

# 数学题解辞典

代 数

# 数学题解辞典

· 代 数 ·

上海辞书出版社

封面设计 江小铎

数 学 题 解 辞 典

代 数

唐秀颖 主编

上海辞书出版社出版

(上海陕西北路 457 号)

上海辞书出版社发行所发行 上海商务印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 38.5 字数 951,508

1985 年 11 月第 1 版 1985 年 11 月第 1 次印刷

印数 1—100,000

书号: 13187·3 定价: 6.50 元

# 数学题解辞典编辑委员会

顾 问 赵宪初

主 编 唐秀颖

副主编 鲍志新 夏明德

编辑委员 (以下按姓氏笔画为序)

陈振宣 \*郁 楨 顾鸿达 章景翰 \*曾 容

## 主要编写人

李大元 沈明哲 张福生 郁 楨 胡炯涛

插 图 朱恩源

责任编辑 唐尚斌

编 辑 杨泰俊

---

注: 有 \* 号者为本书责任编辑

## 前 言

随着科学文化事业的发展,广大中等学校数学教师热切希望有一部以题解为中心的、比较系统的、实用的工具书。鉴于建国三十余年来中学数学教学已经积累了比较丰富的实践经验,各种文献资料也提供了众多的题材,这就有可能在总结我国教学实践经验的基础上,广泛吸收各方面的精华,遵照教育部《全日制六年制重点中学数学教学大纲(草案)》的精神,编纂一部比较符合我国国情、门类比较齐全、查阅比较方便的数学题解辞典。为此,我们邀集上海市部分富有教学经验的数学教师编写了这部工具书。

本辞典分代数、三角、平面几何、立体几何、平面解析几何、初等微积分六卷。主要供中等学校数学教师教学、进修时使用,也可供数学爱好者及中等学校学生参考。

编纂本辞典时,力求贯彻下列要求:

1. 重视提高解题的分析能力。释文着重分析解题思路,揭示解题规律,使读者不仅得到简明而准确的解答,而且学会思考问题的方法。

2. 注重题材的广泛性和代表性。选题时,注意筛选收录中外各类数学题解辞典和各种参考资料中富有启发性的题目,我国高等学校历届入学考试和国内外各种数学竞赛中有代表性的试题,以及中学数学范围内传统的著名题,特别是在教学实践中有助于巩固数学概念、富于思考性的自编题。此外,还酌收少量一般教材中常见的典型题。

3. 注意题材归类, 以典型带一般. 题目编排分类清楚, 条理分明, 各类题目选好典型, 加以分析说明, 使读者举一反三, 触类旁通.

由于我们水平有限, 虽经努力, 但上述编纂要求未必都能达到, 选材和释文也可能有疏漏和不当之处, 热诚地欢迎读者批评指正.

数学题解辞典编辑委员会

1984年6月

---

## 凡 例

1. 本书分数、代数式、方程、不等式、函数、指数和对数、平面向量、数列、排列和组合、二项式定理及数学归纳法、概率、数的进位制和逻辑代数初步、数的整除性十三章，共收录各类代数题目二千二百余道。正文后附录代数简史和汉英对照初等代数名词。

2. 题目按学科知识体系的章节分类分组编排。正文前刊有按类组形式编制的详细目录。

3. 在各章开头用双线相隔的部分，是解题或证题所需要的定理、法则、公式等知识提要，按序列出，作为解题的依据。

4. 题目解答一般是一题一解，部分题目有其他较好解法的，则一题多解，分别列出。本书中已收录题目的结论，在其他题目中应用时，一般不再重复，只注明“参见第×××题”。

5. 对典型题或较复杂的题目，以[分析]的形式提示解题的关键和思路的分析；另以[说明]的形式标明有关解题规律的总结和题目意义的推广。在典型题后还配置若干相关的题目，以触类旁通之效。

6. 本书插图二百三十余幅，分别附于有关题目下面；同一题中有一幅以上者，分别注明图1、图2……。

7. 本书涉及的知识，基本上按照《全日制六年制重点中学数学教学大纲(草案)》的要求；超出大纲要求的知识(在提要中相关序号的左上角用\*号标明)以及部分难度较高的题目，仅供教师参考，不宜作为教学要求。

# 目 录

## 第一章 数

### § 1. 实数

- (1) 实数的概念(1—7).....4
- (2) 实数的绝对值(8—19) .....6
- (3) 实数的运算(20—32).....9
- (4) 实数的性质(33—49) .....14
- (5) 实数的判定(50—61) .....21

### § 2. 复数

- (1)  $i$  和  $\omega$  的运算(62—67) .....25
- (2) 复数的模与幅角(68—72) .....28
- (3) 公式  $z \cdot \bar{z} = |z|^2$  的应用(73—79) .....30
- (4) 复数方程与复数的代数运算(80—94) .....33
- (5) 复数的三角式(95—113).....38
- (6) 复数的指数式(114—119) .....48
- (7) 复数的几何意义(120—136) .....52

## 第二章 代数式

### § 1. 整式

- (1) 整式的加减法(137—138) .....65
- (2) 整式的乘法
  - 分离系数法(139—140) .....66
  - 利用公式的乘法(141—149) .....67
  - 其它(150—154) .....70
- (3) 整式的除法



带余式的除法(长除法)(155—160) .....	72
综合除法及其应用(161—165) .....	75
余数定理及其应用(166—178) .....	77
其它(179—183) .....	82
<b>(4) 多项式因式分解</b>	
提取公因式法(184—187) .....	84
公式法(188—198) .....	86
十字相乘法(199—203) .....	91
分组分解法(204—211) .....	94
配方法(212—214) .....	97
因式定理及综合除法(215—218) .....	99
待定系数法(219—222) .....	101
对称式分解法(223—228) .....	103
在复数集上的求根公式法(229—231) .....	105
<b>(5) 最高公因式与最低公倍式(232—237) .....</b>	<b>107</b>
<b>(6) 多项式恒等式的证明</b>	
一般恒等式(238—256) .....	110
对称恒等式(257—260) .....	118
条件恒等式(261—280) .....	120
<b>(7) 多项式可约性的证明</b>	
一般可约性的证明(281—286) .....	129
条件可约性的证明(287—293) .....	131
可约的充要条件(294—297) .....	134
其它(298—301) .....	136
<b>§ 2. 分式</b>	
(1) 分式的约分(302—306) .....	138
(2) 分式的加减法(307—313) .....	139
(3) 分式的乘除法及繁分式(314—321) .....	141
(4) 比及比例(322—329) .....	144
(5) 部分分式(330—340) .....	148
(6) 分式恒等式的证明	

---

一般恒等式(341—344).....	153
条件恒等式(345—362).....	155
<b>§ 3. 根式</b>	
(1) 算术根(363—367).....	165
(2) 分母有理化(368—377).....	163
(3) 根式的加减法(378—382).....	171
(4) 根式的乘除法(383—386).....	174
(5) 根式的乘方与开方(387—397).....	175
(6) 根式的化简与求值(398—418).....	180
(7) 根式恒等式的证明	
一般恒等式(419—424).....	191
条件恒等式(425—430).....	195

### 第三章 方 程

§ 1. 方程的同解(431—434).....	205
§ 2. 一元一次方程(435—438).....	208
§ 3. 一元二次方程	
(1) 求一元二次方程的解(439—448).....	210
(2) 给出方程,证明根具有某种性质(449—454).....	215
(3) 不解方程,求根的对称式的值(455—460).....	217
(4) 求作以某两数为根的二次方程(461—465).....	220
(5) 几个一元二次方程的公共根(466—470).....	222
(6) 已知根具有某性质,求系数的值或取值范围(471—485).....	225
§ 4. 高次方程	
(1) 一元三次和四次方程的解法(486—491).....	232
(2) 特殊高次方程的解法(492—509).....	240
(3) 已知一个根或根具有某性质解高次方程(510—516).....	255
(4) 给出方程,证明根具有某性质(517—528).....	260
(5) 求作满足某条件的方程(529—533).....	266
(6) 已知根具有某性质,求系数的值或取值范围(534—542).....	270

## § 5. 可化为二次或特殊高次方程的方程

- (1) 分式方程(543—555).....274
- (2) 无理方程  
     含二次根无理方程(556—574).....285  
     含 $n$ 次根( $n \geq 3$ )的无理方程(575—582).....295  
     分式无理方程(583—592).....301  
     含参数的无理方程(593—599).....310
- (3) 含有绝对值符号的方程(600—609).....318

## § 6. 行列式

- (1) 行列式的计算  
     三阶行列式的计算(610—633).....323  
     四阶行列式的计算(634—646).....340
- (2) 杂题(647—653).....350

## § 7. 线性方程组

- (1) 二元线性方程组(654—662).....354
- (2) 三元线性方程组(663—680).....358
- (3)  $n$ 元( $n \geq 4$ )线性方程组(681—693).....372

## § 8. 二次方程组和可化为二次的方程组

- (1) 二元二次方程组(694—709).....381
- (2) 二元 $m$ 次( $m \geq 3$ )方程组(710—718).....394
- (3)  $n$ 元( $n \geq 3$ ) $m$ 次( $m \geq 2$ )方程组(719—737).....400
- (4) 含有分式方程的方程组(738—747).....415
- (5) 含有无理方程的方程组(748—760).....424

## § 9. 列方程解应用题

- (1) 数字问题(761—765).....432
- (2) 年龄问题(766—768).....434
- (3) 工程问题(769—771).....435
- (4) 行程问题(772—777).....437
- (5) 时钟问题(778—779).....441

---

(6) 混合物问题(780—782).....	443
(7) 杂题(783—788).....	445

## 第四章 不 等 式

§ 1. 不等式的概念和性质(789—791) .....	453
§ 2. 解不等式	
(1) 判断几个不等式是否同解(792—795).....	455
(2) 一元一次不等式	
解一元一次不等式(796—801).....	457
解一元一次不等式组(802—805).....	458
(3) 一元二次不等式	
解一元二次不等式(806—808).....	460
解一元二次不等式组(809—812).....	461
确定二次三项式的符号(813—816).....	463
(4) 一元高次不等式(817—822).....	465
(5) 分式不等式(823—832).....	467
(6) 无理不等式(833—845).....	471
(7) 含有绝对值符号的不等式(846—852).....	476
(8) 二元不等式(853—857).....	479
(9) 不等式的应用题(858—866).....	482
§ 3. 不等式的证明	
(1) 基本不等式的证明(867—873).....	486
(2) 利用基本不等式法(874—892).....	496
(3) 配方法或因式分解法(893—897).....	507
(4) 判别式法(898—899).....	510
(5) 参数法(900—902).....	511
(6) 拆补放缩法(903—919).....	512
(7) 反证法(920—924).....	521
(8) 数学归纳法(925—929).....	523

(9) 含有绝对值符号的不等式的证明(930—940).....	526
(10) 杂题(941—958).....	531

## 第五章 函 数

### § 1. 集合与映射

(1) 集合的基本概念(959—965).....	546
(2) 集合的运算(966—978).....	550
(3) 集合杂题(979—986).....	559
(4) 映射(987—994).....	563

### § 2. 函数

(1) 函数的基本概念(995—1013) .....	569
(2) 函数的性质(1014—1032).....	582
(3) 简单的函数方程(1033—1041).....	593

### § 3. 代数函数

(1) 一次函数(1042—1045).....	598
(2) 二次函数(1046—1073).....	601
(3) 二次以上有理整函数(1074—1078).....	617
(4) 有理分函数(1079—1092).....	621
(5) 无理函数(1093—1105).....	629
(6) 杂题(1106—1122).....	635

### § 4. 条件极值(1123—1145) .....

## 第六章 指数和对数

### § 1. 指数

(1) 指数运算(1146—1152).....	663
(2) 指数证明题(1153—1159).....	666

### § 2. 对数

(1) 对数运算(1160—1172).....	669
(2) 常用对数 求真数、首数或尾数(1173—1181) .....	674

其它(1182—1192).....	679
(3) 对数证明题(1193—1204).....	684
<b>§ 3. 指数函数和对数函数</b>	
(1) 定义域(1205—1208).....	689
(2) 图象(1209—1214).....	691
(3) 单调性(1215—1220).....	694
(4) 大小比较(1221—1231).....	697
(5) 最大值与最小值	
闭区间上的最大(小)值(1232—1236).....	702
条件极值(1237—1243).....	704
其它(1244—1247).....	706
(6) 杂题(1248—1253).....	709
<b>§ 4. 指数方程和指数不等式</b>	
(1) 指数方程(1254—1267).....	712
(2) 指数方程组(1268—1276).....	718
(3) 指数不等式(1277—1285).....	722
(4) 应用题(1286—1289).....	726
<b>§ 5. 对数方程和对数不等式</b>	
(1) 对数方程	
一般对数方程(1290—1300).....	727
含参数的对数方程(1301—1304).....	731
其它(1305—1312).....	734
(2) 对数方程组(1313—1317).....	739
(3) 对数不等式	
解不等式(1318—1325).....	742
不等式证明(1326—1330).....	744
其它(1331—1336).....	746

## 第七章 平面向量

### § 1. 向量代数

(1) 向量的加减法(1337—1344).....	753
(2) 向量的共线(1345—1350).....	756
(3) 向量的分解(1351—1356).....	758
(4) 向量的数量积(1357—1370).....	762
<b>§ 2. 向量的应用</b>	
(1) 在几何问题中的应用(1371—1394).....	768
(2) 在其它问题中的应用(1395—1401).....	782

## 第八章 数 列

<b>§ 1. 数列</b>	
(1) 数列的通项(1402—1410).....	790
(2) 数列的通项与数列的和(1411—1417).....	795
<b>§ 2. 等差数列</b>	
(1) 等差数列的某项、公差及项数(1418—1437) .....	798
(2) 等差数列的和(1438—1457).....	806
(3) 等差数列的判定(1458—1464).....	818
(4) 等差数列中 $a_1, a_n, n, d, S_n$ 之间的关系(1465—1471) .....	821
<b>§ 3. 等比数列</b>	
(1) 等比数列的某项、公比及项数(1472—1479) .....	824
(2) 等比数列的和(1480—1493).....	827
(3) 等比数列的判定(1494—1500).....	834
(4) 等比数列中 $a_1, a_n, n, q, S_n$ 之间的关系(1501—1506) .....	838
(5) 无穷等比数列(1507—1516).....	840
(6) 等差数列与等比数列(1517—1530).....	846
<b>§ 4. 其它数列</b>	
(1) 相同数码型数列(1531—1533).....	852
(2) 自然数幂构成的数列(1534—1565).....	854
(3) 三角级数(1566—1571).....	870
(4) 高阶等差数列(1572—1585).....	873

(5) 调和数列(1586—1596).....	880
(6) 循环数列(1597—1617).....	885

## 第九章 排列和组合

### § 1. 有关排列数和组合数的运算和证明

(1) 含组合数的方程(1618—1621).....	901
(2) 证明等式(1622—1623).....	903
(3) 求和(1624—1636).....	904
(4) 证明不等式(1637—1641).....	911
(5) 其它(1642—1643).....	913

### § 2. 排列和组合的应用题

(1) 排列(1644—1670).....	914
(2) 组合(1671—1697).....	923
(3) 排列和组合的混合(1698—1712).....	935
(4) 元素有重复的排列(1713—1721).....	941
(5) 不尽相异元素的全排列(1722—1728).....	944
(6) 环状排列(1729—1736).....	947
(7) 元素有重复的组合(1737—1745).....	951

## 第十章 二项式定理及数学归纳法

### § 1. 正整指数二项式定理

(1) 二项展开式的通项及其应用	
求展开式的某一项(1746—1755).....	957
求某一项的系数(1756—1766).....	961
求常数项(1767—1768).....	965
求中间项(1769—1772).....	966
求有理项(1773—1775).....	967
求系数最大项(1776—1782).....	968
求二项式中未知数的值(1783—1789).....	972
(2) 二项展开式系数的性质(1790—1817).....	974



(3) 二项式定理的应用	
证明不等式(1818—1820).....	987
证明数(式)的整除性(1821—1827).....	988
近似计算(1828—1830).....	990
(4) 杂题(1831—1838).....	991
<b>§ 2. 多项式定理</b>	
(1) 多项展开式的通项及其应用(1839—1844).....	995
(2) 多项展开式的系数关系(1845—1849).....	998
<b>§ 3. 数学归纳法</b>	
(1) 证明恒等式(1850—1854) .....	1001
(2) 证明不等式(1855—1867) .....	1004
(3) 证明数(式)的整除性(1868—1870) .....	1011
(4) 证明数列的通项及前 $n$ 项的和(1871—1875) .....	1013
(5) 杂题(1876—1879) .....	1016

## 第十一章 概 率

<b>§ 1. 事件</b>	
(1) 事件的运算(1880—1882) .....	1023
(2) 事件的表示(1883—1888) .....	1024
<b>§ 2. 古典概型</b>	
(1) 不放回抽样问题(1889—1904) .....	1027
(2) 有放回抽样问题(1905—1914) .....	1033
(3) 分房问题(1915—1922) .....	1037
<b>§ 3. 几何概型(1923—1934) .....</b>	<b>1042</b>
<b>§ 4. 概率的基本性质</b>	
(1) 概率性质的证明和计算(1935—1942) .....	1048
(2) 概率加法定理(1943—1947) .....	1052
<b>§ 5. 条件概率与事件独立性</b>	
(1) 条件概率(1948—1953) .....	1057