# 模糊数学基础
# 简明教程

周泰文　王晓星　刘后邦

MOHU SHUXUE JICHU
JIANMING JIAOCHENG

华中理工大学出版社

# 模糊数学基础简明教程

周泰文　王晓星　刘后邗　编著

华中理工大学出版社

## 内容简介

我们根据多年从事模糊数学教学与科研的经验和成果，编著了本教程.主要内容有模糊集、模糊关系、模糊向量、模糊映射、模糊变换等基本概念以及它们在识别、聚类、评判、解方程、优化等方面的应用；有模糊逻辑、模糊推理、模糊控制等基本知识；还附录了模糊数学应用的现状和前景.

本教程可作为高等工科院校有关专业本科生、研究生的教材，亦可供有关教师和科技工作者参阅.


**模糊数学基础简明教程**

周泰文　王晓星　刘后邗编著

责任编辑　李立鹏

*

华中理工大学出版社出版发行

（武昌喻家山　邮编 430074）

新华书店湖北发行所经销

武汉大学出版社印刷总厂印刷

*

开本：850×1168　1/32　印张：10.5　字数：247 000

1993 年 12 月第 1 版　1993 年 12 月第 1 次印刷

印数：1—2 000

ISBN7-5609-0817-9/O·108

定价：6.50 元

（鄂）新登字第 10 号

# 前 言

模糊数学是用数学方法研究和处理客观存在的模糊现象的一门新兴学科.

1965 年，美国控制论专家加利福尼亚大学教授扎德(L. A. Zadeh) 首先提出模糊集的概念，发表了模糊数学的第一篇论文“模糊集”(Fuzzy sets). 他提出，模糊数学的核心思想就是要用数学手段，仿效人脑思维，对复杂事物进行模糊度量、模糊识别、模糊推理、模糊控制和模糊决策.

模糊数学并不是要将数学变成模模糊糊的东西，而是要将数学引进模糊现象这个“禁区”，用严格的数学方法研究和处理模糊现象. 它从诞生的那天起便和电子计算机的发展息息相关. 有人认为计算机科学是模糊数学的摇篮；同时，模糊数学又促进计算机科学的发展，使计算机进一步模拟人脑思维的特点，提高自动化水平，更加“聪明”起来.

假如说 1654 年巴斯卡 (B Pascal) 发表的第一篇概率论文，标志着数学的应用范围从精确领域扩大到随机领域；那么 1965 年扎德的论文就标志着数学的应用范围又进入了模糊领域的新天地，这是数学发展史上的又一个里程碑. 1987 年 7 月，正式成立了“国际模糊系统协会”和“世界土木工程模糊数学应用联络网”.

我国从 1976 年开始引进模糊数学. 老一辈著名数学家关肇直先生在几次会议上都宣传过这门新学科，认为这是数学发展的新动向之一. 1981 年我国的模糊数学界创办了国内外发行的《模糊数学》杂志（由原华中工学院（现改华中理工大学）主办）. 1983 年正式成立了“中国模糊数学与模糊系统学会”. 1987 年，学会的刊物《模糊系统与数学》由国防科学技术大学创刊. 虽然我国对模糊数学的研究起步较迟，但由于我国学者的急起直追，到目前

已经和美国、日本及欧洲一些国家并驾齐驱，成为这一新兴领域中举世公认的几支劲旅之一.

模糊数学才有20多年的历史，正处于初期发展阶段. 虽然它在严谨的理论体系方面还有待探讨和建立，但它在基础理论和实际应用等方面却引起了各国学者的极大兴趣. 从国内外学者的理论专著和应用文集中，我们可看到许多有价值的贡献和惊人的成果. 目前，它在自动控制、信息处理、天气预报、地震研究、人工智能、图象识别、医疗诊断、农作物选种、商品评价、项目评估、事物分类以及经济学、心理学、社会学、生态学、语言学、历史学、管理科学、工程科学等多种领域内都得到广泛的应用. 特别是日、美和我国已相继研制成功智能化的新型计算机雏型——模糊推理机. 这表现了模糊集理论的强大生命力和伟大意义，它必将促进整个科学事业的发展，对人类作出积极的贡献.

一些中外著名的科学家认为:经典数学的功劳是不可磨灭的，没有经典数学就没有今天的世界；但世界发展到今天，实际要解决的问题中，很多都具有模糊性. 模糊性是客观存在的，客观实际需要建立模糊数学体系以适应科学的发展.

本教程是根据我们多次对工科本科生，研究生讲授“模糊数学”课的讲稿，参阅和汇集了一些国内外学者的论著或资料后写成的，其中有作者在理论方面的工作，也有专业教师在应用方面的成果. 第六章由刘后邗副教授执笔，第七、八、九章及附录由王晓星副教授执笔，其余各章由周泰文副教授执笔. 我们力求理论清晰，应用方法明确，使初学者便于掌握这些理论和方法，为他们在模糊领域中的进一步探求打下基础.

在编写过程中，得到了“模糊数学与模糊系统”学会、吴今培教授、杨承恝教授的鼎力支持；王植槐、王华兴两位副教授审阅了全稿；许多老师给了我们具体帮助；华中理工大学出版社对本书的出版付出了艰辛的劳动，我们在此表示衷心的感谢.

由于模糊数学还处在不断发展、有待完善的阶段，加之我们的水平有限，不妥之处在所难免，望读者批评指正.

作者 1992 年 9 月于长沙

# 目　　录

# 第一章　模糊集合的一般概念

## §1.1　预备知识

经典数学的基础是康托（Cantor 1845—1918 年）创始的普通集合论.

为了将集合概念从普通集扩展到模糊集，特将普通集合论中的一些重要概念和性质提要如下.

### 一、基本概念

**论域**　被讨论对象的全体叫论域. 常用大写英文字母 $U$、$V$、$X$、$Y$ 等表示.

**元素**　论域中的每个对象叫元素. 常用小写英文字母 $u$、$v$、$x$、$y$ 等表示.

**集合**　某些确定的元素的全体叫集合，简称为集. 集的内涵是指其有别于其它集的本质特性；集的外延是指属于此集合的元素的全体. 根据其内涵可以判定任一元素是否属于此集合. 若 $u$ 为集合 $U$ 的元素，则可记为 $u \in U$.

表示有限集常用枚举法，如

$$A = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\};$$

表示无限集常用描述法，如

$B = \{u \mid \cdots\}$，在大括号内的…处写明 $u$ 的本质属性.

**子集**　若任取 $u \in A$ 均有 $u \in B$，则称 $A$ 为 $B$ 的子集、$A$ 含于 $B$ 或 $B$ 包含 $A$，记为 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$.

**相等**　若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$，则称 $A$ 与 $B$ 相等，记为 $A = B$.

**空集** 不含有任何元素的集合叫空集，记为$\varnothing$. $\varnothing$可视为任何集合的子集.

**幂集** 论域$U$中各子集组成的集合叫做$U$的幂集，记为$\mathscr{P}(U)$，所以有

$$\mathscr{P}(U)=\{A\mid A\subseteq U\}.$$

例如，$U=\{a,b\}$，则有

$$\mathscr{P}(U)=\{\{a\},\{b\},\{a,b\},\varnothing\}.$$

若$A$是$U$的子集，则可记为$A\subseteq U$；又因为$A$是$\mathscr{P}(U)$的元素，亦可记为$A\in\mathscr{P}(U)$.

设$A$，$B\in\mathscr{P}(U)$，$u\in U$，则有

$A$与$B$的并集 $A\cup B\triangleq\{u\mid u\in A$ 或 $u\in B\}$；

$A$与$B$的交集 $A\cap B\triangleq\{u\mid u\in A$ 且 $u\in B\}$；

$A$的余集 $A^c\triangleq\{u\mid u\notin A\}$；

$A$与$B$的差集 $A-B\triangleq\{u\in A$ 且 $u\notin B\}$；

显然有 $B^c=U-B$； $A-B=A\cap B^c$.

$A$与$B$的对称差集 $A\ominus B\triangleq(A-B)\cup(B-A)$；

如图 1.1.1 中的阴影部分.

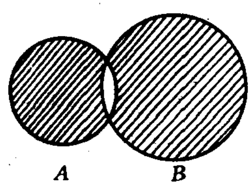


图 1.1.1

$A$与$B$的直积（或笛卡儿乘积）

$$A\times B\triangleq\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}.\tag{1.1.1}$$

注意 $B\times A$与$A\times B$一般不相等.

推广

设$u\in U$，$T=\{1,2,\cdots,n\}$或$T=\{1,2,\cdots\}$为指标集，$A_t\subseteq U$ $(t\in T)$，则

$$\bigcup_{t\in T}A_t\triangleq\{u\mid\exists\ t\in T,\text{使 }u\in A_t\};\tag{1.1.2}$$

$$\bigcap_{t\in T}A_t\triangleq\{u\mid\forall\ t\in T,\text{都有 }u\in A_t\};\tag{1.1.3}$$

$$\mathop{\times}_{t=1}^{n}A_t\triangleq A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$$

$$\triangleq \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_t \in A_t, t=1, 2, \cdots, n\}. \quad (1.1.4)$$

## 二、集合序列 $\{A_n \mid n=1, 2, \cdots\}$ 的极限

当 $A_n \subseteq A_{n+1}$ $(n=1, 2, \cdots)$ 时，称此序列单调递增，并称 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 为其极限，记为

$$\lim_{n\to\infty} A_n \triangleq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{或} \quad A_n \nearrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n; \qquad (1.1.5)$$

当 $A_n \supseteq A_{n+1}$ $(n=1, 2, \cdots)$ 时，称此序列单调递减，并称 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ 为其极限，记为

$$\lim_{n\to\infty} A_n \triangleq \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{或} \quad A_n \searrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n. \qquad (1.1.6)$$

## 三、运算性质

集合运算中最基本的性质有：

1\. 幂等律 $A \cup A = A,$ (1.1.7)

$A \cap A = A.$ (1.1.8)

2\. 交换律 $A \cup B = B \cup A,$ (1.1.9)

$A \cap B = B \cap A.$ (1.1.10)

3\. 结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$ (1.1.11)

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$ (1.1.12)

4\. 吸收律 $(A \cap B) \cup B = B,$ (1.1.13)

$(A \cup B) \cap B = B.$ (1.1.14)

5\. 分配律 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$ (1.1.15)

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$ (1.1.16)

$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C).$ (1.1.17)

$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C),$ (1.1.18)

$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C),$ (1.1.19)

$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C).$ (1.1.20)

6. 两极律 $A \cup U = U$, (1.1.21)

$A \cap U = A$, (1.1.22)

$A \cup \varnothing = A$, (1.1.23)

$A \cap \varnothing = \varnothing$. (1.1.24)

7. 复原律 $(A^c)^c = A$ (1.1.25)

8. 补余律 $A \cup A^c = U$ (1.1.26)

$A \cap A^c = \varnothing$ (1.1.27)

9. De-Morgan 律 $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ (1.1.28)

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$. (1.1.29)

以上的分配律、De-Morgan 律均可作相应的推广，例如

$$B \cap \left( \bigcup_{t \in T} A_t \right) = \bigcup_{t \in T} (B \cap A_t), \tag{1.1.30}$$

$$B \times \left( \bigcup_{t=1}^{n} A_t \right) = \bigcup_{t=1}^{n} (B \times A_t), \tag{1.1.31}$$

$$\left( \bigcup_{t \in T} A_t \right)^c = \bigcap_{t \in T} A_t^c. \tag{1.1.32}$$

## 四、映射

若$\forall\ u \in U$，都有唯一确定的 $f(u) = v \in V$ 和 $u$ 对应，则称法则 $f$ 为从 $U$ 到 $V$ 的一个映射，记为

$$f: U \to V, \quad u \to f(u);$$

反之，若$\forall\ v \in V$，都有唯一确定的 $f^{-1}(v) = u \in U$，使 $f(u) = v$，则称法则 $f^{-1}$为 $f$ 的逆映射.

我们称 $f(u)$ 为在 $f$ 作用下，$u$ 在 $V$ 中的像，$u$ 为$v = f(u)$的一个原像；称 $f^{-1}(v)$ 为 $v$ 的逆像或原像.

若 $A \subseteq U$，则称

$$f(A) \triangleq \{v \mid v \in V, \text{且} \exists\ u \in A \text{ 使 } f(u) = v\} \tag{1.1.33}$$

为在 $f$ 作用下，$A$ 在 $V$ 中的像；

若 $B \subseteq V$，则称

$$f^{-1}(B) \triangleq \{u \mid u \in U, \text{且 } f(u) \in B\} \tag{1.1.34}$$

为在 $f$ 作用下 $B$ 的逆像或原像.

当 $B$ 为单点集 $\{v\}$ 时，规定 $f^{-1}(\{v\})$ 可简记为 $f^{-1}(v)$. 这样，$f^{-1}(v)$ 在不同的条件下可以有两种意义：它既可以在逆映射存在时表示元素 $v$ 的逆像，这时 $f^{-1}(v)$ 是 $U$ 中的一个元素；又可以表示单点集 $\{v\}$ 的逆像，这时 $f^{-1}(v)$ 是 $U$ 的一个子集，当 $\{v\}$ 的逆像不存在时，$f^{-1}(v)=\varnothing$.

当 $f(U)=V$ 时，则称 $f$ 是从 $U$ 到 $V$ 的一个满射或全射；

若对 $U$ 中任意两个不同元素 $u_1$，$u_2$ 均有 $f(u_1)\neq f(u_2)$，则称 $f$ 为单射或 1-1 映射；

若 $f$ 既是满射又是单射，则称 $f$ 是从 $U$ 到 $V$ 的一个一一对应.

经典数学中一个重要的基本概念——函数，实际上就是从定义域到值域的一个满射.

## 五、集合的特征函数

设 $A\subseteq U$，$u\in U$，称

$$\chi_A(u)=\begin{cases}1, & 当\ u\in A;\\ 0, & 当\ u\overline{\in} A\end{cases} \tag{1.1.35}$$

为集合 $A$ 的特征函数.

据此可知：使 $\chi_A(u)$ 为 1 的 $u$ 都是 $A$ 的成员；使 $\chi_A(u)$ 为 0 的 $u$ 都不是 $A$ 的成员. 因为由 $\chi_A(u)$ 的值可决定 $u$ 是否为 $A$ 的成员，所以称 $\chi_A(u)$ 为 $A$ 的特征函数是理所当然的. 因此说，给定了一个特征函数，就等于给定了一个普通集合. 在这个意义上说，一个特征函数就是一个普通集合. 若这样理解特征函数，就架起了由经典数学通往模糊数学的桥梁.

特征函数具有下列性质：

$$\chi_{A\cup B}(u)=\max(\chi_A(u),\chi_B(u))\,; \tag{1.1.36}$$

$$\chi_{A\cap B}(u)=\min(\chi_A(u),\chi_B(u))\,; \tag{1.1.37}$$

$$\chi_{A^c}(u)=1-\chi_A(u). \tag{1.1.38}$$

(1.1.29) 的证明如下：

(1) 当 $u\in A\cup B$ 时，$\chi_{A\cup B}(u)=1$，

而 $u\in A\cup B \Leftrightarrow u\in A$ 或 $u\in B$

$\Leftrightarrow \chi_A(u)=1$ 或 $\chi_B(u)=1$

$\Leftrightarrow \max(\chi_A(u),\ \chi_B(u))=1$，

$\therefore \chi_{A\cup B}(u)=\max(\chi_A(u),\ \chi_B(u))$.

(2) 当 $u\overline{\in} A\cup B$ 时，$\chi_{A\cup B}(u)=0$，

而 $u\overline{\in} A\cup B \Leftrightarrow u\overline{\in} A$ 且 $u\overline{\in} B$

$\Leftrightarrow \chi_A(u)=0$ 且 $\chi_B(u)=0$

$\Leftrightarrow \max(\chi_A(u),\ \chi_B(u))=0$，

$\therefore \chi_{A\cup B}(u)=\max(\chi_A(u),\ \chi_B(u))$.

由 (1)、(2) 知，(1.1.29) 式成立.

(1.1.30)、(1.1.31) 两式的证明留给读者.

## 六、关系

"关系"是一个在理论和应用中都很重要的概念. 有同一集合中两元素之间的关系；也有在两个不同集合中两元素之间的关系.

1. "关系"的概念　先看两个实例

**例 1.1.1**　$A$ 为某家庭成员的集合

$A=\{a_1$(祖父)$,a_2$(祖母)$,a_3$(父)$,a_4$(母)$,a_5$(男)$,a_6$(弟)$,a_7$(妹)$\}$

(此处的小括号内是按 $a_5$ 的称谓).

其中的"父子关系"表现为三个有序的元素偶：

$$(a_1,a_3),(a_3,a_5),(a_3,a_6)$$

所以，这三个有序元素偶的集合

$$R=\{(a_1,a_3),(a_3,a_5),(a_3,a_6)\}\subseteq A\times A,$$

表现了 $A$ 上的"父子关系".

**例 1.1.2**　某小组学生集 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$，分数集 $B=$

$\{x|0\leqslant x\leqslant 100\}$. 某次考试后这小组的成绩如下：

$$(a_1, 92), (a_2, 70), (a_3, 56), (a_4, 63), (a_5, 87).$$

"及格"以上的四个序偶作成的集合

$$R=\{(a_1, 92), (a_2, 70), (a_4, 63), (a_5, 87)\}\subseteq A\times B$$

表现了 $A$ 与 $B$ 之间的"及格关系".

**定义 1.1.1** 设 $A$, $B$ 均为集合，称 $A\times B$ 的子集 $R$ 为从 $A$ 到 $B$（或 $A\times B$ 上）的**二元关系**.

若 $(a, b)\in R$，则称 $a$ 与 $b$ 具有关系 $R$，记为 $aRb$；

若 $(a, b)\overline{\in} R$，则称 $a$ 与 $b$ 不具有关系 $R$，记为 $a\overline{R}b$；

当 $A=B$ 时，$A\times B=A\times A$ 上的二元关系 $R$ 简称为 $A$ 上的二元关系 $R$.

在例 1.1.1 中"父子关系"$R$ 是 $A$ 上的二元关系. $a_1Ra_3$，$a_2\overline{R}a_4$.

在例 1.1.2 中，"及格关系"$R$ 是 $A\times B$ 上的二元关系. $a_1R92$，$a_4R63$，而 $a_3\overline{R}56$.

当 $A$ 为实数集时，可用直角坐标系中的平面图形表示 $A$ 上的二元关系.

如 $R=\{(x, y)\mid(x, y)\in A\times A$, 且 $x^2+y^2\leqslant 2^2\}$ 可用图 1.1.2 表示.

当考察 $A\times B$ 上的关系 $R$ 时，若 $R=A\times B$，则称 $R$ 为 $A\times B$ 上的**全关系**. 这时每一对 $a$、$b$ $(a\in A, b\in B)$ 均具有关系 $R$；

若 $R=\varnothing$，则称 $R$ 为 $A\times B$ 上的**空关系**. 这时每一对 $a$、$b$ $(a\in A, b\in B)$ 均不具有关系 $R$.

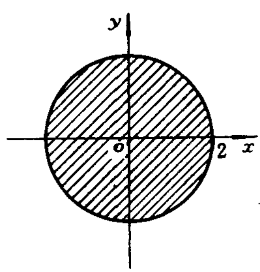


图 1.1.2

由于 $A\times B$ 上的二元关系 $R$ 就是 $A\times B$ 的一个子集，不同的关系就是不同的子集，所以关于集合的一些概念和运算性质对于关系都成立，通过这些运算还可由某些旧关系构造出

一些新关系.

2. $A$ 上几种特殊的二元关系

**定义 1.1.2** 设 $R\subseteq A\times A$，若$\forall a\in A$ 均有 $aRa$，则称 $R$ 为 $A$ 上的**自反关系**或 $R$ 具有**自反性**；

若 $a$、$b\in A$，且 $aRb$ 时就有 $bRa$，则称 $R$ 为 $A$ 上的**对称关系**或 $R$ 具有**对称性**；

若 $a$、$b\in A$，$aRb$ 且 $bRa$ 时就有 $a=b$，则称 $R$ 为 $A$ 上的**反对称关系**或 $R$ 具有**反对称性**；

若 $a$、$b$、$c\in A$，$aRb$ 且 $bRc$ 时就有 $aRc$，则称 $R$ 为 $A$ 上的**传递关系**或 $R$ 具有**传递性**；

若 $R$ 同时具有自反性、对称性和传递性，则称 $R$ 为 $A$ 上的**等价关系**或 $R$ 具有**等价性**.

例如某班级 $A$ 上的同学关系 $R=\{(a,b)\mid a、b\in A\}$是 $A$ 上的对称关系；实数集 $A$ 上的小于或等于"$\leqslant$"关系 $R=\{(r_1,r_2)\mid r_1,r_2\in A$ 且 $r_1\leqslant r_2\}$既具有自反性，又具有反对称性；正整数集 $A$ 上的整除关系 $R=\{(a,b)\mid a、b\in N$ 且 $a|b$①$\}$具有传递性.

可以证明：$A$ 上的全关系、相等关系均为等价关系. 因为

若 $R$ 为 $A$ 上的全关系，则 $R=A\times A$. $\forall a\in A$，必有 $(a,a)\in A\times A=R$，故 $R$ 具有自反性；

$\forall a,b\in A$，必有

$$(a,b)\in A\times A=R\text{ 且}(b,a)\in A\times A=R,$$

故 $R$ 具有对称性；

$$\forall a,b,c\in A,\text{必有}(a,b)\in A\times A=R,$$
$$(b,c)\in A\times A=R\text{ 且}(a,c)\in A\times A=R,$$

故 $R$ 具有传递性.

---

① $a|b\Longleftrightarrow\exists$ 正整数 $k$，使 $ka=b$.

至此可知全关系 $R$ 为 $A$ 上的等价关系.

相等关系为等价关系的证明，留给读者.

3. 分类

所谓"$A$ 的一个分类"就是将 $A$ 的元素分成的若干子集 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，此处 $A_i \cap A_j = \varnothing$ $(i \neq j)$，且 $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$.

每一个这样的 $A_k$ 都是一类，$A$ 中的任一元素属于且仅属于某一类.

若 $a$ 与 $b$ 同属于 $A_k$，则称 $a$ 与 $b$ 有同类关系或 $a$ 与 $b$ 同类.

容易证明：对 $A$ 的一个分类而言，同类关系是等价关系；还可证明：每一个等价关系均确定一个分类.

设 $R$ 是非空集 $A$ 上的等价关系，对于每一个 $a \in A$，称所有与 $a$ 等价的元素集 $\{x \mid xRa\}$ 为 $a$ 关于 $R$ 的等价类，记为 $[a]_R$. 对于所有的 $a$，$b \in A$，可以证明：或者 $[a]_R = [b]_R$，或者 $[a]_R \cap [b]_R = \varnothing$；$R$ 的全体等价类的集，构成 $A$ 的一个分类. 我们称这个分类是由等价关系 $R$ 导出的.

## 七、序关系、半序集

**定义 1.1.3** 集 $A$ 上的关系 $R$ 若具有自反性、反对称性、传递性，则称 $R$ 为**半序关系**（或**偏序关系**）；称 $A$（对 $R$ 而言）是**半序集**（或**偏序集**），记为 $(A, R)$.

**例 1.1.3** 设 $A = \{a, b\}$，则

$\mathscr{P}(A) = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \varnothing\}$，$(\mathscr{P}(A), \subseteq)$ 是半序集.

因为在 $\mathscr{P}(A)$ 上，关系 $\subseteq$ 显然满足自反性、反对称性、传递性. 如图 1.1.3，此图中，给出了 $\mathscr{P}(A)$ 的所有元素，下面的元素对上面的元素有 $\subseteq$ 关系，而 $\{a\}$ 与 $\{b\}$ 没有 $\subseteq$ 关系，所以它们在图中的位置分不出上下.

此图形象地表明了关系 $\subseteq$ 在 $\mathscr{P}(A)$ 上是半序关系，因为只有