高等学校教材

线性代数与解析几何

Linear Algebra and Analytic Geometry

廉庆荣　代万基
赵立中　杨雪峰　编著

CHEP
高等教育出版社

Springer
施普林格出版社

高等学校教材

线性代数与解析几何

廉庆荣　代万基
赵立中　杨雪峰　编著

（大连理工大学应用数学系）

CHEP
高等教育出版社

Springer
施普林格出版社

本书将线性代数与解析几何知识有机结合，建立了以矩阵为主线的新体系，使学生在较少学时内掌握更多的知识．全书共分六章：矩阵、行列式与 n 元线性方程组；矢量代数与几何应用；矩阵的秩与线性方程组；方阵的特征值与对角化；二次型与二次曲面；线性空间及其线性变换．每一节后都有丰富的习题，书末有计算题的答案．

本书思路清晰，结构简明，重点突出，难点分散，概念准确，逻辑严谨，表达简捷流畅，易于自学．本书是为高等院校理工科非数学各专业本科生编写的教材，也可以作为大专院校或成人教育学院的教材，还可供考研生、自学者和广大科技工作者等参考．

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与解析几何／廉庆荣 等编著．－北京：高等教育出版社；海德堡：施普林格出版社，2000．8

ISBN 7－04－008692－1

Ⅰ．线… Ⅱ．廉… Ⅲ．①线性代数 ②解析几何 Ⅳ．0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 64548 号

责任编辑：徐　可　封面设计：李卫青　责任印制：陈伟光

线性代数与解析几何

廉庆荣　代万基　赵立中　杨雪峰　编著

出版发行	高等教育出版社　施普林格出版社		
社　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	邮政编码	100009
电　话	010－64054588	传　真	010－64014048
网　址	http://www.hep.edu.cn		
经　销	新华书店北京发行所		
印　刷	北京民族印刷厂		
开　本	880×1230　1/32	版　次	2000 年 8 月第 1 版
印　张	8.25	印　次	2000 年 8 月第 1 次印刷
字　数	230 000	定　价	14.00 元

前　言

数学是研究现实中数量关系和空间形式的科学，代数学、几何学和分析学是数学这座大厦的三大基石.

线性代数是代数学中研究线性问题的学科，是处理离散量的基础；解析几何是用代数的方法研究几何问题的学科.它们不仅是学习多元微积分、微分方程、概率统计和计算方法等工科数学课以及其它专业课的数学基础，而且在自然科学、社会科学和工程科学的很多领域具有广泛的应用.尤其是随着计算机的普遍使用，线性代数和解析几何的作用越来越大，它们的地位也显得越来越重要.

线性代数具有较强的逻辑性和抽象性，解析几何具有较强的可视性和形象性.学习本书不仅要掌握它们的主要知识及相互联系，而且也要从中学到科学的思想方法，培养良好的数学素质以及较强的逻辑思维与推理能力、抽象思维与形象思维能力、数学表达与概括能力，以及综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力.

本书主要介绍矩阵及其各种运算(初等变换、矩阵变换也在内)；三个数值特性(行列式、秩和特征值)；方阵的对角化；线性方程组；向量组和向量空间；二次型；矢量代数；空间的平面与直线；空间的曲面与曲线；并简要介绍线性空间和内积空间及其线性变换.

本书在内容的取材与处理以及例题、思考题和习题的配备上具有独到之处，具体特点如下：

(1) 本书抓住线性代数与解析几何的主要内容及内在联系建立新体系. 在线性代数部分，以矩阵为主线，重点研究矩阵，将线性方程组、向量组和二次型等与矩阵相对应，把各主要内容有机地联系在一起，只要掌握住矩阵的知识，就不难掌握线性代数的主要内容.在解析几何部分，以矢量为工具用代数的方法研究空间的平面与直线以及空间的曲

面与曲线，这部分内容既是线性代数基本知识的应用，又给抽象的线性代数知识以形象化解释，本书将二者紧密地结合在一起，使得解析几何的研究更深入，同时又使很多代数问题更直观. 本书的系统性较强，便于读者掌握本书主要内容的内在规律.

(2) 根据教育部对工科线性代数和解析几何教学的基本要求和工科的实际需要，并体现出数学教材的特点，我们对内容进行了精心选取和合理编排，加强基础，突出重点. 基本理论和方法都有详细论述，并配备典型例题帮助读者理解和掌握. 删减了传统教材中一些对工科不必要的内容，对过渡性知识和次要知识只进行简要介绍或列入思考题和习题. 经教学实践证明，这样做，既可以使读者以较少学时牢固地掌握主要知识，又能获知较多的知识点和信息量.

在计算上，淡化了技巧. 把重点放在便于用计算机实现的初等变换求行列式的值、解线性方程组、求矩阵的逆和秩、求向量组的秩和极大无关组以及判别对称阵的正(负)定性等内容上.

在内容的处理上，采取了如下措施：

一是对结构采用模块化，重点知识的有关内容相对集中，适时进行归纳总结.

二是采用矩阵形式表达和论证问题. 例如，将线性方程组的理论与计算，以及向量组的线性相关性、秩和极大无关组的问题化为矩阵形式加以研究解决；强调判别二次型的正定性的实质就是判别实对称阵的正定性，化二次型为标准形的实质就是实对称阵的对角化等.

三是充分利用以矩阵列分块为主的分块技术表达和论述问题. 例如，矩阵、向量组和线性方程组之间关系的研究；行列式和秩的性质等的证明；施密特正交化公式的得出等等.

经过上述处理，不仅使本书脉络清晰，表达简捷，而且还揭示了内容之间的联系，便于读者掌握研究问题的思想和方法，有利于教与学.

(3) 本书重要的基本概念由引例引出. 这些引例除了帮助读者理解概念之外，还可以使读者从中悟出科学研究的一些基本思想和方法(如对应法、归纳法、类比法、联想法和抽象法等)，它们与读者在全书中

领悟到的数学思想一样,有利于启迪读者的智慧,培养创新意识.

每一节后都有各式各样的思考题和丰富的习题,有利于加深对基本概念和主要知识的理解,巩固和掌握所学理论与方法,加强各种思维方法和能力的训练,进一步拓宽知识面.

(4) 本书思路清晰,结构简明,循序渐进,难点分散,概念准确,逻辑严谨,表达简捷流畅.本书还尽量使用现代数学语言、术语和国际通用数学符号,便于读者进一步学习和研究.

本书是根据近年来工科数学教学改革会议精神,汲取国内外教材的精华,经过大连理工大学几年来的教学改革实践,在校内教材《线性代数》的基础上不断加工改编而成的.其中有一些提法和处理方法是我们首次提出来的.是否妥当,有否错误,敬请各位专家、同行及读者不吝赐教!

本书可作为高等院校理工科非数学各专业的线性代数与解析几何课程(第一学期,约需56学时)的教材;去掉书中有关空间解析几何的内容,可作为第二或第三学期线性代数课程(约需48学时)的教材;删掉第六章全部内容,不讲带"*"号的内容,对行列式的性质都不证明,根据所需对内容和证明酌情处理后,也可作教学约需32学时的线性代数课教材.此外,本书还可供大专院校、成人教育院校师生,考研生,自考生和科技工作者等参考.

本书正文带"*"号的部分或为拓宽与加深的内容,或为较难与较繁的证明,任课教师可根据教学对象和学时酌情处理.此外,带"*"号的习题较难些,不宜留为作业.

本书由廉庆荣主编、代万基副主编,其中第一、三、四章由廉庆荣编写,第二章由赵立中编写,第五章由代万基编写,第六章由杨雪峰编写.全书的统稿和加工由廉庆荣和代万基共同完成,书稿的校对由赵立中和杨雪峰共同完成.

在本书编写过程中,得到了大连理工大学教务处和应用数学系领导的大力支持;得到了徐利治、施光燕、施吉林、罗远诠四位教授的指教和孙丽华教授的帮助;冯红和王毅两位博士审校了书稿并提出了宝贵

的修改建议;陈桂芝博士等近 10 位教师曾与编者一道进行线性代数教改实践,他们对本书的不断完善起到很大作用;我们还得到了应用数学系其他教职员的关心和支持;高等教育出版社 CHEP - Springer 编辑室约稿出版,徐可同志热情支持.在此我们一并表示衷心的感谢!

编 者

2000 年 7 月于大连

本书符号说明

$\boldsymbol{A}$	矩阵
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$	$\boldsymbol{A}$ 的转置阵
$\boldsymbol{A}^{-1}$	$\boldsymbol{A}$ 的逆阵
$\boldsymbol{A}^{k}$	$\boldsymbol{A}$ 的 k 次幂
$\boldsymbol{A}_{k}$	$\boldsymbol{A}$ 的 k 阶顺序主子阵
$\boldsymbol{A}(i,j)$	$\boldsymbol{A}$ 的元素 a_{ij} 的余子阵
$\tilde{\boldsymbol{A}}$	$\boldsymbol{A}$ 的代数余子式矩阵
$\bar{\boldsymbol{A}}$	$\boldsymbol{A}$ 的共轭阵
$\boldsymbol{a}$	向量
$\boldsymbol{a}_j$	$\boldsymbol{A}$ 的第 j 个列向量
$\tilde{a}_{ij}$	$\boldsymbol{A}$ 的元素 a_{ij} 的代数余子式
$\bar{\boldsymbol{a}}$	向量 $\boldsymbol{a}$ 的共轭
$\Vert \boldsymbol{a} \Vert$	向量 $\boldsymbol{a}$ 的长度
$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$	向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的内积
$\vec{a}$	矢量
$\vert\vec{a}\vert$	矢量 $\vec{a}$ 的长度
$\vec{a}\cdot\vec{b}$	矢量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的数量积
$\vec{a}\times\vec{b}$	矢量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的矢量积
$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$	矢量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 的混合积
$(\vec{a})_{\vec{b}}$	矢量 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影.
$C[a,b]$	所有在 $[a,b]$ 上连续函数的集合
$d(\cdot,\cdot)$	距离
$\det(\boldsymbol{A})$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式
$\det(\boldsymbol{A}_k)$	$\boldsymbol{A}$ 的 k 阶顺序主子式
$\mathrm{diag}(\cdots)$	对角阵
$\dim(\cdot)$	维数
$\boldsymbol{E}$	单位阵
$\boldsymbol{E}_{i,j}$	对调阵
$\boldsymbol{E}_{i}(\alpha)$	倍乘阵
$\boldsymbol{E}_{i,j}(\alpha)$	倍加阵
$\boldsymbol{e}_j$	单位阵的第 j 列
$\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$	空间直角坐标系的基本矢量
$\min\{a,b\}$	a 和 b 取最小者
$\vec{n}$	平面的法矢量
$\boldsymbol{n}$	平面的法向量
$\boldsymbol{O}$	零矩阵
$\boldsymbol{0}$	零向量
$\vec{0}$	零矢量
$P_n[x]$	所有次数 $\leqslant n$ 的多项式的集合
$\mathbf{R}$	所有实数的集合
$\mathbf{R}^{n}$	所有 n 元实向量的集合
$\mathbf{R}^{m\times n}$	所有 $m\times n$ 型实矩阵的集合
$r(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩
$\mathrm{span}\{\cdots\}$	生成空间
$\boldsymbol{s}$	直线的方向向量
$\vec{s}$	直线的方向矢量
$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹
Σ	连加
Π	连乘
$\in$	属于
$\bar{\in}$	不属于
$\subset$	包含于
$\forall$	对于所有（或任何）的
$\Leftrightarrow$	充分必要条件或当且仅当

目　　录

第一章　矩阵、行列式与 n 元线性方程组

矩阵和线性方程组在科学和工程中具有广泛应用，它们是线性代数重点研究的两个主要对象．而矩阵又是研究线性方程组和其他问题的有力工具．抓住并掌握住矩阵这条主线上的主要知识就会纲举目张很快地理解和掌握线性方程组等其他问题的主要知识．

行列式是方阵的重要数值特性，它在线性代数（尤其是矩阵的理论和计算）和解析几何中起着重要作用．

本章是全书的基础，主要介绍矩阵和向量的基本概念和运算；分块阵及其运算；初等变换与初等阵；方阵的行列式；可逆阵及其逆阵；正交阵和四个矩阵变换；n 元线性方程组有唯一解的充分条件及几个解法．

第一节　矩阵及其运算

线性代数是代数中研究线性问题的科学．众所周知，关于 x 和 y 的二元一次方程 $ax+by=c$ 在平面解析几何中表示一条直线，因此这个方程也称为二元线性方程．而研究关于 x 和 y 的二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = c \\ a_{21}x + a_{22}y = d \end{cases}$$

在平面解析几何中就是研究两条直线的关系．因此，这个方程组又称为二元线性方程组．这是一个简单的线性问题．

将二元线性方程组推广．我们把具有 n 个未知数的 n 个一次方程联立所得到的方程组叫做 n **元线性方程组**，简称为 n **元方程组**．这是最常见的一个数学模型，其一般形式为：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是未知数,余者都是常数.

这个 n 元方程组何时有唯一解,如有解,怎样求出这个解?研究解决这种一般性问题仅靠中学知识已不够用,必须寻找新的数学工具,这可以从下面的简例得到启发.

例 1 只用消元法解二元方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 = 7 \end{cases} \tag{1.2}$$

解 从(1.2)的第二个方程减去第一个方程的 2 倍,得到

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ \qquad x_2 = 1 \end{cases}$$

再从这个方程组的第一个方程减去第二个方程,得到

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases} \tag{1.3}$$

显然,这就是方程组(1.2)的解.□

不难看出,方程组(1.2)由 4 个系数和 2 个右端项唯一确定,而用什么符号代表未知数却无关紧要(比如,也可用 x 和 y 分别代替 x_1 和 x_2).确切地说,方程组(1.2)与数表:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

一一对应.这个数表称为矩阵.于是,方程组(1.2)的求解过程与下面的矩阵行变换过程

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{第 2 行} - 2 \times \text{第 1 行}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{第 1 行} - \text{第 2 行}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

一一对应.由于最后的矩阵与方程组(1.3)一一对应,因此从它的第三列就可得出(1.2)的解:

$$x_1 = 2,\quad x_2 = 1$$

这种解法的基本思想不难推广到求解 n 元方程组,我们很自然地就会想到用矩阵这个工具来研究线性方程组.

一、矩阵与向量

很多领域中的数量关系都要用矩阵来描述.将例 1 中三个方程组分别对应的三个两行三列的矩阵推广到一般,就得到矩阵这个重要的基本概念.

定义 1　由 $m \times n$ 个数 $a_{ij}(i = 1,2,\cdots,m;j = 1,2,\cdots,n)$ 所排成的 m 行 n 列的矩形数表

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

叫做 $m \times n$ **型矩阵**,简写成 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$(有时也用 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 表示).

m 和 n 分别叫做 $\boldsymbol{A}$ 的行数和列数;$a_{ij}(i = 1,2,\cdots,m;j = 1,2,\cdots,n)$ 叫做 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列元素.

除特殊约定外,本书均用英文大写黑体字母表示矩阵,如用 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$ 表示上面的数表.

元素全为实数的矩阵称为**实矩阵**,所有 $m \times n$ 型实矩阵的集合记作 $\mathbf{R}^{m\times n}$.本书主要研究实矩阵,如果不作说明,书中的矩阵均为实矩阵.

元素全为零的矩阵称为**零矩阵**,用 $\boldsymbol{O}$ 来表示.如果需指出其行数和列数,则用 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$ 表示 $m \times n$ 型零矩阵.

$n \times n$ 型矩阵 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{n\times n}$ 常称为 n **阶方阵**,其中元素 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 叫做 $\boldsymbol{A}$ **的对角元**.n 个对角元之和叫做 $\boldsymbol{A}$ **的迹**,记作 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$,即

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

n 个对角元的连线叫做 $\boldsymbol{A}$ **的主对角线**,不在主对角线上的元素叫做**非对角元**.

对角元全为 1 并且非对角元全为零的方阵叫做**单位阵**，本书专用 $\boldsymbol{E}$(有些书用 $\boldsymbol{I}$) 表示.如果需明确其阶数，就用 $\boldsymbol{E}_n$ 或 $\boldsymbol{E}=[e_{ij}]_{n\times n}$ 表示 n 阶单位阵，其中

$$e_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

例如，三阶单位阵为

$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

只有一行的矩阵叫做**行矩阵**，例如：$[1,2,3,4]$ 是由四个元素组成的行矩阵.

只有一列的矩阵叫做**列矩阵**，例如：

$$\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\\ 4\end{bmatrix}$$

是由四个元素组成的列矩阵.

这两个特殊的矩阵虽然形式上不同，但是其本质都是由 1,2,3,4 这组有顺序的数组成.

这类有序数组应用非常广泛.例如，复数 $a+\mathrm{i}b$ 与数组 $\{a,b\}$ 相对应；n 次多项式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

与数组 $\{a_0,a_1,\cdots,a_n\}$ 相对应；而方程组(1.1)的第一个方程和右端项分别与数组

$$\{a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n},b_1\}\quad 和\quad \{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$$

相对应，等等.有序数组是一个重要的数学模型，我们用向量这个重要概念来描述它.

定义 2　由 n 个有顺序的数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 所组成的数组

$$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$$

叫做 n **元向量**，$a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 称为该向量的第 i 个分量.

分量全是实数的向量叫做**实向量**. 本书主要讨论实向量,如果不做说明,所讨论的向量都是实向量.

分量全为零的向量叫做**零向量**,记作 $\mathbf{0}$. 需要区别时,用 $\mathbf{0}_n$ 表示 n 元零向量.

定义 2 中的向量既可以写成行矩阵的形式$[a_1,a_2,\cdots,a_n]$,相应地,把它叫做 n 元**行向量**;又可以写成列矩阵的形式,相应地,把它叫做 n 元**列向量**,并专门用英文小写黑体字母表示:

$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}$$

全体实的 n 元列向量的集合记作 $\mathbf{R}^n$.

值得注意的是,上面的行向量和列向量作为矩阵不是同一个矩阵,但可以表示同一个向量.

为便于清晰地表达和论述,本书采用列向量的形式表示向量,即后文中未注明的向量均指列向量.

不难看出,向量与矩阵有着密切的联系:向量的两种形式都是特殊的矩阵;矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$ 的每一行都是 n 元行向量,把它们称为 $\boldsymbol{A}$ **的行向量**,而 $\boldsymbol{A}$ 的每一列都是 m 元列向量,把它们称为 $\boldsymbol{A}$ **的列向量**,记作 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$. 即

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{bmatrix},\quad\cdots,\quad \boldsymbol{a}_n=\begin{bmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{bmatrix}$$

显然,三阶单位阵 $\boldsymbol{E}$ 的三个列向量为

$$\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{e}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

以后专用 $\boldsymbol{e}_j\in\mathbf{R}^n$ 表示第 j 个元素为 1, 其余元素全为零的 n 元列向量,