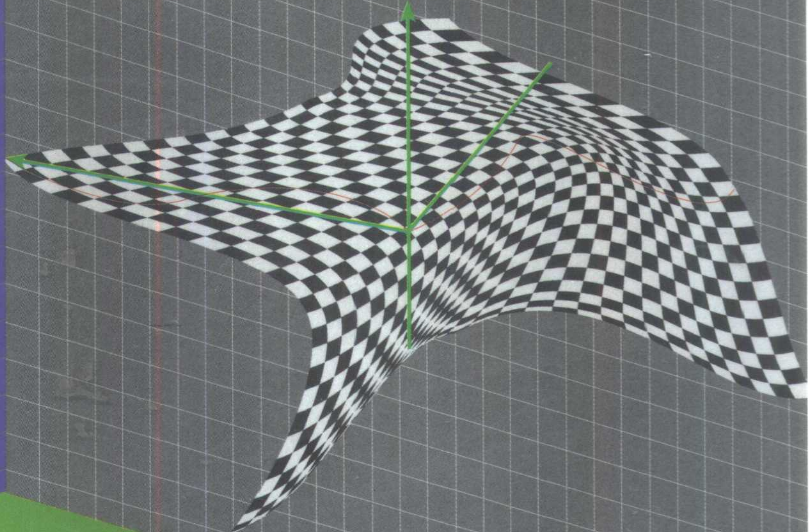

经济数学模型化过程分析

杨 健 赵国庆 严守权 著

中国人民大学出版社

经济数学模型化过程分析

杨　健　赵国庆　严守权　著

中国人民大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

经济数学模型化过程分析/杨健等著
北京:中国人民大学出版社.2000
北京市社会科学理论著作出版基金资助

ISBN 7-300-03633-3/F・1092
Ⅰ. 经…
Ⅱ. 杨…
Ⅲ. 经济数学-建立模型-研究
Ⅳ. F244.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 75477 号

北京市社会科学理论著作出版基金资助
经济数学模型化过程分析
杨　健　赵国庆　严守权　著

出版发行:中国人民大学出版社
(北京海淀路 157 号　邮编 100080)
发行部:62514146　门市部:62511369
总编室:62511242　出版部:62511239
E-mail:rendafx@public3.bta.net.cn
经　　销:新华书店
印　　刷:中国人民大学印刷厂

开本:850×1168 毫米 1/32　印张:5.125
2000 年 11 月第 1 版　2000 年 11 月第 1 次印刷
字数:125 000

定价:10.00 元
(图书出现印装问题,本社负责调换)

作者简介

杨　健　1959年生，英国兰卡斯特大学(Lancaster University)管理科学博士，现任中国人民大学金融信息中心主任、信息学院教授。研究方向：运筹学。

赵国庆　1956年生，日本京都大学经济学博士，现任中国人民大学信息学院副院长、副教授。研究方向：计量经济学。

严守权　1946年生，1970年毕业于北京大学数学力学系（六年制），现任中国人民大学信息学院副教授。研究方向：经济控制论。

前 言

本书旨在使读者理解经济模型化思想以及如何运用数学模型化的方法和技巧，解决经济问题。数学模型化(Mathematical Modelling)是指提出、设计、建立、求解、论证及使用数学模型的整个过程。其目的在于研究开发数学模型在经济领域中分析问题、逻辑思维和辅助决策的作用和功能。

本书由四个模块组成。

第一模块为经济数学模型化过程的基础理论，主要包括数学模型基本理论、数学模型化一般程序以及为实现模型化必须进行的信息收集与评价等内容。这部分由三章组成，第 1 章在给出各种简单数学模型的基础上，讨论了数学模型的基本概念和性质，阐明了模型与原型及其逻辑关系；第 2 章在明确信息的数量化是建造模型的前提下，讨论了数量化与量纲的问题，然后对数学模型的特性、应用条件及应用的评判准则进行了说明，最后详细论述了模型化过程的问题；第 3 章介绍了模型化信息的收集和处理方法。

第二模块为微观经济数量决策分析模型的讨论与研究，主要内容包括运筹学模型化过程中如何表述目标，确定环境因素，选择标准数学模型，最优性条件的确定及最优解(或满意解)的求出。这部分内容由第 4 章、第 5 章组成，第 4 章论述了经营数量决策模型化过程，主要由销售机理分析、成本机理分析、风险机理分析、时间机理分析、约束问题分析等部分构成；第 5 章在第 4 章销售机理模

型化过程的基础上，给出了多目标—多指标模型的一般形式，并对单目标最优解的性质进行了分析，指出了各种经济量对数量决策的影响，此外还研究了非线性共轭对偶理论的应用。

第三模块内容由两部分构成：第一部分介绍了系统论的思想与方法；第二部分为计量经济模型化过程。本模块由第 6 章、第 7 章组成，第 6 章主要讨论经济控制论模型，首先阐述了系统论的方法和规律，最后给出了一个具体宏观经济控制模型；第 7 章为计量经济模型分析，计量经济模型的特点在于首先提出经济假说，然后确立变量之间的因果关系，在收集统计资料的基础上，估计模型参数，并对其结果进行检验，最后运用模型估计进行经济预测和政策评价。本章包括计量模型分析的基础和建立计量模型的一些基本方法。首先讨论构成计量分析基础的最小二乘法，然后指出在实证分析中运用计量模型应注意的几个问题，最后探讨计量分析的一些新发展。

第四模块为本书的最后一章，作为经济模型化过程的应用实例。在第 8 章中给出了几个案例，主要涉及宏观经济周期变化、投资模型的最优条件、宏观经济增长模型以及经济学中的效用等问题。第 8 章首先讨论卡莱斯基商业循环模型和最优外资规模的决定模型，然后对马克思的扩大再生产图式与哈罗德-多马模型进行比较，最后讨论市场经济中消费者经济行为的数学模型描述以及企业的行为表征。

本书作者之一杨健博士自 1986 年在中国人民大学开设全校研究生选修课程“经济数学模型化”。此后，龚德恩教授、任朝佐教授、严守权副教授、赵国庆副教授等都曾讲授此课程，他们的努力推动了经济数学模型化的研究。10 年后的今天此书终于在同行们的关心下问世。

此外，中国人民大学的魏权龄教授、英国兰卡斯特大学的 Graham K. Rand 教授、日本国京都大学的森栋公夫教授，都曾对

本书提出许多非常有益的建议，在此一并向他们表示衷心的谢意。

特别要提到的是王戈、周国栋、崔惠军、尹明玉，他们在本书的打印输入及校对公式中付出了艰辛的劳动，在此谨表谢意。

本书中的一些研究成果为国家“211工程”项目“中国宏观经济运行模拟和分析系统”的一部分，本书的部分章节构成北京市普通高等学校教育教学改革试点立项研究的基础。

本书作为经济数学模型化过程分析的一个尝试还存在着不少不足之处，恳切希望广大读者指正。

著　者

1998年8月

目　录

第 1 章　数学模型概论 …… 1
1.1　引言 …… 1
1.2　数学模型基本概念 …… 4
第 2 章　数学模型化 …… 14
2.1　数量化和量纲分析 …… 14
2.2　数学模型的性质、应用条件及评价准则 …… 21
2.3　数学模型的分类 …… 24
2.4　数学模型化过程 …… 26
第 3 章　经济统计指标模型与方法 …… 35
3.1　模型化信息的收集方法 …… 35
3.2　模型化信息的统计处理方法 …… 38
第 4 章　销售机理模型化过程 …… 50
4.1　销售机理分析与基本模型 …… 50
4.2　成本机理分析与基本模型 …… 53
4.3　经济收益与基本模型 …… 58
4.4　风险机理分析与基本模型 …… 60
4.5　时间机理分析与基本模型 …… 66
4.6　约束问题与基本模型 …… 68
4.7　导出模型及模型的派生方式 …… 69
第 5 章　运筹学模型 …… 78
5.1　多目标—多指标模型及单目标最优解的性质 …… 78
5.2　共轭对偶理论的应用与经济解释 …… 82

第 6 章　经济控制论模型 …… 88
6.1　系统论方法 …… 88
6.2　一个宏观经济系统的最优控制模型 …… 94
第 7 章　计量经济模型分析 …… 102
7.1　经济模型的最小二乘估计 …… 102
7.2　计量经济模型分析中的诸问题 …… 111
7.3　回归分析的一些新发展 …… 121
第 8 章　模型在经济中的应用 …… 126
8.1　卡莱斯基商业循环模型 …… 126
8.2　最优外资规模的决定条件 …… 133
8.3　马克思扩大再生产图式与增长模型 …… 136
8.4　效用函数与生产函数 …… 143
附录 1 …… 148
附录 2 …… 149

参考文献 …… 152

第1章　数学模型概论

1.1　引　　言

任何模型都是原型的一种表现形式，而原型则指我们所研究的对象。我们所讨论的模型是依据原型，由人来构造的模型，它是人对客观世界的一种理解。广义而言，由于世界的事物皆有同一性，故任何事物都可能成为另一事物的模型，但对千差万别的具体事物而言，模型又是有条件的。

构造模型是研究和解释客观世界的一种手段。它使人们在比原型现存条件更为有利的条件下研究原型。模型可以是实体，也可以是理论；既可以定性，也可以定量；可以具体，亦可抽象。借助模型，人们可以从不同的侧面、不同的层次去认识原型。尤其是在现实世界里，有一些研究工作无法在原型上直接进行，因此人们需要构造模型来解决理论和实践中的问题。模型是对原型的一种近似，它们之间存在着某种因果关系。抽象地说，模型是原型的映像。

作为一个模型，应具备以下性质。

(1) 近似性：模型是原型若干特征或内在联系的模仿或近似。

(2) 主观性：模型基于构模者对原型以及“模型空间”的理解。

(3) 能动性：模型可以能动地反映原型，乃至在时空上超越原型的现状。

正是模型的这些性质，使得人们越来越多地利用模型，重视模

型，并开始探索建模的方法。建立模型不仅需要对原型的深刻理解，而且需要一定的技巧、抽象和想像力。模型化方法是学习建模的基础，抽象与想象则需在实践中培养。就如作画需要对景物的敏锐观察，训练有素的技巧和艺术的抽象与想像。当然，不断地钻研、探索、创新，是步入科学殿堂的必由之路。

对于同一原型，可以有不同的模型。如何评价模型的优劣是模型化关心的问题之一。模型的价值应取决于模型化的目的。换言之，模型的优劣应由其解决问题的优劣而定。如果一个模型突出了原型的主要矛盾和主要特征，从而有助于我们分析和解决问题，它就是一个好模型。

模型的种类甚多。依据不同的准则，有以下几类主要的模型：

(1) 按照相似程度划分：有同构模型(Isomorphic Model)和同态模型(Homomorphic Model)。前者与其原型之间存在着一一对应的关系，即同构关系；后者与其原型的部分相对应，依其相似程度可细分为精确的(Acurate)、适度的(Adequate)、和粗略的(Coarse)三种同态模型。

(2) 按照结构性态划分：有形象模型(Iconic Model)和抽象模型(Abstract Model)之分。前者是由改变现实原型的度量、尺度或维数而得到的，其构造多为依据Π定理(见第2章)和相似性原理，故又称比例模型(Scale Model)；后者是用抽象的符号、图表、语言等表述的模型。抽象模型又可细分为三类：

1) 比拟模型(Analog Model)：它建立在不同的事物之间，模型与原型存在着同构或同态的关系。例如，用一组可控的条件来表征真实原型，通过模拟性实验研究原型的变化规律，这组可控条件就是比拟模型。

2) 概念模型(Concept Model)：它是凭借现有的知识，提出的关于原型的结构与特性的表述。概念模型往往是抽象的、原始的。

3) 数学模型(Mothematical Model)：它是用数学语言表达原

型结构、特征及内在联系的模型。例如，用字母、数字或其他有特别含义的数学符号建立起来的等式、不等式、图像以及框图等，都是数学结构，当它们表征一个特定原型时，就是数学模型。

（3）按照对原型的了解程度划分：有白箱模型（White Box Model）、黑箱模型（Black Box Model）和灰箱模型（Grey Box Model）三种。构模者对原型内部的结构与特性的了解程度分别是完全了解、完全不了解和部分了解。

关于模型的划分，依据不同的准则划分的类型也不同。例如，有人认为能真正划分的模型只有两类：实物模型（Physical or Material Model）和符号模型（Symbolic or Formal Model）。实物模型是有形的、可触知的、实体的模型化表达，模型的元素由物质或硬件构成。如形象模型、硬件比例模型和比拟计算机模型等。符号模型是理论的、符号的、抽象的模型化表达，模型元素由原型的特定结构或行为的若干方面的符号表述，如图表、语言表达、逻辑模型、数学模型以及计算机程序等。关于模型的性质及其分类将在第 2 章进行详细地讨论。

在一切模型之中，数学模型是用途最广泛的一种。多少世纪以来，数学以其高深玄妙而被誉为自然科学的“皇后”。然而在科学技术突飞猛进的今天，多学科相互交融，边缘学不断涌现。“皇后”屈尊降为各学科的“侍女”，应运而生的交叉学科不胜枚举。如生物数学、数理医药学、计量经济学、计量地理学、数量经济学等，犹如群芳争春，竞相绽放。虽然新学科各有异彩，人们注意到一个事实：它们的共同之处都是借助于数学模型研究各自的原型世界。这些新兴学科的成功无一不是得益于数学模型的利用。尤其是在当今计算机时代，往日只有数学家才能完成的计算工作，如今一般人也能完成，这一切使得数学模型的应用成为可能，因此，模型化工作日益受到人们的重视。

应当看到，即使在今天，人们对数学模型的本质仍有许多误

解。例如有人认为数学模型是一种语言，很容易予以文字解释。这恰恰与实际情况相左，数学模型的一般性常常使人不知所云。还有人认为数学模型及其结果总是正确的、科学的，这也是荒谬的。虽然基于一组自封闭的公理系统的数学本身，在前提正确和推理无误的条件下，结果必然正确。但是数学模型毕竟不是数学理论，它基于关于原型的假说，因此数学推证充其量是一个佐证。假说必须用事实验证，换言之，不论是前提还是结果都必须以事实为依据。最后需要指出的错误观点是认为数学模型没有用处。我们且不赘举数学模型的辉煌成就，仅以质与量是构成事物属性的两个方面，缺少量的刻画则无法全面地认识事物，就足以反驳这种观点。

本书着重探讨经济数学模型化方法以及模型化理论与程序。在经济工作中利用数学模型进行分析、预测、研究和决策，往往可以增加收益，降低消耗，减免风险，缩短时间，合理地利用有限的资源以获得最佳的效益。随着计算机的普及和计算机技术的发展，数学模型在经济领域将有更广泛的应用。

1.2 数学模型基本概念

数学模型是相对于一定的概念、系统或过程而存在的。E. A. 本德在他的《数学模型引论》(参见参考文献[5]) 中这样写道："数学模型是关于部分现实世界和为一种特殊目的而做的一个抽象的、简化的数学结构。" 具体地讲，数学结构就是由若干字母、数字及含有特定意义的符号建立起来的等式、不等式、序关系、逻辑式、图表、图像和框图。数学模型和原型是一对范畴，相互依存、相互对立。孤立的数学结构不是严格意义下的数学模型。数学模型化的概念与数学模型不同，它是指建立数学模型和利用数学模型的全过程。可以断言，从研究数学模型转向研究数学模型化是一个必然的

趋势。模型化研究具有广阔前景。

在此我们介绍几个简单的模型，使我们形成对数学模型的直观认识。

【例 1.2.1】 资源的配置。

资源短缺是全世界共同面临的问题。如何有效地利用现有的资源，使经济单位自身的经济效益最大，乃是许多经济学家研究的课题。虽然原型的差异甚多，我们仍可抽象地假设原型问题是利用 m 种有限资源生产 n 种商品的最佳决策。如果已知第 i 种商品的单位创利额是 $c_i(i=1,\cdots,n)$；生产单位商品 i 需消耗 a_{ji} 单位的资源 $j(i=1,\cdots,n;j=1,\cdots,m)$；现有资源 j 的总量为 $b_j(j=1,\cdots,m)$；待决策的商品 i 的数量为 $x_i(i=1,\cdots,n)$。则可得出决策的选择范围是满足下列约束条件的 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i \leqslant b_j, \quad j=1,\cdots,m$$

$$x_i \geqslant 0$$

判别决策优劣的目标是创利额

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

我们记 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$

$$\boldsymbol{A}=(a_{ji})_{m\times n}$$

$$\boldsymbol{C}=(c_1,\cdots,c_n)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{b}=(b_1,\cdots,b_m)^{\mathrm{T}}$$

就得到一个数学模型

$$\max\ \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \tag{1}$$

$$\text{s.t.}\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{O}$$

这个数学结构称为线性规划，与其相应的有完整的理论与算法。

【例 1.2.2】 人口的预测。

人口问题困扰着许多发展中国家，经济学家对人口预测做过许多尝试。我们考虑一种最简单的情况。假设某个国家在时刻 $t = t_0$ 年的人口数目 $x(t_0) = x_0$，由历年统计加权得到平均出生率 h，平均死亡率 d，于是对 $t \geqslant t_0$ 可以得到一个粗糙的模型

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = (h - d)\mathrm{d}t$$

或
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = rx$$

式中，$r = h - d$ 为净生殖率。由初始条件解出

$$x(t) = x_0 e^{r(t-1)}$$

利用这个模型我们可以预测这个国家未来的人口。这个简单模型说明在外界条件不变的情况下，人口将呈指数增长。

【例 1.2.3】 马克思的生产模型。

马克思认为，在一定时期内社会总产品的价值是由三部分构成的：(1) 在此期间消耗的生产资料价值，即不变资本 c；(2) 在此期间内用于生产过程的劳动力价值，即可变资本 v；(3) 被资本家剥削的剩余价值 m。依据生产资料的性质，马克思把国民经济分为两大部类，即生产生产资料的第一部类和生产消费资料的第二部类。由定义，两部类的总价值分别为

$$\mathrm{I} = c_1 + v_1 + m_1$$

$$\mathrm{II} = c_2 + v_2 + m_2$$

总价值

$$TV = \mathrm{I} + \mathrm{II}$$

马克思指出：如果要维持简单再生产，则国民经济总处于同一水平。这时，生产资料的总需要应和第一部类的总价值相等；消费资料的总需要应和第二部类的总价值相等。于是，我们得到

$$c_1 + c_2 = \mathrm{I}$$

$$v_1 + m_1 + v_2 + m_2 = \mathrm{II}$$

我们注意到从前式可以推出后式，反之亦然。而且，都与数学结构

$$v_1 + m_1 = c_2$$

等价。即第一部类的可变资本和剩余价值等于第二部类的不变资本。值得指出的是：虽然两个数学模型不同，但可能在数学结构上等价。

【例 1.2.4】 常胜的赌徒。

赌场如战场，有胜亦有败。但如果在自由下注的赌场，则有常胜的可能性。假如某位不贪心的赌者依据下列决策赌博：

(1) 每次上赌场的目标是赢一元钱；

(2) 一旦赢钱立刻停赌。

那么他第 k 次的赌注为 2^{k-1}，总赌注

$$\begin{aligned} B_k &= 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{k-1} \\ &= 2^k - 1 \end{aligned}$$

假如每次赢的概率为 P，则输的概率为 $q = 1 - P$。显然，连输 k 次的概率是 q^k。因此 k 次赌博之中至少有一次赢的概率为 $1 - q^k$，不论"常胜"意味胜的概率 P_0 有多大，只要 $P > 0$ 且 $P_0 < 1$，当 k 充分大时，必有

$$1 - q^k > P_0$$

换言之，如果赌徒筹措到足够多的本钱 n，则可望百战百胜。模型为

$$\begin{aligned} &\min n \\ &\text{s.t. } 1 - q^k > P_0 \\ &2^k - 1 \leqslant n,\ k \text{ 为正整数} \end{aligned} \tag{2}$$

不难解出

$$\bar{n} = 2^{[\ln(1-P_0)/\ln q]+1} - 1$$

当然，这只是个数学游戏，因为输光的概率毕竟存在。

现在我们考虑数学模型的基本概念与性质。首先给出如下定义：如果相应于某种体系的相依关系或逻辑关系，用形式化的数学

语言概括地或近似地表述成为一个数学结构，则称这个数学结构为该体系的一个数学模型，记作 M；称该体系为 M 的原型，记作 P。

由定义不难得出：一个原型可以有不同的数学模型，模型不惟一；而一个模型的数学结构则有可能是不同原型的模型，即有多个原型相对应，因此反之是有条件的。一个数学结构自身必须在数学意义下协调，不能相悖，但是对同一体系的模型而言，由于假说与解释的方式不同，我们将允许相悖。正如物理学中描述物体运动的牛顿模型

$$F = m \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

和爱因斯坦模型

$$F = \frac{m}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

在数学意义下相悖。但都成功地刻画了物体运动的规律。

我们把欲模型化的现象、问题、过程、体系乃至用某种语言表示的系统，统称为原型，并记为 P。虽然原型应相对于模型而存在，我们隐含假设任何事物都存在着数学模型，只是不一定令人满意罢了。数学结构是一个有机的整体，可分性概念是有益的。如果数学结构 MS 可以分解为若干子结构 MS_α，$\alpha \in \Lambda$，其中，Λ 为非单点指标集，则称该数学结构是可分的。并记 $\mathrm{MS} = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} \mathrm{MS}_\alpha$。

下面我们举例说明可分性。

【例 1.2.5】 依据凯恩斯的经济理论，针对封闭的宏观经济体系，可建立如下模型

$$M:\begin{cases} Y = C + I + G \\ C = a + bY_d = a + b(1-t)Y \\ I = e - dR \\ m = (kY - hR)P \end{cases}$$