

线性代数简明教程

雷春達 编著



重庆大学出版社



高等工科学学校教材

(工程数学)

线性代数简明教程

雷春逵 编 著

内 容 提 要

本书根据1980年高等学校工科数学教材编审委员会审订的《线性代数》部份的教学大纲编写的。内容共五章，分别是行列式、矩阵、线性方程组、线性空间与线性变换和二次型。学时数为32至40学时，前三章可供专科班使用，学时数为20至24学时。本书简明易懂、适合各类工科院校使用，也适合于工程技术人员及广大代数爱好者自学。

线性代数简明教程

雷春逵 编著

责任编辑：谢晋洋

重庆大学出版社出版
新华书店重庆发行所发行
重庆大学出版社印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：4.5 字数：101千
1987年7月第1版 1987年7月第1次印刷
印数：1—7,200

标准书号：ISBN 7-5624-0018-0 统一书号：13408·6
O·4 定 价：0.65元

前 言

数学是自然科学及工程技术的基础，而线性代数又是现代数学各科的基础之一，因此线性代数在理论和应用上都是十分重要的。特别是现代科技的飞速发展，更离不开线性代数。

本书是在1981年编写的《线性代数讲义》基础上，经多次使用，并作过两次修改后，成为现在的《线性代数简明教程》。它具有以下特色：

1. 改变了一些传统的定义。原来“行列式”的定义，二、三阶用对角线法，三阶以上用 $|A| = \sum \pm a_{1P_1} a_{2P_2} \cdots a_{nP_n}$ 来定义，这样定义的缺点是有了二次定义，而且不便于用定义进行计算。现改为用任一行（列）的展开式来定义“行列式”，可使读者一开始就能计算 n 阶行列式，不需要讲置换和逆序及有关定理。编著者极其简单地证明了 n 阶行列式的性质。由此可提高读者的计算能力。

“正交变换”传统的定义很抽象，改用正交矩阵乘单位正交基来定义后，读者易于接受，并加强了与“满秩线性变换”的联系，使“正交变换”性质的证明也很简单。

“线性空间”及“线性变换”的定义也作了适当修改，使得“线性空间”的证明简化，抽象的“线性变换”具体化。

2. 提出了“化零法”（解决前三章各种计算问题的基本方法）和“行变换的标准形”，引进了“自由度”的概念，它们在解线性方程组的过程中起了重要的作用。

3. 重视了向量组的秩与矩阵的秩之间的联系、 n 维向量与 n 维向量空间维数的关系。

4. 线性代数的难点是 n 维向量、 n 维线性空间、线性变换及正交变换。经过由具体到抽象、由浅入深、由特殊到一般的处理后，使读者易于掌握并应用。

5. 表达形式简单。行列式、线性方程组、线性变换、正交变换及二次型均用矩阵来表示。

6. 本书语言简练，理论结构严密。每章有小结。每次课后有适量习题，书末附有参考答案，读者使用方便。

在编写和使用过程中，本教研室的教师提出了宝贵的意见。在出版过程中，得到本院各级领导的大力支持，在此一并致谢！

由于本人业务水平及教学经验都很肤浅，书中缺点、错误难免，欢迎广大读者批评指正。

雷春逵

1985.5. 写于四川轻化工学院

目 录

第一章 行列式	(1)
§1 n 阶行列式的定义.....	(1)
§2 行列式的性质.....	(8)
§3 高阶行列式的计算.....	(16)
§4 行列式的乘法及 Cramer 定理.....	(18)
第二章 矩阵	(23)
§1 n 维向量的概念.....	(23)
§2 向量的线性相关性.....	(25)
§3 矩阵及其运算.....	(32)
§4 逆矩阵.....	(40)
§5 分块矩阵.....	(43)
§6 初等变换与初等矩阵.....	(49)
§7 矩阵的秩及其标准形.....	(54)
第三章 线性方程组	(66)
§1 线性方程组的解.....	(66)
§2 线性方程组解的结构.....	(70)
第四章 线性空间与线性变换	(80)
§1 n 维线性空间.....	(80)
§2 基底的正交单位化.....	(88)
§3 线性子空间.....	(91)
§4 线性变换及其运算.....	(92)
第五章 二次型 (双线性型)	(99)
§1 二次型与对称矩阵.....	(99)

§2 化二次型为法式及标准型.....	(101)
§3 二次型的分类及判定.....	(111)
§4 正交变换与特征方程.....	(113)
习题答案.....	(127)

第一章 行列式

§1 n 阶行列式的定义

在中学里我们学习了二、三阶行列式，对于一般情况，我们给出 n 阶行列式的定义。

定义一 规定一个元 a_{11} 的行列式为 a_{11} ，并记为 $|a_{11}| = a_{11}$ 。设 $n-1$ 阶行列式已有定义。用 n^2 个字母（或数字） a_{ij} ， $i, j = 1, 2, \dots, n$ ，把它们排成 n 行 n 列的一个正方形（方阵）

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} .$$

其中 a_{ij} 叫第 i 行第 j 列上的元素（或元）。在上面的正方形中划去 a_{ij} 所在的行和列，余下的元按原来的相对位置构成一个 $(n-1)^2$ 个元的行列式

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

叫 a_{ij} 的余子行列式 (或余子式)。而

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

叫 a_{ij} 的代数余子行列式 (或代数余子式)。

则二、三阶行列式可表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{aligned} \text{(划去行)} &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} \\ &= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} \\ &= \underline{a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2}} \quad (i=1, 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(划去列)} &= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} \\ &= a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} \\ &= \underline{a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j}} \quad (j=1, 2) \end{aligned}$$

同理,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} \quad (i, j=1, 2, 3)$$

例 1 将 $|D|$ 展为第一行各元与其代数余子式之积的代数之和的形式。

解

$$|D| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$= 2(-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 1(-1)^3 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$+ 3(-1)^4 \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 17$$

定义二 方阵 A 的行列式是以 $|A|$ 的任一行 (列) 的所有各元与它的代数余子式乘积之和。

即

$$\begin{aligned} |A| &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^n a_{ik}A_{ik} \\ &= \sum_{k=1}^n a_{kj}A_{kj} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \\ &\quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (1)$$

称 $|A|$ 为 n 阶行列式。习惯上说成把行列式按第 i 行 (j 列) 展开。

注意, 对角线法不能用于 $n > 3$ 。

例 2 将 $|D|$ 按第二行及第三列展开。

解

$$\begin{aligned} |D| &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \\ &= (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} + 4(-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -23 \\ |D| &= a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} \\ &= 0 + 4(-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + 5(-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -23 \end{aligned}$$

可见按任一行(列)展开都是相等的,此定义是客观规律的反映,其符号分布为

$$\begin{array}{c} + - + \cdots (-1)^{n+1} \\ - + \cdots \cdots (-1)^{n+2} \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ (-1)^{n+1} \cdots \cdots + \end{array}$$

例 3 计算下列对三角形(除对角线上元外,其余元全为零)行列式。

a) 每次按第 1 行展开

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$$

主对角线

b)

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

次对角线

(分别按第 n 列, 第 $n-1$ 列, \cdots , 第一列展开)

$$= a_1 A_{1n} = a_1 (-1)^{1+n} M_{1n} = (-1)^{1+n} a_1 M_{1n}$$

$$= (-1)^{1+n} a_1 a_2 A_{1, n-1} = (-1)^{1+n} (-1)^{1+(n-1)} a_1 a_2 M_{1, n-1}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{(n+1)+n} a_1 a_2 M_{1, n-1} \\
&= \dots \\
&= (-1)^{(n+1)+n+(n-1)+\dots+(3)} a_1 a_2 \dots a_n \\
&= (-1)^{\frac{1}{2}(n+4)(n-1)} a_1 a_2 \dots a_n \\
&= (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} a_1 a_2 \dots a_n
\end{aligned}$$

例 4 计算下列三角形行列式 (即 $a_{ij} = 0$, 当 $i_i > j$ 时, 叫上三角形)。

a) 按 1 至 n 列展开 (选择零多的行、列展开)

$$\begin{vmatrix}
a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\
0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & a_{nn}
\end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$$

b) 从 n 至 1 列展开

$$\begin{vmatrix}
a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & \dots & a_{2, n-1} & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{n1} & 0 & \dots & 0
\end{vmatrix} = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} a_{1n} a_{2, n-1} \dots a_{n1}$$

例 5 有一行 (列) 的元全为零的行列式等于零。单位行列式 (主对角线元为 1, 其余元为零) 等于 1。

a) 按 i 行展开

$$i \text{ 行} \leftarrow \begin{vmatrix}
a_{11} & \dots & a_{1n} \\
0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots \\
a_{i1} & \dots & a_{in}
\end{vmatrix} = 0 A_{i1} + \dots + 0 A_{in} = 0$$

b)

$$|E| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

例6 解方程组

$$\begin{cases} 2x - 4y + z = 1 \\ x - 5y + 3z = 2 \\ x - y + z = -1 \end{cases}$$

解 方程式的个数与未知数的个数相等,

$$|D| = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -8$$

将常数列换 D 中的第 i 列, 用 D_i 表示, 得

$$|D_1| = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 11, \quad |D_2| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 9$$

$$|D_3| = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 6$$

$$\begin{cases} x = \frac{|D_1|}{|D|} = -\frac{11}{8} \\ y = \frac{|D_2|}{|D|} = -\frac{9}{8} \\ z = \frac{|D_3|}{|D|} = -\frac{6}{8} \end{cases}$$

$$z = \frac{|D_3|}{|D|} = -\frac{3}{4}$$

这种解方程组的方法叫 Cramer 法。

(一) 习题一

一、用 Cramer 法解下列线性方程组：

$$1) \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x - y + z = 1 \\ x - y + 2z = 3 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y - z = 1 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

二、计算下列各行列式的值：

$$1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 7 & -5 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} \quad 2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \end{vmatrix}$$

$$3) \begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad 4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & u & u^2 \\ 1 & u^2 & u \end{vmatrix}$$

$$\left(\text{其中 } u = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right)$$

$$5) \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} \quad 6) \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & c & 0 & 0 \\ a_2 & b_1 & d & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & a \end{vmatrix}$$

三、解关于 λ 的方程：

$$1) \begin{vmatrix} \lambda & \lambda-2 & 0 \\ \lambda+2 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = 0 \quad 2) \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ -1 & \lambda+1 & -1 \\ -4 & 12 & \lambda-1 \end{vmatrix} = 0$$

§2 行列式的性质

利用行列式的性质，可以简化行列式的计算。

性质一 若行列式中某一行(列)有公因式(数 k)，则 k 可提到行列式之外，即

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证 按第 i 行展开

$$\begin{aligned} |A| &= ka_{i1}A_{i1} + \cdots + ka_{in}A_{in} \\ &= k(a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{in}A_{in}) \\ &= k|A| \end{aligned}$$

性质二 若行列式的第 i 行(列)中各元都可以写成两项之和， $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$ ， $j = 1, 2, \dots, n$ 。则此行列式等于两个行列式的和，它们的第 i 行分别是 b_{ij} 及 c_{ij} ，而其他各行都不变，即

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} + c_{i1} & \cdots & \cdots & b_{in} + c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = |B| + |C|$$

证 第按 i 行展开

$$\begin{aligned} |A| &= (b_{i1} + c_{i1}) A_{i1} + \cdots + (b_{in} + c_{in}) A_{in} \\ &= (b_{i1} A_{i1} + \cdots + b_{in} A_{in}) + (c_{i1} A_{i1} + \cdots + c_{in} A_{in}) \\ &= |B| + |C| \end{aligned}$$

定义一 把行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的每一个第 i 行都变为第 i 列而得到的行列式

$$|A^T| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{i1} & \cdots & a_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{in} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

叫 $|A|$ 的转置行列式, 记为 $|A^T|$ (即元 a_{ij} 变为 a_{ji})。

性质三 行列式与它的转置行列式相等,

即 $|A| = |A^T|$

证 当 $n = 2$ 时

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

设 $n = k$ 时成立, $|A| = |A^T|$ 。

当 $n = k + 1$ 时, 将 $|A|$ 按 $k + 1$ 行展开, 而 $|A^T|$ 按 $k + 1$ 列展开, 得

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & a_{1,k+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} & a_{k,k+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k+1,1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{k+1,k+1} \end{vmatrix}$$

$$= a_{k+1,1} A_{k+1,1} + \cdots + a_{k+1,k+1} A_{k+1,k+1}$$

$$= a_{k+1,1} A_{k+1,1}^T + \cdots + a_{k+1,k+1} A_{k+1,k+1}^T$$

$$|A^T| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{k1} & a_{k+1,1} \\ a_{12} & \cdots & a_{k2} & a_{k+1,2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1,k+1} & \cdots & a_{k,k+1} & a_{k+1,k+1} \end{vmatrix}$$

$$= a_{k+1,1} A_{k+1,1}^T + \cdots + a_{k+1,k+1} A_{k+1,k+1}^T$$

$$\therefore |A| = |A^T|$$

性质四 若将行列式中的任意两行(列)互换, 则行列式只改变符号。

证 当 $n = 2$ 时, 下式成立。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}$$

设 $n = k$ 时成立, 即

$$A(i, j) = -A(j, i)$$

式中 $A(i, j)$ 表示 i 行在上, j 行在下。

当 $n = k + 1$ 时, 设 $r \neq i, j$