

化工机械力学基础 第二版

高等学校教学参考书

化工机械力学基础

第二版

王仁东 主编

化学工业出版社

化学

Q050.1

1:2

版社

高等学校教学参考书

化工机械力学基础

第二版

王仁东 主编

王仁东 黄载生 张景铎 王宽福 合编

化学工业出版社

内 容 提 要

本书共九章,分别介绍了薄壁容器、厚壁容器和管板的强度理论,圆柱形容器的稳定性理论,环箍的强度和刚度,接触应力,机械振动,高速回转零件的应力和断裂力学基础知识。为从事化工机械设计、制造、运转和维修的工程技术人员在工作中解决一些力学问题提供了理论知识。

本书可作为高等院校有关专业的教学参考书,还可作为化工机械专业研究生、进修教师和相关工程技术人员的参考书。

高等学校教学参考书

化工机械力学基础

第二版

王仁东 主编

王仁东 黄载生 张景铎 王宽福 合编

责任编辑:刘 威

封面设计:任 辉

化学工业出版社出版发行

(北京和平里七区十六号楼)

化学工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所经销

开本 $787 \times 1092 \frac{1}{16}$ 印张 $13 \frac{1}{4}$ 字数325千字

1988年9月第1版 1988年9月北京第1次印刷

印 数 1—2,500

ISBN 7-5025-0144-4/TQ·106

定 价3.35元

第二版说明

王仁东教授生前为“化工机械力学基础”一书的再版工作作了大量的准备工作，收集了有关资料、论文，列出了再版编写提纲。在再版中准备增写“厚壁容器强度理论”、“管板的强度理论”和“断裂力学简介”三章；将原书第一章“容器强度理论”改为“薄壁容器强度理论”，在机械振动“一章中增加”计算临界转速的累试法”一节，对原书“大型回转窑扭转振动计算的概念”一节中增补了计算实例，并删去了“挠性轴承的作用”一节，在高速回转零件的应力”一章中增加“叶轮回转应力的近似解法”一节，使全书由原来六章四十二节，增加为九章五十九节。但正当王教授动手改写时，因积劳成疾，突然于八三年二月二十八日病故，未能成稿。

在王仁东教授逝世后，他在浙江大学化工机械教研室的学生和同事承担了本书的再版准备工作，仍按原提纲进行编写。增补中第二章由黄载生副教授执笔，第九章的2、3、6节由张景铎副教授执笔，第四章、第九章的1、4、5节，第七章的6、9二节和第八章的第9节均由王宽福讲师执笔编写。汪希萱教授、薛继良教授和朱国辉教授分别对增补章节作了审阅，提出了许多宝贵的意见，谨在此一并表示感谢。

第一版序言

这是一本化工机械专业适用的教学参考书，是根据1963年化工机械专业教材编审小组的决议编写的。

本书内容是有关化工机械设计，制造，运转和修理工作中所常碰到的一些力学问题的基本理论知识。共分六章。第一章容器强度理论，探讨了薄壁容器的边缘应力问题。用不多的篇幅，由浅入深地推导了平板，球形和椭圆形端盖以及圆锥形筒节和圆柱形容器相连接部分的边缘应力计算公式。边缘应力的概念和计算方法是容器设计和制造修理工作中常需考虑到和用到的。第二章详细说明了设计承受外压的容器时，必需用到的几个重要公式的来源和其推导过程。第三章分析了回转圆筒所用环箍的强度和刚度问题。着重分析了环箍的安装形式对应力的影响，说明了安装间隙过大的危害性。第四章先介绍弹性力学的简单基础，通过梁弯曲问题的例子，说明了弹性力学应力函数解法的性质，然后以蒲新尼斯克解为基础，推导出两圆柱体相接触时所产生的形变和应力基本公式。这一章具有两个意义：（1）通过对接触应力实质的了解，掌握接触应力和圆柱体半径间关系的概念，认识到专业书本中所介绍计算方法的局限性，并能在实际工作中灵活应用，正确解决接触应力问题；（2）通过解决圆柱体接触应力的问题，对弹性力学方法获得一定的认识，为进一步研究和应用弹性力学方法，创造有利的条件。第五章机械振动，以化工机械专业范围内常碰到的，例如离心机、鼓风机、屋架、大型回转窑等的振动问题为对象，比较全面地讨论了机械振动问题。除具有一个到几个集中荷重的轴的临界转速问题外，还讨论了分布荷重的轴的临界转速，以及扭转振动临界转速。这样较全面和较深入地掌握了机械振动分析的理论基础，对于解决生产中的实际问题，创造了较为良好的条件。最后一章高速回转零件的应力，也以离心机，鼓风机，离心泵等的转鼓或转子为对象，并介绍了分析结构型式复杂的转子回转应力的数字积分法。

当然，本书所讨论的问题，仅从力学角度上来考虑，而且限于弹性范围内。在解决生产问题的具体工作中，还需从其他方面，如工艺要求、材料的性质、加工方法、经济性等等作出综合的考虑。例如用韧性良好的材料制成的容器，局部应力超过弹性极限并不意味着容器的破坏；由于局部的塑性流动，会造成应力状态重新分配，而仍能安全地工作。有些化工机械范围内的强度问题，在力学方面尚未有很好的解决方法（例如管板的强度问题），因而不能在本书中介绍。

本书对环箍松套在鞍座上的分析、方法和结果同一般文献并不相同；推导接触应力和形变公式的方法，也和一般弹性力学教本不一样。发现外压容器的米赛斯公式并不是理论式，而是近似公式，而且有可能写出更接近于理论值的其他形式的近似公式。这些都是编者挣脱书本的束缚，提出自己见解的尝试。但限于编者的水平，书中恐有不少错误或欠妥之处，希望读者随时提出批评指正。

本书承华东化工学院陈维新教授审阅，提出不少宝贵意见，在此表示感谢。

王仁东

1965年8月12日

目 录

第一章 薄壁容器强度理论	1
第1节 引言.....	1
第2节 圆柱形容器的有力矩理论.....	1
第3节 一般轴对称容器的有力矩理论.....	5
第4节 球形端盖的边缘问题.....	10
第5节 椭圆形端盖的边缘问题.....	12
第6节 圆锥形容器的边缘问题.....	14
第7节 圆柱形容器加环箍的作用.....	19
第二章 厚壁容器的强度理论	21
第1节 引言.....	21
第2节 厚壁筒的弹性理论.....	22
第3节 厚壁容器的极限强度.....	27
第4节 多层容器.....	34
第5节 绕带绕丝容器.....	37
第6节 自增强容器.....	54
第三章 圆柱形容器的稳定性理论	62
第1节 引言.....	62
第2节 长圆筒在外压下的稳定问题(勃莱斯公式).....	63
第3节 容器壁复杂形变的分析.....	66
第4节 复杂形变容器壁的平衡方程式.....	71
第5节 受外压的容器稳定性分析.....	75
第6节 同时受周围和轴向外压的容器稳定性分析.....	82
第四章 管板的强度理论	84
第1节 引言.....	84
第2节 贝塞尔函数的应用.....	85
第3节 米勒分析法.....	88
第4节 计算例题.....	93
第五章 环箍的强度和刚度	96
第1节 引言.....	96
第2节 环箍被固定在圆筒壁上时的弯曲应力.....	97
第3节 环箍松套在鞍座上, 没有间隙的情况.....	100
第4节 环箍松套在鞍座上, 有间隙存在的情况.....	105
第5节 环箍的刚度.....	107
第6节 环箍的温度应力.....	109

第六章 接触应力	113
第1节 引言	113
第2节 弹性理论平面问题的基本方程式	115
第3节 梁弯曲的弹性理论平面问题解法	118
第4节 蒲新尼斯克解案	119
第5节 两圆柱体相接触问题的形变分析	120
第6节 两圆柱体相接触的应力分析	123
第七章 机械振动	127
第1节 引言	127
第2节 单转子轴的临界转速	129
第3节 多转子轴的临界转速	132
第4节 窄转子的陀螺效应	135
第5节 宽转子的陀螺效应	138
第6节 计算临界转速的累试法	143
第7节 均匀轴的临界转速	148
第8节 扭转振动	150
第9节 大型回转窑扭转振动计算实例	154
第八章 高速回转零件的应力	163
第1节 引言	163
第2节 回转容器中的流体表面	164
第3节 高速回转圆锥形容器的应力和应变	165
第4节 物料离心力所造成的容器壁的应力和应变	167
第5节 计算例题	170
第6节 高速回转薄圆盘的应力和应变	175
第7节 不匀厚度的高速回转盘	178
第8节 具有任意轮廓的不匀厚度回转盘的近似解法	180
第9节 叶轮回转应力的近似解法	183
第九章 断裂力学简介	187
第1节 引言	187
第2节 复变函数解弹性力学平面问题	188
第3节 格烈菲兹问题	192
第4节 线弹性断裂力学	196
第5节 超屈服断裂力学	198
第6节 疲劳裂纹的扩展	201
附录 贝塞尔函数简表	205
本书常用工程单位和国际单位制 (SI) 单位换算表	206

第一章 薄壁容器强度理论

第1节 引言

化学工业中应用很多薄壁容器。计算一般薄壁容器在内压力作用下的强度时，不仅可忽略在壁厚方向中应力的变化，而且往往可忽略弯矩和剪力的影响。此时仅仅计算器壁中的张应力；因为不计算弯矩，故这样的理论称为无力矩理论。

在内压力的作用下，如容器壁变形的发展并不受到强烈的约束，那么无力矩理论的计算结果可说是足够准确的。反之，如器壁的变形受到强烈的约束，那么会产生较强烈的弯矩和弯应力，弯应力可能超过无力矩理论计算所得的薄膜应力。此时就有必要在计算薄膜应力的同时来计算弯矩和弯应力。分析容器强度的理论，如同时计算薄膜应力和弯矩及弯应力，就称为有力矩理论。

例如图 1-1 所示容器的中间部分 1，在内压力作用下，容器的母线仍近似地保持为直线，所以这部分并不产生弯曲变形，因而也没有显著的弯应力。这部分容器是能适用无力矩理论计算方法的。

在图 1-1 容器的底部 2，由于平板底盖在半径方向中有很大的刚度，故在内压力的作用下，平板底盖的半径增值可忽略的小，因而对容器壁的变形造成强烈的约束。变形后这部分器壁母线显然是两条平行线间的过渡曲线，这样清楚地说明了曲率的变化以及弯矩和弯应力的存在。

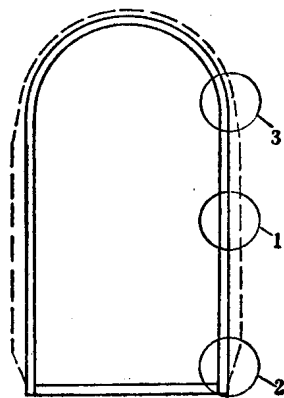


图 1-1

图 1-1 容器的顶盖是半球形的。半球形端盖在内压力作用下也产生变形，但是半球形端盖的变形小于圆柱形部分，所以二者的接界部分（图中 3）也造成一种约束。不过半球形和圆柱形二者变形差别不很大，所以此项边缘应力并不严重。

对有力矩理论的研究，可使设计者了解容器较复杂的应力情况。例如对合理设计端盖或环箍等加强措施时，就必须运用有力矩理论。

下面我们先分析最简单的情况，即圆柱形容器的有力矩理论，然后研究一般轴对称容器的有力矩理论。

第2节 圆柱形容器的有力矩理论

我们假设在内压力作用下，容器各部分都没有超过材料的弹性极限。于是我们可分别计算薄膜应力和弯曲应力，然后再把它们总加起来。

如圆柱形容器的半径是 R ，壁厚是 s ，器壁的径向应力仍可采用无力矩理论的近似数

值, 即:

$$\sigma_r = \frac{pR}{2s} \quad (1-1)$$

式中 σ_r 是径向应力, p 是内压力。设在内压力作用下, 容器的半径增大为 $R+u$; 半径增量 u 显然是轴向座标 x 的函数 (图1-2)。器壁的周向应变是:

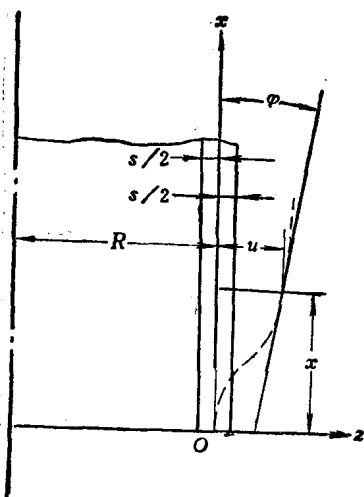


图 1-2

$$\varepsilon_\theta = \frac{2\pi(R+u) - 2\pi R}{2\pi R} = \frac{u}{R} \quad (1-2)$$

由广义虎克定律 (忽略径向应力 σ_r):

$$\varepsilon_\theta = \frac{\sigma_\theta}{E} - \mu \frac{\sigma_r}{E} \quad (1-3)$$

得出周向应力的方程式:

$$\sigma_\theta = E\varepsilon_\theta + \mu\sigma_r \quad (1-4)$$

以 (1-1) 和 (1-2) 式代入 (1-4) 式而得:

$$\sigma_\theta = \frac{E}{R}u + \mu \frac{pR}{2s} \quad (1-5)$$

器壁的转动角显然可表示为:

$$\Phi \approx \tan \phi = \frac{du}{dx} \quad (1-6)$$

面变形后, 器壁母线的曲率是:

$$\kappa_1 = \frac{d^2u}{dx^2} \quad (1-7)$$

器壁周线的曲率变化是:

$$\kappa_2 = \frac{1}{R+u} - \frac{1}{R} \approx -\frac{u}{R^2} \quad (1-8)$$

因为 R 远远比 u 大, 所以 κ_2 的影响可以忽略不计。如此即可写下弯曲应力的公式如下:

$$(\sigma_x)_* = -\frac{Ez}{1-\mu^2} \kappa_1 = \frac{-Ez}{1-\mu^2} \frac{d^2u}{dx^2} \quad (1-9)$$

$$(\sigma_\theta)_* = -\frac{Ez}{1-\mu^2} \mu \kappa_1 = -\frac{\mu Ez}{1-\mu^2} \frac{d^2u}{dx^2} \quad (1-10)$$

在公式 (1-9) 中加负号, 是为了符合材料力学的习惯, 把拉伸应力写成正的, 压缩应力写成负的。由图1-3可看出: 在器壁母线的外凹部分, $\frac{d^2u}{dx^2} > 0$, 这部分 x 为正值, 应力是负的; 在器壁母线的外凸部分, $\frac{d^2u}{dx^2} < 0$, 这部分 x 为正值, 应力是正的; 因此

(1-9) 式加上负号, 可和习惯相统一。

应用由弯曲应力计算弯矩的公式：

$$M_x = \int_{-s/2}^{s/2} (\sigma_x)_x x dx = -D \frac{d^2 u}{dx^2} \quad (1-11)$$

$$M_\theta = \int_{-s/2}^{s/2} (\sigma_\theta)_x x dx = -\mu D \frac{d^2 u}{dx^2} \quad (1-12)$$

式中：

$$D = \frac{Es^3}{12(1-\mu^2)} \quad (1-13)$$

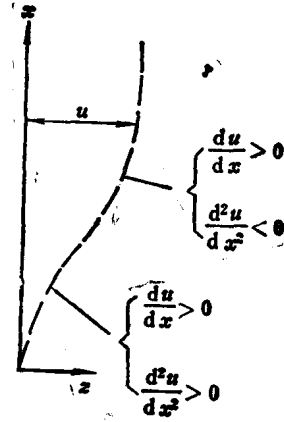


图 1-3

下一步必须研究平衡条件。图1-4示器壁微块 $abcde fgh$ 。截面 $abcd$ 和 $efgh$ 上作用着周向应力 σ_θ 和弯矩 M_θ ，面积是 sdx ；截面 $cdef$ 和 $ghab$ 上作用着径向应力 σ_r ，剪力 Q 和弯矩 M_x ，面积是 $sRd\theta$ ；曲面 $adeh$ 的面积是 $Rd\theta dx$ ，曲面上作用着均匀内压力 p （图中未画出）。 M 和 Q 是单位线长的弯矩和剪力。

研察半径方向（ z 方向）中力的平衡条件（参阅图1-5）。

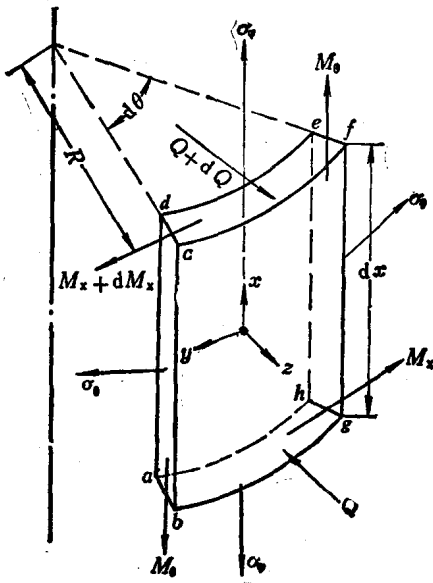


图 1-4

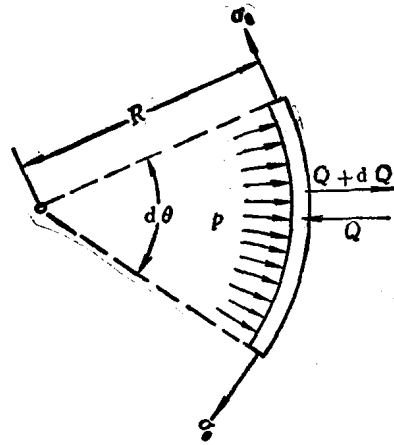


图 1-5

$$(Rd\theta)d\theta + pRd\theta dx - \sigma_r s dx d\theta = 0$$

得出：

$$\frac{dQ}{dx} = -p + \frac{\sigma_r s}{R} \quad (1-14)$$

造成母线弯曲的力矩（绕 y 轴转动的力矩）的平衡条件：

$$(Rd\theta)dM_x - QRd\theta dx = 0$$

得出:

$$\frac{dM_x}{dx} = Q \quad (1-15)$$

将 (1-15) 式代入 (1-14) 式中得到:

$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} = -p + \frac{\sigma_{\theta s}}{R} \quad (1-16)$$

以 (1-5) 和 (1-11) 式代入 (1-16) 式, 经整理而得到微分方程式:

$$\frac{d^4 u}{dx^4} + 4k^4 u = \frac{p}{D} \left(1 - \frac{1}{2} \mu \right) \quad (1-17)$$

式中:

$$k^4 = \frac{sE}{4R^2 D} = \frac{3(1-\mu^2)}{R^2 s^2} \quad (1-18)$$

非齐次线性常微分方程式 (1-17) 的解是:

$$u = A_1 e^{-kx} \sin(kx + \beta_1) + A_2 e^{kx} \sin(kx + \beta_2) + \frac{pR^2}{Es} \left(1 - \frac{1}{2} \mu \right) \quad (1-19)$$

A_1 、 A_2 、 β_1 和 β_2 是积分常数。

如果容器壁的变形发展不受约束, 半径增量应是:

$$u = \frac{pR^2}{Es} \left(1 - \frac{1}{2} \mu \right) \quad (1-20)$$

以 (1-20) 式和 (1-19) 式相比后, 可知 (1-19) 式的前两项, 是由于变形受到约束而产生的应力。在 x 有大数值时 (容器很长), 这些应力不可能很大。因而可推断 A_2 可能是零。于是 u 的公式为:

$$u = A_1 e^{-kx} \sin(kx + \beta_1) + \frac{pR^2}{Es} \left(1 - \frac{1}{2} \mu \right) \quad (1-21)$$

代入 (1-6) 式而得器壁转角公式:

$$\Phi = \frac{du}{dx} = A_1 k e^{-kx} [\cos(kx + \beta_1) - \sin(kx + \beta_1)] \quad (1-22)$$

代入 (1-11) 式得作用于母线的弯矩公式:

$$M_x = -D \frac{d^2 u}{dx^2} = 2A_1 D k^2 e^{-kx} \cos(kx + \beta_1) \quad (1-23)$$

由 (1-15) 式得:

$$Q = \frac{dM_x}{dx} = -2A_1 D k^3 e^{-kx} [\sin(kx + \beta_1) + \cos(kx + \beta_1)] \quad (1-24)$$

在 (1-21) — (1-24) 诸公式中, 代入 $x = 0$ 时, 获得在座标原点上的位移、转角、弯矩和剪力诸公式, 即:

$$u_0 = A_1 \sin \beta_1 + \frac{pR^2}{Es} \left(1 - \frac{1}{2} \mu \right) \quad (1-25)$$

$$\Phi_0 = A_1 k (\cos \beta_1 - \sin \beta_1) \quad (1-26)$$

$$M_{x0} = 2A_1 D k^2 \cos \beta_1 \quad (1-27)$$

$$Q_0 = -2A_1 D k^3 (\sin \beta_1 + \cos \beta_1) \quad (1-28)$$

在 (1-25) — (1-28) 诸公式中, 消去 $\sin \beta_1$ 和 $\cos \beta_1$, 可以座标原点上的弯矩 M_{x0} 和剪力

Q_0 来表示位移和转角如下:

$$u_0 = \frac{\phi R^2}{Es} \left(1 - \frac{1}{2} \mu \right) - \frac{Q_0}{2Dk^3} - \frac{M_{x0}}{2Dk^3} \quad (1-29)$$

$$\Phi_0 = \frac{M_{x0}}{Dk} + \frac{Q_0}{2Dk^2} \quad (1-30)$$

(1-29) 和 (1-30) 两个公式是分析圆柱形容器和端盖交界处边缘应力的基础公式。例如端盖如果是平板 (图1-1, 部分3), 那么 $u_0 = 0$, $\Phi_0 = 0$ 。此时由 (1-29) 和 (1-30) 式可得出:

$$M_{x0} = - \frac{(2-\mu) k^2 D \phi R^2}{Es} = - \frac{2-\mu}{4} \frac{\phi R s}{[3(1-\mu^2)]^{1/2}} \quad (1-31)$$

$$Q_0 = \frac{2(2-\mu) k^3 D \phi R^2}{Es} = \left(1 - \frac{\mu}{2} \right) \frac{\phi \sqrt{Rs}}{[3(1-\mu^2)]^{1/4}} \quad (1-32)$$

材料为碳素钢时, $\mu = 0.3$, 此时:

$$M_{x0} = -0.257 \phi R s, \quad Q_0 = 0.66 \phi \sqrt{Rs}$$

相应的弯应力是:

$$\sigma_s = \pm \frac{6M_{x0}}{s^2} = \pm 1.54 \frac{\phi R}{s}$$

相应的剪应力是:

$$\tau = \frac{Q_0}{s} = 0.66 \phi \sqrt{\frac{R}{s}}$$

在内压力的作用下, 圆柱形容器壁的变形发展受到平板端盖的约束, 于是产生的弯曲应力已超过周向拉应力 $\frac{\phi R}{s}$ 。弯曲应力和经向拉应力的最大合成应力是 $2.04 \frac{\phi R}{s}$, 比不受约束部分的最大张应力大一倍。因此平板端盖和其他使圆柱形容器壁的变形发展受到强烈约束的端盖结构, 只会使应力状态恶化, 显然都是不合理的。

关于一般轴对称容器的有力矩理论, 基本原理和上述圆柱形容器相同, 不过几何关系略为复杂, 将在下节详加探讨。

第3节 一般轴对称容器的有力矩理论

对于一般的轴对称容器, 我们取其器壁断面上一个弧线段 PQ , 如图1-6所示, 分析其形变关系。根据微分几何的知识, 轴对称容器有两个主曲率半径, 可于图1-6中看出。经向曲率半径是 CP , 记为 r_1 。纬向曲率半径是 OP (纬线的曲率中心一定在对称轴上), 记为 r_2 。 CP 线和水平线的夹角为 φ , PQ 弧的夹角为 $d\varphi$ 。

在内压力的作用下, 容器变形, 而弧线 PQ 转移到 $P'Q'$ 的位置如图1-7所示。 $P'Q'$ 弧的曲率中心在 C' 点。此时 P 点到 P' 点的位移可分解为周向位移 v 和径向位移 u 。

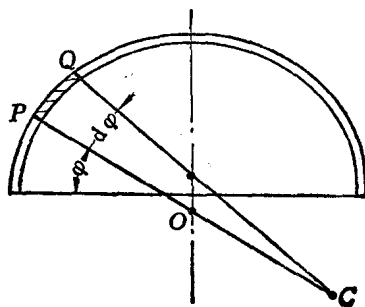


图 1-6

又在图1-7中, 记变形后经向的曲率半径: $C'P' = r'_1$, 而 $r'_1 = \frac{\widehat{P'Q'}}{\angle P'C'Q'}$

但是: $\angle P'C'Q' = \angle P'C'Q + \angle QC'Q' = \angle PC'Q' - \angle PC'P' + \angle QC'Q'$
 $\approx \angle PCQ - \angle PC'P' + \angle QC'Q'$

$$= d\varphi - \Phi + \left(\Phi + \frac{d\Phi}{d\varphi} d\varphi \right) = \left(1 + \frac{d\Phi}{d\varphi} \right) d\varphi$$

$$\frac{1}{r'_1} = \frac{\angle P'C'Q'}{\widehat{P'Q'}} = \frac{\left(1 + \frac{d\Phi}{d\varphi} \right) d\varphi}{\left(r_1 + u + \frac{dv}{d\varphi} \right) d\varphi} \approx \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1} \frac{d\Phi}{d\varphi}$$

于是可算出经向的曲率变化为:

$$x_1 = \frac{1}{r'_1} - \frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_1} \frac{d\Phi}{d\varphi} \quad (1-36)$$

又在图 1-7 中, 记变形后的纬向曲率半径为: $P'O' = r'_2$,

$$r_2 = OP = \frac{\rho}{\cos\varphi}, \quad r'_2 = O'P' = \frac{\rho + \Delta\rho}{\cos(\varphi + \Phi)}$$

故纬向曲率半径的变化是:

$$x_2 = \frac{1}{r'_2} - \frac{1}{r_2} = \frac{\cos(\varphi + \Phi)}{\rho + \Delta\rho} - \frac{\cos\varphi}{\rho}$$

$$= \frac{\cos\varphi - \Phi \sin\varphi}{\rho + \Delta\rho} - \frac{\cos\varphi}{\rho} \approx \frac{-\Phi \sin\varphi}{\rho} = \frac{-\Phi}{r_2} \operatorname{tg}\varphi \quad (1-37)$$

由曲率变化的分析结果, 即可写出弯曲应力的公式如下:

$$(\sigma_\varphi)_* = \frac{Ez}{1-\mu^2} (x_1 + \mu x_2) = \frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{1}{r_1} \frac{d\Phi}{d\varphi} - \mu \frac{\Phi}{r_2} \operatorname{tg}\varphi \right) \quad (1-38)$$

$$(\sigma_\theta)_* = \frac{Ez}{1-\mu^2} (x_2 + \mu x_1) = \frac{-Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\Phi}{r_2} \operatorname{tg}\varphi - \frac{\mu}{r_1} \frac{d\Phi}{d\varphi} \right) \quad (1-39)$$

于是即可推出经向方向和纬向方向的弯矩公式如下:

$$M_\varphi = \int_{-z/2}^{z/2} (\sigma_\varphi)_* z dz = D \left(\frac{1}{r_1} \frac{d\Phi}{d\varphi} - \mu \frac{\Phi}{r_2} \operatorname{tg}\varphi \right) \quad (1-40)$$

$$M_\theta = \int_{-z/2}^{z/2} (\sigma_\theta)_* z dz = -D \left(\frac{\Phi}{r_2} \operatorname{tg}\varphi - \frac{\mu}{r_1} \frac{d\Phi}{d\varphi} \right) \quad (1-41)$$

下一步象我们在分析圆柱形容器的情况时所做的一样, 必须进而分析平衡条件。取容器微块 $abcdefgh$ 如图1-9所示。此微块的曲面 $cdeh$ 属于容器的外壁, 曲面 $abgf$ 属于容器的内壁。 $abcd$ 和 $efgh$ 各属于通过容器对称轴 $x-x$ 的垂直平面; 这两个垂直平面间的夹角为 $d\theta$ 。 $adef$ 和 $bchg$ 各通过经向曲率中心 c , 而垂直于经向的平面, 它们间的夹角为 $d\varphi$ 。半径 cb 就是经向曲率半径 r_1 , 它和水平面间的夹角为 φ 。

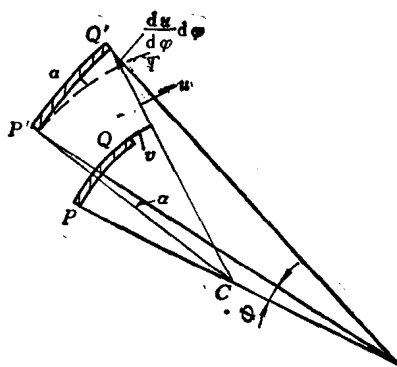


图 1-8

平面 $abcd$ 和 $efgh$ 的面积各是 $sr_1d\varphi$ (壁厚为 s)。平面 $adef$ 和 $bchg$ 的面积各是 $sr_2\cos\varphi d\theta$ 。在 $adef$ 和 $bchg$ 面上各作用着经向拉应力 σ_φ ，经向弯矩 M_φ 和横剪力 Q 。在 $abcd$ 和 $efgh$ 面上则作用着纬向拉应力 σ_θ 和纬向弯矩 M_θ 。在曲面 $abgf$ 上则作用着内压力 p 。曲面 $abgf$ 的面积为 $(r_1d\varphi)(r_2\cos\varphi d\theta)$ 。

先研究垂直于经向方向中力的平衡条件，有关力的投影如图1-10所示。

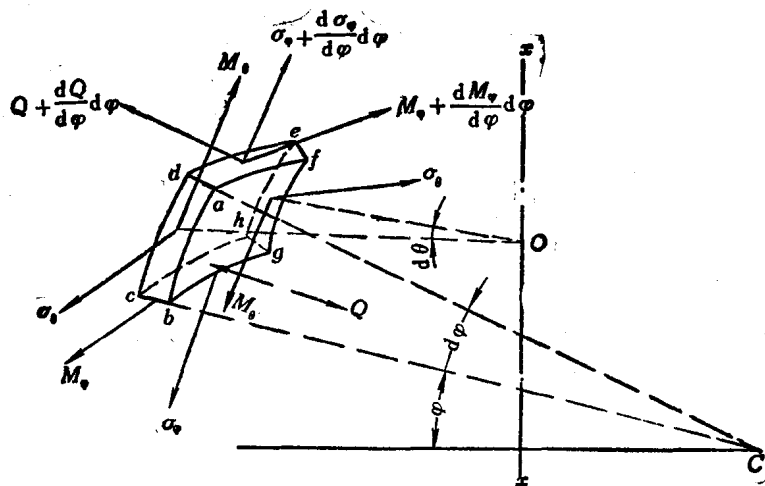


图 1-9

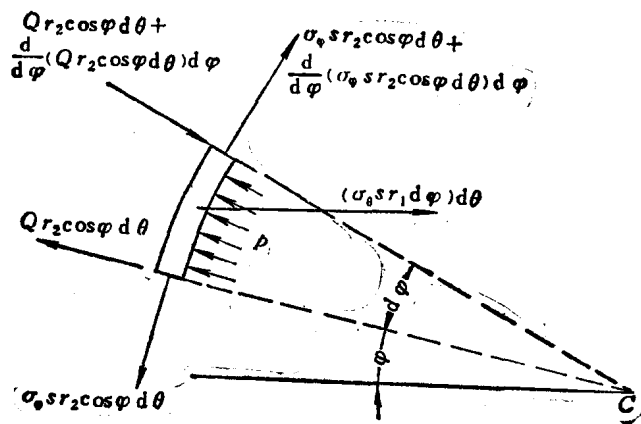


图 1-10

平衡条件被归结为下列方程式：

$$\frac{d(Qr_2\cos\varphi)}{d\varphi} + \sigma_\varphi sr_2\cos\varphi + \sigma_\theta sr_1\cos\varphi = pr_1r_2\cos\varphi$$

此方程式中采用新的变数： $U=r_2Q$ ，并作简化后得到方程式：

$$\sigma_\theta = \frac{1}{sr_1} \left(U \operatorname{tg}\varphi - \frac{dU}{d\varphi} \right) + \frac{pr_2}{s} - \sigma_\varphi \frac{r_2}{r_1} \quad (1-42)$$

研察力矩的平衡条件时,把力矩投影于俯视图(垂直于对称轴 $x-x$ 的平面中)如图1-11所示。

平衡条件归结为方程式:

$$\frac{d}{d\varphi}(M_{\varphi}r_2\cos\varphi) + Qr_1r_2\cos\varphi + M_{\theta}r_1\sin\varphi = 0$$

采用新的参数 U , 则此方程式成为:

$$\frac{d}{d\varphi}(M_{\varphi}r_2\cos\varphi) + Ur_1\cos\varphi + M_{\theta}r_1\sin\varphi = 0 \quad (1-43)$$

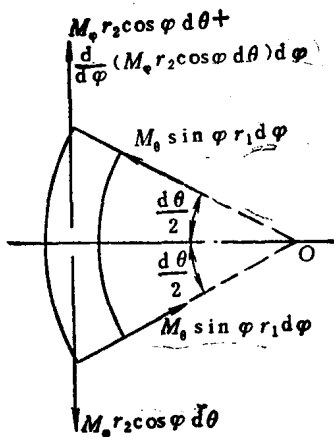


图 1-11

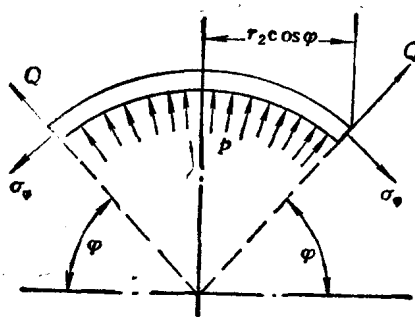


图 1-12

最后研察顶部壳体的平衡条件如图1-12。

$$2\pi r_2\cos\varphi(s\sigma_{\varphi}\cos\varphi - Q\sin\varphi) = \pi(r_2\cos\varphi)^2 p$$

经过简化后得到方程式:

$$\sigma_{\varphi} = \frac{pr_2}{2s} + \frac{Q}{s} \operatorname{tg}\varphi = \frac{pr_2}{2s} + \frac{U}{r_2s} \operatorname{tg}\varphi \quad (1-44)$$

根据 (1-42)、(1-44) 两式和虎克定律, 可写下以参数 U 表示的 ε_{φ} 和 ε_{θ} 公式:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\varphi} &= \frac{1}{E} (\sigma_{\varphi} - \mu\sigma_{\theta}) = \frac{1}{Es} \left[\left(\frac{pr_2}{2} + \frac{U}{r_2} \operatorname{tg}\varphi \right) \left(1 + \mu \frac{r_2}{r_1} \right) \right. \\ &\quad \left. - \mu \left(\frac{U}{r_1} \operatorname{tg}\varphi - \frac{1}{r_1} \frac{dU}{d\varphi} + pr_2 \right) \right] = \frac{1}{Es} \left[\frac{\mu}{r_1} \frac{dU}{d\varphi} + \frac{U}{r_2} \operatorname{tg}\varphi \right. \\ &\quad \left. + p \left(\frac{r_2}{2} + \mu \frac{r_2^2}{2r_1} - \mu r_2 \right) \right] \end{aligned} \quad (1-45)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\theta} &= \frac{1}{E} (\sigma_{\theta} - \mu\sigma_{\varphi}) = \frac{1}{Es} \left[\left(\frac{U}{r_1} \operatorname{tg}\varphi - \frac{1}{r_1} \frac{dU}{d\varphi} + pr_2 \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{r_2}{r_1} + \mu \right) \left(\frac{pr_2}{2} + \frac{U}{r_2} \operatorname{tg}\varphi \right) \right] = \frac{1}{Es} \left[-\frac{1}{r_1} \frac{dU}{d\varphi} - \frac{\mu}{r_2} U \operatorname{tg}\varphi \right. \\ &\quad \left. + p \left(r_2 - \frac{r_2^2}{2r_1} - \mu \frac{r_2}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (1-46)$$

又在 (1-33)、(1-34)、(1-35) 式所组成的方程式系中, 消去 v 、 u 和它们的导数, 即在 (1-34) 式中令 $\varepsilon_\theta r_2$ 对 φ 求导数, 再将该三式代入, 可得出 ε_φ 、 ε_θ 和 Φ 间的相互关系如下:

$$\frac{d}{d\varphi} (r_2 \varepsilon_\theta) = (r_2 \varepsilon_\theta - r_1 \varepsilon_\varphi) \operatorname{tg} \varphi - r_1 \Phi \quad (1-47)$$

因为这个方程式表示了 ε_θ 、 ε_φ 和 Φ 间几何上的协调关系, 故有时称为“协调方程式”。把 (1-45) 和 (1-46) 式代入 (1-47) 式并经简化整理后, 获得如下的微分方程式:

$$\begin{aligned} Esr_1 \Phi = & \frac{r_2}{r_1} \frac{d^2 U}{d\varphi^2} + \left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{r_2}{r_1} \right) - \frac{r_2}{r_1} \operatorname{tg} \varphi \right] \frac{dU}{d\varphi} + \left(\mu - \frac{r_1}{r_2} \operatorname{tg}^2 \varphi \right) U - \\ & - p \operatorname{tg} \varphi \left[\frac{1-2\mu}{2} r_1 r_2 - (1-\mu) r_2^2 + \frac{r_1^2}{2r_1} \right] + p \frac{d}{d\varphi} \left[\frac{r_2^3}{2r_1} + \left(1 - \frac{\mu}{2} \right) r_1^2 \right] \end{aligned} \quad (1-48)$$

又把 (1-40) 和 (1-41) 式代入 (1-43) 式, 并作简化整理后, 获得微分方程式如下:

$$-\frac{r_1 U}{D} = \frac{r_2}{r_1} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + \left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{r_2}{r_1} \right) - \frac{r_2}{r_1} \operatorname{tg} \varphi \right] \frac{d\Phi}{d\varphi} - \left(\mu + \frac{r_1}{r_2} \operatorname{tg}^2 \varphi \right) \Phi \quad (1-49)$$

最后所得 (1-48) 和 (1-49) 两式是一般轴对称容器有力矩理论的微分方程式系。因为形式较为复杂, 由此求精确解是困难的。但对于球形端盖、椭圆形端盖和圆锥形壳体的边缘问题, 则不难求得适用的近似解。

第 4 节 球形端盖的边缘问题

对于球形端盖, $r_1 = r_2 = R$, 于是方程式 (1-48) 和 (1-49) 可简化为:

$$EsR\Phi = \frac{d^2 U}{d\varphi^2} - \operatorname{tg} \varphi \frac{dU}{d\varphi} + (\mu - \operatorname{tg}^2 \varphi) U \quad (1-50)$$

$$-\frac{R}{D} U = \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} - \operatorname{tg} \varphi \frac{d\Phi}{d\varphi} - (\mu + \operatorname{tg}^2 \varphi) \Phi \quad (1-51)$$

由图1-6可看出, 在端盖问题中, φ 角接近于 0, 器壁如足够薄, 参数 U 和 Φ 跟着离开边缘的距离而很快消失。所以方程式中的 $\operatorname{tg} \varphi$ 项可以认为是零。此外由于 U 和 Φ 是微小值, 所以可以认为它们比起它们的导数来是远远地小。就是说: 可认为:

$$U \ll \frac{dU}{d\varphi} \ll \frac{d^2 U}{d\varphi^2}, \quad \Phi \ll \frac{d\Phi}{d\varphi} \ll \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2}$$

这样, 方程式 (1-50) 和 (1-51) 可进一步简化为:

$$EsR\Phi = \frac{d^2 U}{d\varphi^2} \quad (1-52)$$

$$-\frac{R}{D} U = \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} \quad (1-53)$$

把 (1-53) 式代入 (1-52) 式, 就获得微分方程式:

$$\frac{d^4 \Phi}{d\varphi^4} + 4k_1^2 \Phi = 0 \quad (1-54)$$