$$

由 T 的连续性

$$\lim_n T\left(\int_{\Delta} y_n(s)\mathrm{d}\mu\right) = T\int_{\Delta} x(s)\mathrm{d}s$$

由此知结论成立.

注: 特别令 $Y = K$(实数或复数域)$T = x^* \in X^*$, 则知对于每