现代概率论基础

汪嘉冈编著

复旦大学出版社

现代概率论基础

汪嘉冈 编著

复旦大学出版社

内 容 简 介

本书以测度论为工具，系统地论述了概率论的基本概念（如事件、随机变量、概率、期望等），同时还介绍了独立随机变量序列、条件数学期望和鞅等方面的主要结果，从而为读者深入学习现代概率论、随机过程和数理统计理论提供了必要的基础。本书可作为理工科大学生和研究生的教材或教学参考书，也可供数学教师和有关的科学工作者阅读和参考。

现代概率论基础

汪嘉冈 编著

复旦大学出版社出版

（上海国权路 579 号）

新华书店上海发行所发行　　复旦大学印刷厂印刷

开本 850×1168　1/32　印张 5.75　插页 0　字数 164，000

1988 年 2 月第 1 版　　1988 年 2 月第 1 次印刷

印数 1—10，000

ISBN 7—309—00130—3/O·037

定价：1.20 元

前　言

初等的概率论课程中，都会直观地介绍概率论的一些基本概念，如事件、概率、随机变量、期望等，而事件、概率又是其中最基本的．概率可以看作以事件为自变量的函数．从概率论发展的需要来看，明确地规定事件和概率是必须的．为了规定什么是事件，一方面应考虑到对事件应允许进行必要的运算，以满足分析随机现象的实际需要，因而事件类不能太小，至少对某些运算应该是封闭的．另一方面为了能对每个事件给出概率，并保证对概率有一定的要求，例如可加性等，所以事件的类就不能太大，否则无法给出一个"兼顾各方面要求"的概率．这就是运用公理化方法来描述概率模型时必须考虑的内容．

事件从其运算的特点来看，它与集合的运算是十分相近的．假若我们把试验可能结果 ω 的全体记为 Ω，事件 $\tilde{A}$ 相当于"Ω 中某些 ω 在试验中出现"这一事件，即事件 $\tilde{A}=\{$属于 Ω 的子集 A 的任一 ω 在试验中出现$\}$，那么事件 $\tilde{A}$ 与 Ω 的子集 A 就是一回事了．在这种对应之下，事件全体就是 Ω 的某些子集的集合．概率就应该是定义在 Ω 的某些子集上的一个以集合为自变量的函数．规定事件和概率所必须兼顾到的各种要求就变为对集合类与集合函数应该满足的要求．本书前两章先介绍测度论的一般结果，并以此来建立事件、随机变量、概率、期望等各种概率论的概念．自从 Колмогоров 引进概率模型的公理结构以来，这种做法在现代概率论、随机过程甚至数理统计理论中几乎是通用的做法．第三、四章主要介绍独立性、独立随机变量序列、条件期望、鞅等概念，这里虽然离不开测度论的方法，但在讨论这些问题时用到的测度论概念、方法已和许多概率论概念结合起来，因而成为概率论本身特有的概念和方法了，例如停时的概念就是一个例子．

相对于目前开设的基础课——概率论的内容来说，这里的内容是

进了一步，但对概率论、随机过程和数理统计的现代理论来说，这些内容仍然是最基本的．从这个意义上来说，称它为“概率论基础”更为恰当些．此外，本书还涉及到不少近年来普遍运用的观点和概念，因此我们又冠上了“现代”这个形容词．

编者自1978年以来，曾多次为高年级大学生、研究生和进修教师开设这一课程，本书就是由这一课程的讲义修改而成的，其中很多内容选自参考书目[1,2]．又由于[3,4]是随机过程和现代鞅论的基本著作，所以在编写和修改中也力求使本书的内容与之衔接．编者在开设这一课程时，假定听讲者已具备初等概率论知识(相当于[5]的内容)和初步的实分析知识(例如[6]的部分内容)．通过本课程的学习，一方面可以学会用测度论的观点和方法来分析概率论的一些重要问题，另一方面掌握了独立性、条件期望、鞅等方面的一些基本结果后，就为进一步学习概率统计和随机过程方面其它课程打下了基础．讲授这一课程一般可用54学时左右，这就相当于每周3学时讲一学期的课程．

本书共分四章，每章又分为若干节，在每节内，定义、命题、定理、例都统一编号．同一节内就按序号直接引用，同章不同节间引用时在序号前加上节号，不同章之间引用则加上章、节号．例如定义3和(4.2)分别表示本节的定义3和(4.2)式，命题3.5和定理2.5.3分别表示本章§3的命题5和第二章§5的定理3．本书用到的一些常用符号，若未加说明，可参见书末符号一览表．

编者得以完成本书首先要感谢复旦大学数学系、统计运筹系和数学研究所，由于他们的安排使编者有机会在多次的教学实践中完成本书的编写和修改的任务，也要感谢概率统计教研组的同志们，是他们鼓励和支持我完成了这一工作．其次也应感谢各次参加听讲的学生，由于他们仔细阅读原来的讲义而帮助我纠正了一些不妥之处．还特别要感谢何声武同志和徐家鹄同志，在完稿后他们又仔细地校阅了手稿并协助作了修改．

最后，由于编者水平所限，本书可能存在不少错误和缺点，编者真诚地欢迎读者的批评和指正．

编者　一九八六年七月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　　录

前　言

第一章　可测空间……(1)

§1 集类与σ域……(1)

§2 单调类定理……(7)

§3 可测空间与乘积可测空间……(9)

§4 可测映照与随机变量……(15)

小　结……(23)

习　题……(24)

第二章　测度与积分——概率与期望……(28)

§1 测度与测度空间……(28)

§2 概率测度的延拓与生成……(33)

§3 积分-期望……(44)

§4 随机变量序列的收敛性与一致可积性……(52)

§5 乘积可测空间上的测度……(65)

小　结……(76)

习　题……(77)

第三章　独立随机变量序列……(82)

§1 独立性与零壹律……(82)

§2 独立项级数……(86)

§3 大数定律……(94)

§4 停时与Wald等式……(103)

小　结……(109)

习　题……(110)

第四章　条件期望与鞅……(116)

§1 广义测度……(116)

§2 条件期望……(127)

§3 鞅的定义与基本不等式……(141)

§4 鞅的收敛定理及应用 ……(151)
小 结 ……(169)
习 题 ……(169)
常用符号一览表 ……(175)
参考书目 ……(176)

第一章 可测空间

§1 集类与 σ 域

一、集合及其运算

1 设 Ω 是一个抽象空间，即一个非空集合，它的元素称为点，一般用 ω 表示．由某些点构成的集合将用 $A,B,\cdots\cdots$ 等大写字母表示．$\omega\in A$ 表示 ω 为 A 的一个元素，也称 ω 属于 A．空集也看为 Ω 的一个子集，表以 $\varnothing$．象通常一样，若集 A 的元素都是集 B 的元素，那么称 A 为 B 的子集，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$．若 $A\subset B$，同时 $B\subset A$，即 A,B 由相同的元素构成，则记为 $A=B$，称 A,B 是相等的．

2 对于 Ω 的子集，常用到下列一些运算：

并：$A\cup B$，$\bigcup\limits_{n\geqslant 1}A_n$，$\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$．

$A\cup B$ 是由至少属于 A,B 之中一个集合的元素全体构成的集合，$\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$ 由 $\{A_\alpha,\alpha\in I\}$ 中诸集 A_α 的元素全体构成，即 $\omega\in\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$ 当且仅当至少有一个 $\alpha_0\in I$，使 $\omega\in A_{\alpha_0}$．

交：$A\cap B$，$\bigcap\limits_{n\geqslant 1}A_n$，$\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$．

$A\cap B$ 是由同时属于 A 及 B 的元素构成的集合，$\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$ 由同时属于 $\{A_\alpha,\alpha\in I\}$ 中每个集合的元素全体构成，即 $\omega\in\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$ 当且仅当对每个 $\alpha\in I$，$\omega\in A_\alpha$．$A\cap B$ 也记为 AB．

余集：A^c

A^c 是由 Ω 中不属于 A 的元素全体构成的集合．

差：$A\setminus B=A\cap B^c$．

对称差：$A\triangle B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$．

特别地若 $A\cap B=\varnothing$，则称 A,B 为互不相交的．对两两互不相交的 $\{A_\alpha\}$，常用 $\sum_\alpha A_\alpha$ 表示 $\bigcup_\alpha A_\alpha$，也称之为 $\{A_\alpha\}$ 之和．若 $B\subset A$，则常用 $A-B$ 表示 $A\setminus B$．

为方便计，我们还约定，若指标集 $I=\{\alpha\}$ 是空集，则

$$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha=\varnothing,\qquad \bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha=\Omega$$

3 对于集合运算，下列性质是基本的：

交换律：$A\cup B=B\cup A,\quad A\cap B=B\cap A$．

结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),\quad (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$．

分配律：$(A\cup B)\cap C=AC\cap BC$，

$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$$

De Morgan 法则：$(\bigcup_\alpha A_\alpha)^c=\bigcap_\alpha A_\alpha^c,\ (\bigcap_\alpha A_\alpha)^c=\bigcup_\alpha A_\alpha^c$．

4 对集合序列 $\{A_n,\ n\geqslant 1\}$，称 $\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n$ 为 $\{A_n\}$ 的上限点集，也记为 $\overline{\lim_n}A_n$ 或 $\limsup_n A_n$，它由 Ω 中属于无限多个 A_n 的那些元素构成．称 $\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}A_n$ 为 $\{A_n\}$ 的下限点集，也记为 $\underline{\lim}_n A_n$ 或 $\liminf_n A_n$，它由 Ω 中自某个指标 $n_0(\omega)$ 后属于集列中所有 A_n 的那些元素 ω 构成．当 $\underline{\lim}_n A_n=\overline{\lim}_n A_n$ 时，称 $\{A_n\}$ 有极限，并记 $\lim_n A_n=\overline{\lim}_n A_n$，称它为 $\{A_n\}$ 的极限．

5 对 $A\subset\Omega$，考虑 Ω 上的函数

$$I_A(\omega)=\begin{cases}1, & \omega\in A,\\ 0, & \omega\in A^c.\end{cases}$$

I_A 称为集 A 的示性函数．集合的运算与示性函数的运算有密切的关系：

$$I_{\bigcup_\alpha A_\alpha}=\bigvee_\alpha I_{A_\alpha}\ (\bigvee_\alpha I_{A_\alpha}\triangleq\sup_\alpha I_{A_\alpha}),\quad I_{\sum_\alpha A_\alpha}=\sum_\alpha I_{A_\alpha},$$

$$I_{\bigcap_\alpha A_\alpha}=\bigwedge_\alpha I_{A_\alpha}\ (\bigwedge_\alpha I_{A_\alpha}\triangleq\inf_\alpha I_{A_\alpha}),$$

$$I_{A^c}=1-I_A,$$

$$I_{A-B}=I_A-I_B,$$

$$I_{A\triangle B}=|I_A-I_B|=I_A+I_B(\mathrm{mod}\,2).$$

6 命题(首次进入分解) 给定集合 $\{A_i, 1\leqslant i\leqslant n\}$, 则

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i=\sum_{i=1}^{n}(A_i\setminus\bigcup_{j<i-1} A_j). \tag{6.1}$$

证 对 $n=1$(6.1) 是显然的. 若取 $A=\bigcup_{i=1}^{k} A_i$, $B=A_{k+1}$, 则由 $A\cup B=A+(B\setminus A)$ 便由 $n=k$ 推出 $n=k+1$ 时(6.1)也成立.*

上述命题的直观解释是: 若 $\omega\in A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$, 则必有一个最小的 i, 使 ω 属于 A_i 而不属于 $A_1, \cdots, A_{i-1}$ 中任一个. (6.1) 右端便是对 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 中的元素按每个元素首先属于哪一个 A_i 进行分解.

二、集类与 σ 域

由 Ω 中子集构成的集合称为集类, 我们将用花体字母 $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ 等来表示, 而 $\mathscr{P}(\Omega)$ 表示由 Ω 的子集全体构成的集类.

7 定义 $\mathscr{P}(\Omega)$ 的非空子集类 $\mathscr{A}$ 称为域(或代数), 假定它满足

i) 若 $A\in\mathscr{A}$, 则 $A^c\in\mathscr{A}$,

ii) 若 $A\in\mathscr{A}$, $B\in\mathscr{A}$, 则 $A\cup B\in\mathscr{A}$.

8 命题 设 $\mathscr{A}$ 是域, 则 i) $\Omega\in\mathscr{A}$, $\varnothing\in\mathscr{A}$.

ii) 若 $A, B\in\mathscr{A}$, 则 $AB\in\mathscr{A}$, $A\setminus B\in\mathscr{A}$, $A\triangle B\in\mathscr{A}$.

iii) 若 $A_j\in\mathscr{A}$; $1\leqslant j\leqslant n$, 则 $\bigcup_{j=1}^{n} A_j\in\mathscr{A}$, $\bigcap_{j=1}^{n} A_j\in\mathscr{A}$.

证 i) 因 $\mathscr{A}$ 非空, 存在 $A\in\mathscr{A}$, 则 $A^c\in\mathscr{A}$, 且

$$\Omega=A\cup A^c\in\mathscr{A},\quad \varnothing=\Omega^c\in\mathscr{A}.$$

ii) $AB=(A^c\cup B^c)^c\in\mathscr{A}$, $A\setminus B=AB^c\in\mathscr{A}$,

$$A\triangle B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)\in\mathscr{A}.$$

iii) 由归纳法即得.*

注 与域类似的还有环, $\mathscr{P}(\Omega)$ 的非空子类 $\mathscr{R}$ 称为环, 若当 $A\in\mathscr{R}$, $B\in\mathscr{R}$ 时, 必有 $A\setminus B\in\mathscr{R}$, $A\cup B\in\mathscr{R}$. 即环是关于差、并运算封闭的集类. 容易说明, 若 $\mathscr{A}$ 为域, 则 $\mathscr{A}$ 必为含 Ω 的环. 若 $\mathscr{R}$ 为环, 则 $\varnothing\in\mathscr{R}$, 且它对交、对称差运算是封闭的. 当环 $\mathscr{R}$ 含 Ω 时, $\mathscr{R}$ 必为域.

9 例 i) $\mathscr{P}(\Omega)$ 是一个域,

ii) $\mathscr{A}=\{\varnothing, \Omega\}$ 是一个域.

iii) 若 $\mathscr{C}$ 表示 Ω 的有限子集全体构成的集类，则 $\mathscr{C}$ 是一个环. 当 Ω 本身是无限集时，$\mathscr{C}$ 不是一个域. 若 $\mathscr{D}$ 是 Ω 中有限子集及其余集全体构成的集类，则 $\mathscr{D}$ 是一个域.

iv) 直线 $\mathscr{R}$ 上形为 $]a,b]$ (a,b 可为无穷)的区间的有限并的全体为一个域.

10 命题 若 $\mathscr{C}\subset\mathscr{P}(\Omega)$，则必存在包含 $\mathscr{C}$ 的最小域 $\mathscr{A}$，即 $\mathscr{A}$ 为域，$\mathscr{A}\supset\mathscr{C}$，且对任一域 $\mathscr{A}'\supset\mathscr{C}$，必有 $\mathscr{A}\subset\mathscr{A}'$.

证 首先记 $\mathscr{X}$ 为包含 $\mathscr{C}$ 的域的全体构成的集合，则因为 $\mathscr{P}(\Omega)\in\mathscr{X}$，所以 $\mathscr{X}$ 是非空的. 又因任意个包含 $\mathscr{C}$ 的域的交仍是一个包含 $\mathscr{C}$ 的域(请按域的定义逐条验证)，所以若取

$$\mathscr{A}=\bigcap_{\mathscr{B}\in\mathscr{X}}\mathscr{B}$$

则 $\mathscr{A}$ 就是所要求的.#

Ω 中由单点集全体张成的域就是由 Ω 中有限集及其余集全体构成的集类.

11 定义 对任一集类 $\mathscr{C}$，包含 $\mathscr{C}$ 的最小域 $\mathscr{A}$ 称为由 $\mathscr{C}$ 生成的域，记为 $\mathscr{A}(\mathscr{C})$.

12 定义 $\mathscr{P}(\Omega)$ 的非空子类 $\mathscr{S}$ 称为半域(或半代数)，若它满足：

i) $\varnothing,\Omega\in\mathscr{S}$；

ii) 当 $A,B\in\mathscr{S}$，必有 $AB\in\mathscr{S}$；

iii) 若 $A\in\mathscr{S}$，则 A^c 可表为 $\mathscr{S}$ 中两两互不相交集合的有限并.

13 例 i) 直线 $\boldsymbol{R}$ 上形为 $]a,b]$ (a,b 可为无穷) 的区间全体构成一个半域.

ii) n 维实空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中，开、闭及半开半闭矩形体.

$$\{(x_1,\cdots,x_n):\ a_i<(\leqslant)x_i<(\leqslant)b_i,\ 1\leqslant i\leqslant n\}$$

全体也构成一个半域.

类似于命题10，若 $\mathscr{C}\subset\mathscr{P}(\Omega)$，则必有包含 $\mathscr{C}$ 的最小半域 $\mathscr{S}(\mathscr{C})$，也称为由 $\mathscr{C}$ 生成的半域. 习题10构造性地给出了由 $\mathscr{C}$ 生成 $\mathscr{S}(\mathscr{C})$ 的办法，下列命题进一步给出由半域 $\mathscr{S}$ 构造 $\mathscr{A}(\mathscr{S})$ 的方法.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

14 命题 若$\mathscr{S}$为半域，则

$$\mathscr{A}=\{A=\sum_{i\in I}S_i;\{S_i,i\in I\}\text{为}\mathscr{S}\text{中互不相交的有限族}\}$$

是包含$\mathscr{S}$的最小域.

证 首先证明$\mathscr{A}$是一个域，$\mathscr{A}$对有限交封闭是显然的. 又若$A=\sum_{i=1}^{n}S_i\in\mathscr{A}$，则$A^c=\bigcap_{i=1}^{n}S_i^c$. 按半域的定义$S_i^c=\sum_{j=1}^{J_i}S_{ij}$，$S_{ij}\in\mathscr{S}$，所以

$$A^c=\bigcap_{i=1}^{n}S_i^c=\sum_{j_1=1}^{J_1}\cdots\sum_{j_n=1}^{J_n}\bigcap_{i=1}^{n}S_{ij_i}\in\mathscr{A}$$

由De Morgan法则，$\mathscr{A}$对有限并封闭，即$\mathscr{A}$是一个域. 此外$\mathscr{A}\supset\mathscr{S}$，若$\mathscr{A}'$也是一个包含$\mathscr{S}$的域，则对$S_i\in\mathscr{S}$，形为$A=\sum_{i=1}^{n}S_i$的集合必属于$\mathscr{A}'$，所以$\mathscr{A}'\supset\mathscr{A}$，即$\mathscr{A}$是最小的.*

15 定义 $\mathscr{P}(\Omega)$的非空子集$\mathscr{F}$称为σ域(或σ代数)，若它满足：

i) 若$A\in\mathscr{F}$，则$A^c\in\mathscr{F}$；

ii) 若对$n\geqslant1$，$A_n\in\mathscr{F}$，则$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{F}$.

16 命题 若$\mathscr{F}$为σ域，则$\mathscr{F}$为一个域，且当$n\geqslant1$，$A_n\in\mathscr{F}$时，必有$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{F}$，$\underline{\lim_n}A_n\in\mathscr{F}$，$\overline{\lim_n}A_n\in\mathscr{F}$.

证 若$A,B\in\mathscr{F}$，

$$A\cup B=A\cup B\cup B\cup B\cup\cdots\in\mathscr{F}$$

所以$\mathscr{F}$是一个域. 又

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n^c)^c\in\mathscr{F},$$

$$\underline{\lim_n}A_n=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}A_n\in\mathscr{F},$$

$$\overline{\lim_n}A_n=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n\in\mathscr{F}.*$$

注 与σ域类似的还有σ环. $\mathscr{P}(\Omega)$的非空子类$\mathscr{C}$称为σ环；若它满足：

i) 若$A\in\mathscr{C}$，$B\in\mathscr{C}$；则$A\setminus B\in\mathscr{C}$；

ii) 若对$n\geqslant1$，$A_n\in\mathscr{C}$，则$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{C}$. 容易说明，$\mathscr{F}$为$\sigma$域的充要条件是$\mathscr{F}$为一个包含$\Omega$的$\sigma$环. 在$\sigma$环中，对可列个集合的交运算，

上限、下限运算也是封闭的.

17 命题 若 $\mathscr{C}\subset\mathscr{P}(\Omega)$，则必存在包含 $\mathscr{C}$ 的最小 σ 域.

证 同命题 10.

18 例 i) $\mathscr{P}(\Omega)$ 是一个 σ 域.

ii) $\mathscr{F}=\{\varnothing,\Omega\}$ 是一个 σ 域.

iii) 若 $\mathscr{C}$ 表示 Ω 的有限或可列子集全体构成的集类，则 $\mathscr{C}$ 是一个 σ 环. 若 Ω 本身不是可列集，则 $\mathscr{C}$ 不是 σ 域. 若 $\mathscr{F}$ 表示 Ω 中有限或可列子集及其余集全体构成的集类，则 $\mathscr{F}$ 是一个 σ 域，它是包含 Ω 中一切单点集的最小 σ 域.

19 定义 包含 $\mathscr{C}$ 的最小 σ 域称为由 $\mathscr{C}$ 生成的 σ 域，记为 $\sigma(\mathscr{C})$.

20 命题 对 Ω 的子集类 $\mathscr{C}$，若以 $\mathscr{C}\cap A$ 表示集类 $\{BA:B\in\mathscr{C}\}$，则 $\sigma_\Omega(\mathscr{C})\cap A=\sigma_A(\mathscr{C}\cap A)$，这里 $\sigma_A(\mathscr{C}\cap A)$ 表示把 $\mathscr{C}\cap A$ 看为 $\mathscr{P}(A)$ 的子类在 A 上生成的 σ 域.

证 首先，$\sigma_\Omega(\mathscr{C})\cap A\supset\mathscr{C}\cap A$，又 $\sigma_\Omega(\mathscr{C})\cap A$ 是 A 上的一个 σ 域(需按定义逐项验证)，故 $\sigma_\Omega(\mathscr{C})\cap A\supset\sigma_A(\mathscr{C}\cap A)$. 反之，令

$$\mathscr{D}=\{B:B\cap A\in\sigma_A(\mathscr{C}\cap A),\ B\subset\Omega\},$$

则 $\mathscr{D}\supset\mathscr{C}$，$\mathscr{D}$ 也是 Ω 上的一个 σ 域(也需逐项验证)，故 $\mathscr{D}\supset\sigma_\Omega(\mathscr{C})$，即 $\sigma_\Omega(\mathscr{C})\cap A\subset\sigma_A(\mathscr{C}\cap A)$. 由此命题成立.

21 命题 若 $\boldsymbol{R}=]-\infty,\infty[$ 表数直线，则下列集类生成相同的 σ 域

i) $\{]a,b]:a,b\in\boldsymbol{R}\}$;

ii) $\{]-\infty,b]:b\in\boldsymbol{R}\}$;

iii) $\{[a,b]:a,b\in\boldsymbol{R}\}$.

iv) $\{]a,b[:a,b\in\boldsymbol{R}\}$;

v) $\{]r_1,r_2[;\ r_1,r_2$ 为有理数$\}$;

vi) $\{G:G$ 为 $\boldsymbol{R}$ 中开集$\}$;

vii) $\{F:F$ 为 $\boldsymbol{R}$ 中闭集$\}$.

证 由于 $]a,b]=\bigcap_n\left]a,b+\frac{1}{n}\right[$，$]a,b[=\bigcup_n\left]a,b-\frac{1}{n}\right]$，所以 i)，iv) 的集类生成相同的 σ 域. 同样 i)，iii) 亦生成相同的 σ 域. 此外，由

$$]-\infty, b]=\bigcup_n]-n, b],\ ]a, b]=]-\infty, b]\setminus]-\infty, a]$$

i), ii) 生成相同的 σ 域. 由 $]a, b[=\bigcup_{a<r_1<r_2<b}]r_1, r_2[$ 可知 iv), v) 生成相同的 σ 域. 由于 $\boldsymbol{R}$ 中任一开集可表示为可列个开区间的并，故 iv), vi) 生成相同的 σ 域. 利用开集的余集为闭集，可知 vi), vii) 生成相同的 σ 域.#

22 定义 数直线 $\boldsymbol{R}$ 上由开集全体产生的 σ 域称为 Borel 域，记为 $\mathscr{B}_R$ 或 $\mathscr{B}$，$\mathscr{B}_R$ 中的集称为一维 Borel 集. 对广义的数直线 $\overline{\boldsymbol{R}}=[-\infty, +\infty]$，由开集全体生成的 σ 域也称为 $\overline{\boldsymbol{R}}$ 上的 Borel 域，其中的集也称为 Borel 集.

一般地，若 E 为拓扑空间，$\mathscr{B}_E$ 表示由 E 中开集全体生成的 σ 域，这一 σ 域称为 Borel 域，$\mathscr{B}_E$ 中的集称为 E 中的 Borel 集. n 维欧氏空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中的 Borel 点集又简称为 n 维 Borel 点集.

§2 单调类定理

1 定义 $\mathscr{P}(\Omega)$ 的非空子类 $\mathscr{M}$ 称为单调类，若对任一集合序列 $\{A_n, n\geqslant 1\}\subset\mathscr{M}$，

当 $\{A_n\}$ 递增时，即 $A_n\subset A_{n+1}$，必有 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\in\mathscr{M}$，

当 $\{A_n\}$ 递减时，即 $A_n\supset A_{n+1}$，必有 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\in\mathscr{M}$.

2 例 i) $\mathscr{P}(\Omega)$ 是一个单调类. 每个 σ 域也必是一个单调类；

ii) 若 $\boldsymbol{R}=]-\infty, +\infty[$，则 $\{\varnothing, \boldsymbol{R},]-\infty, a],]-\infty, a[; a\in\boldsymbol{R}\}$ 为单调类，但它不是域.

3 命题 若非空 $\mathscr{C}\subset\mathscr{P}(\Omega)$，则必存在包含 $\mathscr{C}$ 的最小单调类 $\mathscr{M}(\mathscr{C})$，它也称为由 $\mathscr{C}$ 生成的单调类.

证 同命题 1.10.#

4 命题 $\mathscr{F}$ 为 σ 域的充要条件是 $\mathscr{F}$ 既是域又是单调类.

证 $\Rightarrow$(必要性) 由命题 1.16 得.

$\Leftarrow$(充分性) 对任一集合序列 $\{A_n, n\geqslant 1\}\subset\mathscr{F}$，因为 $\mathscr{F}$ 是域，

所以，$B_n=\bigcup_{k=1}^{n} A_k\in\mathscr{F}$，且因 B_n 为递增的，又由 $\mathscr{F}$ 为单调类 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\in\mathscr{F}$，所以 $\mathscr{F}$ 是 σ 域.#

5 定理(单调类定理) 若 $\mathscr{A}$ 为域，则 $\sigma(\mathscr{A})=\mathscr{M}(\mathscr{A})$.

证 首先，$\sigma(\mathscr{A})$ 是单调类，又 $\sigma(\mathscr{A})\supset\mathscr{A}$，所以

$$\sigma(\mathscr{A})\supset\mathscr{M}(\mathscr{A}). \tag{5.1}$$

反之，$\mathscr{A}\subset\mathscr{M}(\mathscr{A})$，我们证明 $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ 是一个 σ 域，若证明了这一点，则有 $\sigma(\mathscr{A})\subset\mathscr{M}(\mathscr{A})$. 先证明 $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ 对余集运算是封闭的. 记

$$\mathscr{M}'=\{A:A\text{ 及 }A^c\text{ 都属于 }\mathscr{M}(\mathscr{A})\}, \tag{5.2}$$

我们将证明它是一个单调类. 设 $\{A_n\}$ 是 $\mathscr{M}'$ 中的单调序列，则 $A_n, A_n^c\in\mathscr{M}(\mathscr{A})$，且 $\lim\limits_n\uparrow A_n$ (或 $\lim\limits_n\downarrow A_n$) $\in\mathscr{M}(\mathscr{A})$ ($\lim\limits_n\uparrow A_n$(表递增 A_n 的极限，$\lim\limits_n\downarrow A_n$ 表递减 A_n 的极限). 由

$$(\lim_n\uparrow A_n)^c=\lim_n\downarrow A_n^c\ (\text{或}(\lim_n\downarrow A_n)^c=\lim_n\uparrow A_n^c)$$

可得$(\lim\limits_n\uparrow A_n)^c$ (或$(\lim\limits_n\downarrow A_n)^c$) $\in\mathscr{M}(\mathscr{A})$，即 $\lim\limits_n\uparrow A_n$ (或 $\lim\limits_n\downarrow A_n$) $\in\mathscr{M}'$，故得$\mathscr{M}'$ 是单调类. 又 $\mathscr{M}'\supset\mathscr{A}$，所以 $\mathscr{M}'\supset\mathscr{M}(\mathscr{A})$. 因为 $\mathscr{M}'$中元素的余集在 $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ 中，所以 $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ 对余集运算是封闭的.

再证明 $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ 对并运算是封闭的. 对固定的 A，记

$$\mathscr{M}_A=\{B:B\in\mathscr{M}(\mathscr{A}),\ B\cup A\in\mathscr{M}(\mathscr{A})\}.$$

当 $A\in\mathscr{A}$ 时，容易看出 $\mathscr{M}_A\supset\mathscr{A}$. 又对每个单调序列 $\{B_n, n\geqslant 1\}$，由于等式 $\lim\limits_n(B_n\cup A)=(\lim\limits_n B_n)\cup A$，容易验证 $\mathscr{M}_A$ 是一个单调类，所以 $\mathscr{M}_A\supset\mathscr{M}(\mathscr{A})$. 又由 $\mathscr{M}_A\subset\mathscr{M}(\mathscr{A})$，所以只能是 $\mathscr{M}_A=\mathscr{M}(A)$. 这对每个 $A\in\mathscr{A}$ 都是对的，即对每个 $A\in\mathscr{A}$ 及 $B\in\mathscr{M}(\mathscr{A})$

$$A\cup B\in\mathscr{M}(\mathscr{A}).$$

进而容易看出，对 $A\in\mathscr{M}(\mathscr{A})$ 和 $B\in\mathscr{M}(\mathscr{A})$，

$$B\in\mathscr{M}_A\Longleftrightarrow A\in\mathscr{M}_B.$$

所以对每个 $B\in\mathscr{M}(\mathscr{A})$ 和任一个 $A\in\mathscr{A}$，都有 $A\in\mathscr{M}_B$. 同样，这表明 $\mathscr{A}\subset\mathscr{M}_B\subset\mathscr{M}(\mathscr{A})$ 对每个$B\in\mathscr{M}(\mathscr{A})$ 成立，故 $\mathscr{M}_B=\mathscr{M}(\mathscr{A})$ 对每个 $B\in\mathscr{M}(\mathscr{A})$ 成立. 由此立即可推出$\mathscr{M}(\mathscr{A})$ 对并运算是封闭的. 所以

$\mathscr{M}(\mathscr{A})$ 是一个域，也是一个单调类．由命题 4 可推得 $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ 必是一个 σ 域，故 $\mathscr{M}(\mathscr{A})\supset\sigma(\mathscr{A})$．联合(5.1)即得 $\sigma(\mathscr{A})=\mathscr{M}(\mathscr{A})$．*

下面我们再介绍概率论中常用的另一种单调类定理．

6 定义 $\mathscr{P}(\Omega)$的非空子类$\mathscr{D}$称为π类，若当$A,B\in\mathscr{D}$时必有$AB\in\mathscr{D}$．

7 定义 $\mathscr{P}(\Omega)$ 的非空子类 $\mathscr{G}$ 称为λ类，若它满足

i) 当 $A\in\mathscr{G}$ 时必有 $A^c\in\mathscr{G}$；

ii) 当 $A,B\in\mathscr{G}$ 且 $AB=\varnothing$，必有 $A+B\in\mathscr{G}$；

iii) 对递增序列 $\{A_n,\ n\geqslant 1\}\subset\mathscr{G}$，必有 $\lim\limits_n A_n\in\mathscr{G}$．

8 命题 i) $\mathscr{F}$ 成为 σ 域的充要条件是它同时为 λ 类和 π 类．ii) 对 $\mathscr{P}(\Omega)$ 的任一子类 $\mathscr{C}$，必存在包含 $\mathscr{C}$ 的最小 λ 类 $\lambda(\mathscr{C})$．

证 i) 直接验证．ii) 类似于命题 1.10．*

9 定理 若 $\mathscr{D}$ 为 π 类，则 $\lambda(\mathscr{D})=\sigma(\mathscr{D})$．

证 首先 $\sigma(\mathscr{D})\supset\mathscr{D}$，$\sigma(\mathscr{D})$ 为 λ 类，所以 $\sigma(\mathscr{D})\supset\lambda(\mathscr{D})$．反之，我们要证明 $\lambda(\mathscr{D})$ 是一个 π 类，依据这一点，由命题 8 可知 $\lambda(\mathscr{D})$ 是一个 σ 域，即有 $\lambda(\mathscr{D})\supset\sigma(\mathscr{D})$，定理也就得证．

为证 $\lambda(\mathscr{D})$ 是一个 π 类，记

$$\mathscr{C}=\{A:A\in\lambda(\mathscr{D})\text{ 且对每个 }D\in\mathscr{D}\text{ 有 }AD\in\lambda(\mathscr{D})\}.$$

则 $\mathscr{C}\supset\mathscr{D}$，又当 $A\in\mathscr{C}$ 时利用 $DA^c=(D^c\cup A)^c=(D^c+DA)^c$ 可推出 $A^c\in\mathscr{C}$，进而容易验证 $\mathscr{C}$ 是 λ 类．所以 $\mathscr{C}\supset\lambda(\mathscr{D})$，即对每个 $D\in\mathscr{D}$ 及每个 $A\in\lambda(\mathscr{D})$ 都有 $AD\in\lambda(\mathscr{D})$．再取

$$\mathscr{G}=\{D:D\in\lambda(\mathscr{D})\text{ 且对每个 }A\in\lambda(\mathscr{D})\text{ 有 }AD\in\lambda(\mathscr{D})\},$$

则 $\mathscr{G}\supset\mathscr{D}$．同样可验证 $\mathscr{G}$ 是 λ 类，所以 $\mathscr{G}=\lambda(\mathscr{D})$．这就表明 $\lambda(\mathscr{D})$ 对交运算是封闭的，即 $\lambda(\mathscr{D})$ 是一个 π 类．*

10 系 若 $\mathscr{G}$ 是 λ 类，又 $\mathscr{D}$ 为 π 类，$\mathscr{G}\supset\mathscr{D}$，则 $\mathscr{G}\supset\sigma(\mathscr{D})$．

§3 可测空间与乘积可测空间

一、可测空间

1 定义 Ω 为一集合，$\mathscr{F}$ 为由 Ω 的子集构成的 σ 域，则 $(\Omega,\mathscr{F})$ 称

为**可测空间**. $\mathscr{F}$ 中的任一集合都称为 $\mathscr{F}$ **可测集**，简称**可测集**.

2 在现代概率论中，概率论的许多概念都是借用集合论与测度论中的概念来定义的. 若$(\Omega,\mathscr{F})$为可测空间，那么从概率论看它有如下含义：

Ω 表某一试验中可能结果全体，Ω 又称为**基本空间**.

Ω 的元素 ω 称为**基本事件**.

$\mathscr{F}$ 表随机事件全体，称为**事件 σ 域**.

对可测空间 $(\Omega,\mathscr{F})$，若 $\Omega,\mathscr{F}$ 赋予上述含义，则 $(\Omega,\mathscr{F})$ 也称为**概率可测空间**，这时 $\mathscr{F}$ 中的任一 A 都可称为**随机事件**或**事件**，A 对应于事件 $\tilde{A}$="在一次试验中 A 含有的任一基本事件出现".

Ω 作为 $\mathscr{F}$ 的元素称为**必然事件**.

$\varnothing$ 称为**不可能事件**.

事件 $A\cup B$ 或 $\bigcup\limits_n A_n$ 分别称为事件 A,B 或 $\{A_n\}$ 的**并**，分别表示 A,B 或 $\{A_n\}$ 中至少有一个发生的事件.

事件 $A\cap B$ 或 $\bigcap\limits_n A_n$ 分别称为事件 A,B 或 $\{A_n\}$ 的**交**，表示其同时发生的事件.

事件 A^c 称为 A 的**逆事件**，表示"A 不发生"的事件.

对集合运算的其它一些概念也同样适用于事件. 例如 $AB=\varnothing$，则也称事件 A,B 是**互不相容**的. 事件 $\overline{\lim\limits_n} A_n$ 又称为 $\{A_n\}$ 的**上限事件**，表示 $\{A_n\}$ 中有无限个同时发生的事件，所以也记作 $\{A_n\ i.o.\}=\overline{\lim\limits_n} A_n$.

以上是一种描述概率模型的公理化方法. 另一方面，任一具体的概率模型，例如古典概型中各种模型也都符合这一要求. 在古典概型中可取 Ω 为试验中可能结果全体，那么随机事件全体 $\mathscr{F}$ 就是 $\mathscr{P}(\Omega)$ 或其子类. 为了合理地对事件进行运算，要求 $\mathscr{F}$ 是一个 σ 域，这既是必要的也是可能的. 由于这样，本书对可测空间 $(\Omega,\mathscr{F})$ 与(基本事件空间 Ω，事件 σ 域 $\mathscr{F}$)，常常是不加区别的，对 $\mathscr{F}$ 中集合的运算与对事件的运算也常用同一术语和符号. 这种做法在现代概率论中也是普遍采用的.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com