工程光学原理

王其祥　编著

江苏科学技术出版社

内 容 提 要

本书除了扼要介绍传统的经典光学以外，着重阐述近代光学中关于透镜的傅里叶变换作用、光学传递函数理论、光学信息处理和空间滤波、全息术、人为双折射、薄膜光学、晶体光学、矩阵光学及相应的理论基础，还较系统地介绍了专业数学。内容丰富，实用性强。可供有关的大学生、研究生、教师及光学科技工作者学习参考。由于该书对涉及的数学和物理问题作了详细说明，文字深入浅出、通俗易懂，故将它作为青年自修光学理论与技术的教材，也很适宜。

工 程 光 学 原 理

王其祥　　编著

出版：江苏科学技术出版社

发行：江 苏 省 新 华 书 店

印刷：淮 阴 新 华 印 刷 厂

开本 787×1092 毫米 1/16　印张 34.5　字数 840,000

1983 年 1 月第 1 版　1983 年 1 月第 1 次印刷

印数 1－4,200 册

书号：15196・102　　定价：3.30 元

责任编辑　　高志一

前　　言

近几十年来，由于信息光学的发展和激光技术的出现，光学这门古老的科学焕发了前所未有的青春活力。在工程光学领域内，新技术不断涌现，应用范围日趋扩大，它以一系列杰出的成就和潜在的应用，展现了广阔的发展前景。目前，它已成了科技界最活跃的领域之一。

科学技术的急速发展，使十年动乱期间中断了业务的专业人员，感到陌生与新鲜。为了抢回已丧失的时间，缩短已逐步拉大的差距，广大的科技人员和知识青年对学习文化科学知识和新技术，真是如饥似渴。对于这些同志来说，得到一套好教材是多么可贵！责任感促使我们在1978年初，约请王其祥同志编写一部除了传统内容之外还能反映现代面貌的光学教材。他是南京激光学会副理事长、华东工程学院教师，一贯热心于党的科技教育事业，对南京激光科技的发展曾作出过积极贡献。更可贵的是，在十年动乱期间，他没有中断过对业务的钻研。我们的想法得到了他的热情支持。在他的刻苦努力下，《工程光学原理》只花了一年多一点的时间就基本脱稿，当然其中包括了他多年工作的心血，相当一部分内容是他在十年动乱期间写成的。南京市科委及时将原稿的有关部分刻印出来，并组织有关人员进行学习讨论，提供意见。在此过程中，五机部激光情报网卢中尧、于祖兰等同志也给予了大力支持。王其祥同志深入地分析了各方面的意见，进行了认真细致的补充和修改。为了检验编写的质量，他先后在南京、石家庄等地的科技人员进修班上亲自对有关内容进行讲学，获得了普遍的好评。大家反映，《工程光学原理》内容丰富，实用性强，把经典的方法与近代的技术紧密地联系在一起，具有自己的特色。该书的物理概念清晰，数学分析细致，逻辑结构严谨，文笔流畅，深入浅出，通俗易懂，颇值一读。

该书在编写过程中，得到了华东工程学院和各有关方面的大力支持。徐立宏同志参与了第十章专业数学的部分编写工作；插图由王茂钧、李淑彬、刘根荣等同志绘制；特别是唐立寅老先生，认真审阅了全书，提出了许多宝贵意见。现在《工程光学原理》由江苏科学技术出版社正式出版，对此我感到由衷的高兴。预祝出版成功！

石　坚

1981年12月2日

序　　言

光学，是一门研究光的传播及其与物质相互作用的基础科学。它在近几十年内，有了很大的发展，并与许多科技领域发生了密切的联系。因此，这一学科是有关的科技人员所必须了解与掌握的基本学科之一。

早在1873年，詹姆斯·克拉克·麦克斯韦（James Clerk Maxwell）发表了名著《论电与磁》，建立了经典的电磁学理论，指出了光也是电磁波。光波与电磁波的统一，加速了整个物理学的发展，自然也大大加速了光学的发展。

近三十年来，信息学和通信理论对光学的发展产生了巨大的影响。原因很明显，无论是通信系统还是光学系统，都是用来收集或传递信息的。虽然两者存在差别：通信系统的信息，一般具有时间的性质；而光学系统的信息，则往往具有空间的性质。但这种差别在数学上是无关紧要的。这就是说，现象的类似，会导致数学表达方式的相似。两者均可采用以傅里叶分析为基础的表达方式。傅里叶变换被引入光学系统成象理论中，在形式上和内容上都已成为近代信息光学重大发展的起点。近代许多崭新的光学技术，都是在这一基础上发展起来的。

必须指出，在这些理论中，“衍射”这种物理现象，具有特殊的意义。基尔霍夫（G. Kirchhoff）的衍射理论，则为这套理论的发展奠定了坚实的基础。但是，由于这些理论要求具有比较高深的数学基础，所以通常的光学教材，往往只将结果直接列出来，而对它的来龙去脉一般则不作交代。《工程光学原理》在处理这些问题的时候，比通常的光学教材要深入一些。它对于近代光学中的某些基本问题，如衍射理论，薄膜光学、晶体光学、傅里叶光学、矩阵光学以及激光技术中的某些问题，阐述时总是考虑初学者的困难，尽量做到深入浅出、通俗易懂，关键问题讲得比较详细，并把数学分析与物理概念紧密结合起来。这对读者是有帮助的。

王其祥同志献出大量精力写出此书，为从事和学习这门科学的人提供了方便，应当受到人们的尊敬。

余瑞璜

目　　录

第一篇　几何光学

第一章　几何光学的基本原理

第二章　光线经过球面系统时的折射

第三章　理想光组理论

第四章　光组中的光束限制

第五章　傍轴矩阵光学

第六章　象　　差

第七章　典型光学系统

第八章　光能与光度学

第九章　外形尺寸计算举例

第二篇　光的干涉和衍射理论

第十章　专业数学

第十一章　光振动与光波

第十二章　干涉理论和干涉仪

第十三章 标量衍射理论

第十四章 高斯光束

第三篇 傅里叶光学

第十五章 透镜作用的分析

第十六章 光学传递函数

第十七章 空间滤波和光学信息处理

第十八章 全 息 术

第四篇 光在界面上和在各向异性媒质中的行为

第十九章 薄膜光学基础

第二十章 光的偏振

第二十一章 晶体光学基础

第一篇　几　何　光　学

第一章　几何光学的基本原理

所谓几何光学，就是在分析光学现象时，撇开光的波动本性，而仅以光的直线传播性质为基础，来研究光在透明媒质中传播问题的学科。它建立在由实际观察和直接实验所得到的几个基本定律之上。这几个基本定律就是：光的直线传播定律、光的独立传播定律、反射定律和折射定律。由于光的直线传播定律是光的实际行为的一种近似，故以它为基础的几何光学所给出的结果，也具有近似的性质，并且只能在有限的范围内应用。关于光传播问题的严格的解，可由波动光学来给出，几何光学只是波动光学在一定条件下的近似。由于工程技术中的实际问题，往往并不要求给出完全严格的解，也由于几何光学应用起来比较简便，所以它至今仍然是研究光传播问题的有力工具。它可以解决应用光学中相当大的一部分问题，对指导光学系统的设计具有重要作用。

发光点和光线的概念，是几何光学中的两个基本概念。从物理学的观点来看，发光点是一个辐射体，它具有一定的大小和体积，只是由于人们对它的观察距离远比它自身的尺寸大，才近似地把它看作是一个点。几何光学把上述概念理想化了，认为发光点是一个会辐射光能量的几何点，它没有大小和体积。这显然是对实际发光点概念的一种近似和抽象。在几何光学中，还用一条表示光的传播方向的几何线来代表光，称之为光线，并利用它来描述光的传播特点。几何光学的四个基本定律，也都是借助于光线的概念来表述的。

§1-1　光的直线传播定律与独立传播定律

光的直线传播定律：在均匀的各向同性的透明媒质中，光是沿直线传播的。这是一个牢固地建立在实验基础上的定律，有很深刻的意义。事实上直线的概念，显然也是通过对光学现象的观察而产生的。自古以来，在检验产品的平直程度时，都是以视线为准的。但是，深入研究表明，这个定律的应用范围有一定的限制。当一束光通过开孔的屏时，若开孔的线度足够大，则光能够很好地服从直线传播定律；若开孔的线度很小，小到可以与光的波长相比拟，则光将不服从直线传播定律。对于违反直线传播定律的各种光学现象，将在衍射理论中加以研究。

光的独立传播定律：当不同的光线以任意的方式会交于媒质中的任何一点时，这些光线相互之间都不发生影响，其中任何一条光线的传播与其它光线是否存在无关，而且这些光线在会聚点的作用是相加的。根据这一定律，我们可以把光束的传播问题化为光线的传播问

题。这是因为，光束中的每一条光线都是独立传播着的，所以要搞清光束在光学系统中的传播状况，只须搞清光束中的每一条光线在光学系统中的传播状况。

§1-2 光的反射定律和折射定律

先来说明，光在媒质中和两媒质的分界面上通过时所产生的一些现象。

任何媒质对在其中传播的光都有吸收作用，完全透明的不吸收光的媒质是不存在的。当光通过两种媒质的分界面时，产生的现象与界面的状况有关。如果界面是光学平滑的，则产生有规则的反射和折射；如果界面是麻沙面，则产生漫反射和漫折射。反射和折射现象，通常是同时存在的；只有在特殊条件下才不同时出现，如在全反射条件下就不存在折射。本节主要研究有规则的反射和折射，其中反射定律用来确定反射光的传播方向，折射定律用来确定折射光的传播方向。

§1-2-1 反 射 定 律

光的反射定律：入射光线、在入射点处的反射面法线、反射光线三者位于同一平面内，其中入射线和反射线分布在法线的两侧，并且入射角和反射角大小相等。反射定律的矢量形式为

$$\vec{A}\times\vec{N}=\vec{A}_r\times\vec{N} \tag{1-2-1}$$

其中的$\vec{A}$和$\vec{A}_r$分别为入射线和反射线上的单位矢量，其指向与光线的传播方向相同；$\vec{N}$为法线方向的单位矢量，正方向规定为从入射点指向入射线所在媒质，如图 1-2-1 所示。

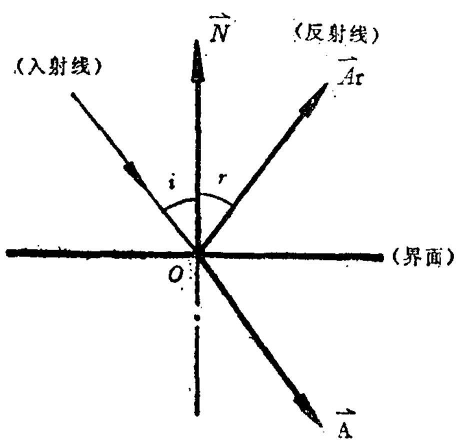


图 1-2-1

这是因为，若把矢量$\vec{A}$和$\vec{N}$决定的平面记为$\omega(\vec{A},\ \vec{N})$，把$\vec{A}_r$和$\vec{N}$决定的平面记为$\omega(\vec{A}_r,\ \vec{N})$，并令

$$\vec{B}=\vec{A}\times\vec{N},\qquad \vec{C}=\vec{A}_r\times\vec{N}$$

则根据矢积定义，有

$$\vec{B}\perp\omega(\vec{A},\ \vec{N}),\qquad \vec{C}\perp\omega(\vec{A}_r,\ \vec{N})$$

由公式 1-2-1 得$\vec{B}=\vec{C}$，所以$\vec{B}\parallel\vec{C}$，故有

$$\omega(\vec{A},\ \vec{N})\parallel\omega(\vec{A}_r,\ \vec{N})$$

因$\vec{N}$为两平面所公有，故两者平行就意味着两者重合。可见，若公式 1-2-1 成立，则$\vec{A}$、$\vec{N}$、$\vec{A}_r$三矢量必共面；这正是反射定律的第一部分内容。此外，由公式 1-2-1 还可得

$$AN\sin(\widehat{\vec{A},\ \vec{N}})=A_rN\sin(\widehat{\vec{A}_r,\ \vec{N}})$$

由于$A=N=A_r=1$，故有

$$\sin(\widehat{\vec{A},\ \vec{N}})=\sin(\widehat{\vec{A}_r,\ \vec{N}})$$

由图 1-2-1 根据上式可得

$$\sin(180^\circ-i)=\sin r,\qquad \sin i=\sin r$$

故有

$$i = r$$

这正是反射定律的第二部分内容。

在实际应用矢量形式的反射定律时，还存在如何根据$\vec{A}$和$\vec{N}$直接求出$\vec{A}_r$的问题。下面来说明之。

分别用$\vec{A}$、$\vec{A}_r$、$\vec{N}$对方程式1-2-1两端作矢积，得

$$\begin{cases} \vec{A}\times(\vec{A}\times\vec{N}) = \vec{A}\times(\vec{A}_r\times\vec{N}) \\ \vec{A}_r\times(\vec{A}\times\vec{N}) = \vec{A}_r\times(\vec{A}_r\times\vec{N}) \\ \vec{N}\times(\vec{A}\times\vec{N}) = \vec{N}\times(\vec{A}_r\times\vec{N}) \end{cases}$$

利用矢量恒等式

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

将前面三式的两端分别展开，并注意到

$$\vec{A}\cdot\vec{A} = \vec{A}_r\cdot\vec{A}_r = \vec{N}\cdot\vec{N} = 1$$

可得

$$\begin{cases} \vec{A}(\vec{A}\cdot\vec{N}) - \vec{N} = \vec{A}_r(\vec{A}\cdot\vec{N}) - \vec{N}(\vec{A}\cdot\vec{A}_r) & (1\text{-}2\text{-}2) \\ \vec{A}(\vec{A}_r\cdot\vec{N}) - \vec{N}(\vec{A}\cdot\vec{A}_r) = \vec{A}_r(\vec{A}_r\cdot\vec{N}) - \vec{N} & (1\text{-}2\text{-}3) \\ \vec{A} - \vec{N}(\vec{N}\cdot\vec{A}) = \vec{A}_r - \vec{N}(\vec{N}\cdot\vec{A}_r) & (1\text{-}2\text{-}4) \end{cases}$$

将1-2-2与1-2-3两式相加，得

$$\vec{A}(\vec{A}\cdot\vec{N} + \vec{A}_r\cdot\vec{N}) = \vec{A}_r(\vec{A}\cdot\vec{N} + \vec{A}_r\cdot\vec{N})$$

因为$\vec{A}\neq\vec{A}_r$，所以上式成立就意味着

$$\vec{A}\cdot\vec{N} + \vec{A}_r\cdot\vec{N} = 0 \quad 或 \quad \vec{N}\cdot\vec{A} = -\vec{N}\cdot\vec{A}_r$$

把上列结果代入公式1-2-4，即得

$$\vec{A}_r = \vec{A} - 2\vec{N}(\vec{N}\cdot\vec{A}) \tag{1-2-5}$$

利用上式便可根据$\vec{A}$和$\vec{N}$求出$\vec{A}_r$。

§1-2-2 折　　射　　定　　律

光的折射定律：入射光线、在入射点处的折射面法线、折射光线三者位于同一平面内，其中入射线和折射线分布在法线的两侧，并且入射角i的正弦与折射角i'的正弦之比，是一个仅与两媒质的光学性质及光的波长有关的常数，它与i和i'的大小无关，亦即

$$\frac{\sin i}{\sin i'} = \frac{n'}{n} \quad 或 \quad n\sin i = n'\sin i' \tag{1-2-6}$$

式中的n和n'为两媒质的折射率，其定义为

$$n = \frac{c}{v}, \qquad n' = \frac{c}{v'} \tag{1-2-7}$$

c为真空中的光速，v和v'分别为光在两媒质中的传播速度。通常把公式1-2-6中的$n\sin i$称为光学不变量。

折射定律的矢量形式为

$$n(\vec{A}\times\vec{N}) = n'(\vec{A}'\times\vec{N}) \tag{1-2-8}$$

其中的$\vec{A}'$是折射线上的单位矢量，正方向与光线的传播方向相同，如图1-2-2所示。

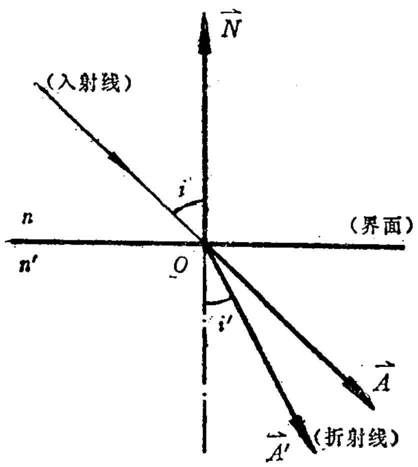


图 1-2-2

这是因为，由公式 1-2-8 可得

$$\omega(\vec{A},\ \vec{N}) \parallel \omega(\vec{A}',\ \vec{N})$$

上列两平面平行，意味着$\vec{A}$、$\vec{N}$、$\vec{A}'$三矢量共面；这正是折射定律的第一部分内容。由公式 1-2-8 和图 1-2-2 还可得

$$n(AN)\sin(\vec{A}\widehat{,}\vec{N}) = n'(A'N)\sin(\vec{A}'\widehat{,}\vec{N})$$
$$n\sin(180^\circ - i) = n'\sin(180^\circ - i')$$
$$n\sin i = n'\sin i'$$

这正是折射定律的第二部分内容。下面来说明：如何利用公式 1-2-8，根据n、n'、$\vec{A}$、$\vec{N}$来确定$\vec{A}'$？

用$\vec{N}$对 1-2-8 式两端作矢积，得

$$n[\vec{N}\times(\vec{A}\times\vec{N})] = n'[\vec{N}\times(\vec{A}'\times\vec{N})]$$

仿前，利用矢量恒等式将上式两端分别展开，得

$$n[\vec{A} - \vec{N}(\vec{N}\cdot\vec{A})] = n'[\vec{A}' - \vec{N}(\vec{N}\cdot\vec{A}')] \tag{1-2-9}$$

又因为

$$\vec{A}\cdot\vec{N} = AN\cos(\vec{A}\widehat{,}\vec{N}) = \cos(180^\circ - i) = -\cos i$$
$$\vec{A}'\cdot\vec{N} = A'N\cos(\vec{A}'\widehat{,}\vec{N}) = \cos(180^\circ - i') = -\cos i' =$$
$$= -\frac{1}{n'}\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2 i} = -\frac{1}{n'}\sqrt{n'^2 - n^2 + n^2(\vec{A}\cdot\vec{N})^2}$$

由此得

$$n'(\vec{A}'\cdot\vec{N}) = -\sqrt{n'^2 - n^2 + n^2(\vec{A}\cdot\vec{N})^2}$$

将上式代入公式 1-2-9 并解出$\vec{A}'$，即得计算$\vec{A}'$的几种表达式：

$$\vec{A}' = \frac{n}{n'}\vec{A} - \vec{N}\left[\frac{n}{n'}(\vec{N}\cdot\vec{A}) - (\vec{N}\cdot\vec{A}')\right] = \frac{n}{n'}\vec{A} + \vec{N}\left[\frac{n}{n'}\cos i - \cos i'\right] =$$
$$= \frac{n}{n'}\vec{A} - \vec{N}\left\{\frac{n}{n'}(\vec{N}\cdot\vec{A}) + \sqrt{1 + \left(\frac{n}{n'}\right)^2\left[(\vec{N}\cdot\vec{A})^2 - 1\right]}\right\} \tag{1-2-10}$$

§1-2-3 两定律数学形式的统一

将反射定律与折射定律相比较，便可发现，两定律有共同之处，也有不同之处；三线共面、异侧分布是共同的，但反射角和折射角的数值却是不同的。只要作一些补充规定，就可以把两者在形式上统一起来。补充规定有两条，即：

1．入射角、反射角、折射角都必须视为代数量，正负号规则为：以法线为起始线转向光线（锐角），顺时针者为正，逆时针者为负，图上永标绝对量；

2．可以利用折射定律的数学形式来表示反射定律，但须令公式中的$n = -n'$。

事实上只要将以上两个条件代入公式 1-2-8，即得

$$-\vec{A}\times\vec{N}=\vec{A'}\times\vec{N} \tag{1-2-11}$$

由此得

$$-AN\sin(\widehat{\vec{A},\ \vec{N}})=A'N\sin(\widehat{\vec{A'},\ \vec{N}})$$

$$-(\widehat{\vec{A},\ \vec{N}})=(\widehat{\vec{A'},\ \vec{N}}) \quad 或 \quad -i=r \tag{1-2-12}$$

这正是引入符号规则以后的反射定律。

两定律采用统一的数学形式，有很多好处，主要在于可将折射系统的公式应用到反射系统中去；为此，只需令公式中的 $n'=-n$。但须注意，在推导公式的过程中，必须始终遵守角量的正负号规则。

§1-2-4 全 反 射

折射现象在什么条件下不再存在？下面来分析之。

如果入射线所在媒质的折射率 n，大于折射线所在媒质的折射率 n'，则必有 $i<i'$。又因为当 i 增大时 i' 也必相应地增大，故在上述条件下必存在一个 i_m 值，它满足当 $i=i_m$ 时有 $i'=90°$。这样的 i_m 可由下列方程来确定：

$$n\sin i_m=n'\sin 90°$$

$$i_m=\arcsin\frac{n'}{n} \tag{1-2-13}$$

在 $n>n'$ 时上列方程总是有解的。

$i'=90°$ 意味着折射光线正好沿分界面射出，这是折射现象存在与否的临界状态。如果 $i>i_m$，则方程式

$$n\sin i=n'\sin i'$$

便失去意义。这是因为，$\sin i'$ 不可能获得大于 1 的值。实验表明，这时的折射现象不再存在，光线不从第一媒质进入第二媒质；所有的光能量在到达界面以后，依照反射定律全部被反射回原媒质。这种现象叫做全反射，i_m 称为全反射临界角。

由上面的分析可知，只有当 $n>n'$ 时全反射临界角 i_m 才有意义；只有当 $n>n'$ 并且 $i>i_m$ 时才能产生全反射。

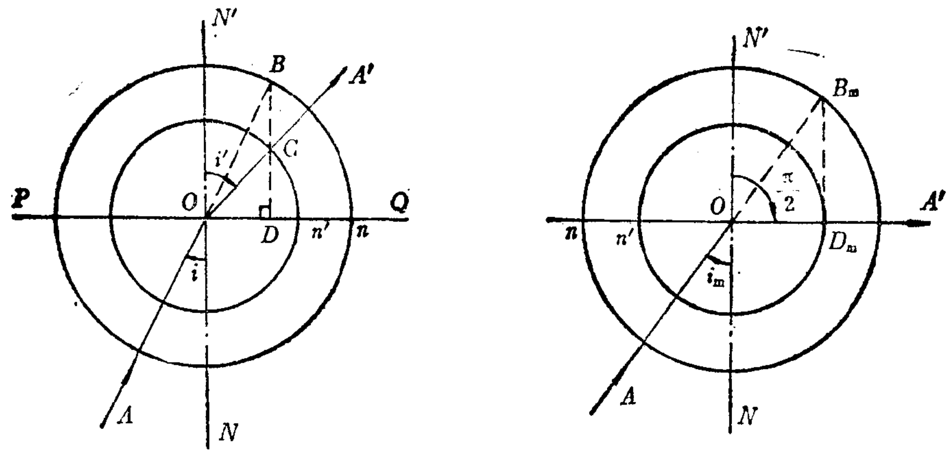
全反射现象在工程技术中有许多重要的应用，如用全反射棱镜来代替平面镜，又如在光学纤维中就是利用光在光纤内壁上的多次全反射，将光从一端传到另一端的。

§1-2-5 折射定律的作图表示法

为了避免三角计算，在某些工程技术问题中，用作图的方法来求折射线，往往是比较简便的。下面来介绍这一方法。

在图 1-2-3 a 中，PQ 为界面，AO 为入射线，NON' 为界面在入射点 O 处的法线。为了求出折射线，以 O 为中心，以 n 和 n' 的数值为半径作两同心圆。延长 AO 使其与 n 圆相交于 B 点。过 B 点向界面 PQ 作垂线 BD，将 BD 与 n' 圆之交点记为 C，则 OC 就是折射线的传播方向。这是因为由图 1-2-3 可得

$$\overline{OD}=\overline{OB}\sin i=\overline{OC}\sin i'$$



a．求折射线　　b．求临界角 i_m

图 1-2-3　用作图法求折射线

因 $\overline{OB} = n$，$\overline{OC} = n'$，故由上式即得

$$n \sin i = n' \sin i'$$

可见利用此法，只要知道了 n 和 n'，就可根据入射线来求折射线；当然，也可根据折射线来求入射线。例如在 $n > n'$ 时，令 $i' = 90°$，用作图法求出相应的入射线，该线的入射角就是全反射临界角 i_m，如图 1-2-3 b 所示。

此法的优点是简便、迅速、直观，缺点是精度不高。在晶体光学中，用类似的方法来求折射线，往往是比较方便的。

§1-3　费　马　原　理

在介绍费马原理以前，先引入一个物理量——光程。

设在均匀媒质中光的传播速度为 v，若把 Δt 时间间隔内光在该媒质中所走过的路程记为 s，则有

$$s = v\,\Delta t$$

再把这段时间间隔内光在真空中所走过的路程记为 L，则有

$$L = c\,\Delta t = \frac{c}{v}\,v\,\Delta t = ns \tag{1-3-1}$$

其中 c 为真空中的光速，n 为媒质的折射率。

可见，媒质的折射率 n 和光在其中所走过的路程 s 的乘积 ns，具有鲜明的物理意义；其值等于在相同的时间间隔内光在真空中所走过的路程。

光程定义　把媒质中某一路径的长度 s 与该路径中媒质折射率 n 的乘积，称为与该路径相对应的光程，记为 L。即

$$L = ns \tag{1-3-2}$$

如果在某一路径 AB 上，折射率是个变量 $n(s)$，则与该路径相对应的光程 L 要用曲线积分来表示，为

$$L = \int_{AB} n(s)\,ds \tag{1-3-3}$$

其中 s 为路径的坐标参量，$n(s)$ 是路径 AB 上 s 点处的折射率，如图 1-3-1 所示。

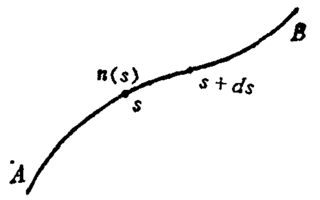


图 1-3-1

费马原理 光沿着光程 L 为极值的路径传播。通俗地讲，由 A 点到 B 点从几何方面来讲存在着无限多条可能的路径，每条路径都对应着一个光程值，光由 A 点传播到 B 点的实际光路被包含在这些几何上可能的路径之中。任何一条实际的光路，其光程值都有一个共同的特点，就是它们均满足极值条件。亦即实际光路所对应的光程，或者是所有光程可能值中的最小值，或者是所有光程可能值中的最大值，或者是某一稳定值。若把任意一条几何上可能的路径记为 l，则与 l 对应的光程 $L(l)$ 可以用下列曲线积分来表示：

$$L(l)=\int_l n dl \tag{1-3-4}$$

对应着不同的路径 l，光程 $L(l)$ 可能取不同的值。如果广义地把路径 l 看作是自变量，则光程 $L(l)$ 可以视为是 l 的函数。这种形式的函数取极值的条件，就是公式 1-3-4 所示之积分的变分为零，亦即

$$\delta L(l)=\delta\int_l n ds=0 \tag{1-3-5}$$

这就是费马原理的数学表达式，其中的 δ 为变分符号。

我们可以通过对一些特例的考察，来验证费马原理的正确性。

光的直线传播定律显然与费马原理是一致的。承认费马原理，很容易导出光的直线传播定律来。这是因为两点之间的路径以直线的长度为最短，故在均匀各向同性的媒质中直线所对应的光程为最小光程。根据费马原理，该直线就是光由一个端点传播到另一个端点的实际光路。

光的反射定律也与费马原理一致。承认费马原理，也可以导出光的反射定律。为此只须证明，如图 1-3-2 所示，对于由 A 点经界面再回到 B 点的任何一条路径来说，满足反射定律的路径之光程为最小。

在图中，设 AOB 是满足反射定律的路径，若把 B 点关于反射面 PQ 之对称点记为 B'，则易证 A、O、B' 三点共线，且有

$$\overline{AO}+\overline{OB}=\overline{AO}+\overline{OB'}=\overline{AB'}$$

又设 D 为界面上的任意点，则有

$$\overline{AD}+\overline{DB}=\overline{AD}+\overline{DB'}>\overline{AB'}$$

所以

$$\overline{AD}+\overline{DB}>\overline{AO}+\overline{OB}$$

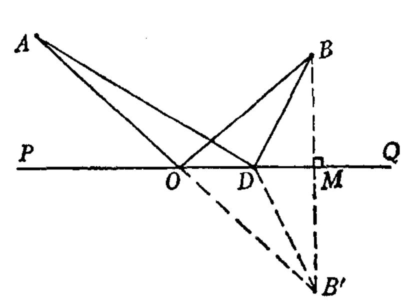


图 1-3-2

这就证明了在一切可能的经界面的折线路径中，满足反射定律的路径之光程为最短。根据费马原理，这条路径就是光由 A 点经界面再传播到 B 点的实际光路。

光的折射定律也与费马原理一致，它也可以直接从费马原理推导出来。为此只须证明，如图 1-3-3 所示，在一切从 A 点穿过界面到 B 点的几何路径中，满足折射定律的路径之光程为最小。

设任一路径 ADB 之光程为 L_{ADB}，则由图 1-3-3 得

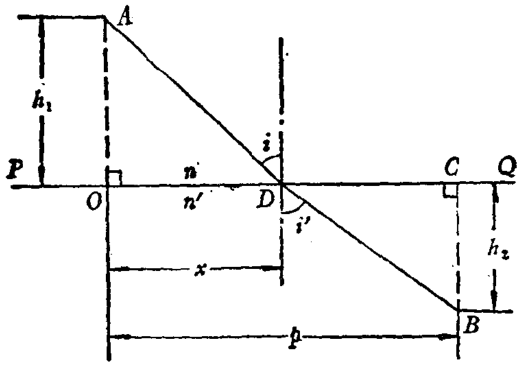


图 1-3-3

$$L_{ADB}=n\overline{AD}+n'\overline{DB}=n\sqrt{h_1^2+x^2}+n'\sqrt{h_2^2+(p-x)^2} \tag{1-3-6}$$

如果ADB是光由A点传播到B点的实际光路，则根据费马原理，光程L_{ADB}必满足极值条件，故有

$$\frac{d}{dx}L_{ADB}=n\frac{x}{\sqrt{h_1^2+x^2}}-n'\frac{p-x}{\sqrt{h_2^2+(p-x)^2}}=n\sin i-n'\sin i'=0 \tag{1-3-7}$$

由此得

$$n\sin i=n'\sin i' \tag{1-3-8}$$

因$\frac{d^2}{dx^2}L_{ADB}>0$，故满足上式的光程为最小光程。可见，由费马原理所决定的光路与由折射定律所决定的光路，两者是一致的。

由椭圆定义可知，对于椭圆形凹面镜的反射来说，把两个焦点F_1和F_2选为考察点，就相当于光程为稳定值时的情形，如图 1-3-4 所示。

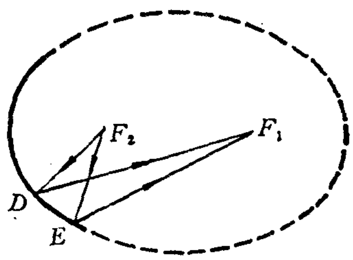


图 1-3-4

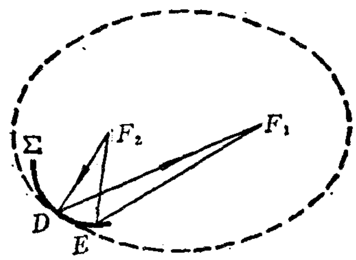


图 1-3-5

为了说明光沿最大光程所对应的路径传播的确是存在的，如图 1-3-5 所示，我们作一个特殊的反射面Σ，其上只有一点D与椭圆相切，其余各点都在椭圆内，则对于椭圆的两个焦点F_1与F_2来说，实际反射光路F_1DF_2就对应了最大光程。

综上所述可以看出，我们可以直接从费马原理导出光的直线传播定律、反射定律和折射定律。故费马原理更深刻地反映了光的传播规律。

§1-4 物 与 象 的 概 念

物与象的概念，是几何光学的基本概念之一。为了便于理解，先来考察一个例子。