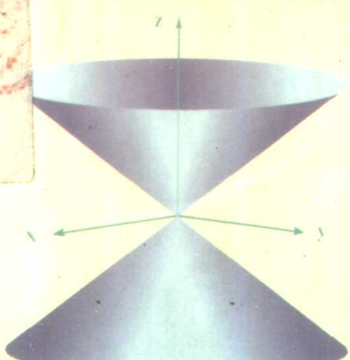
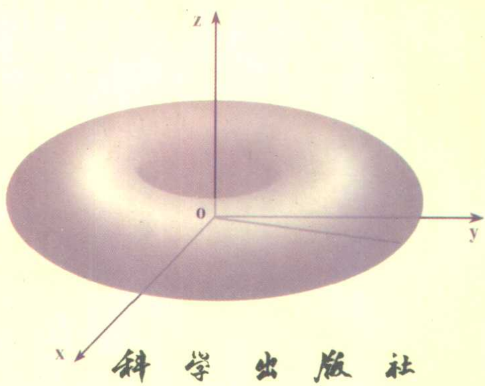
高等院校选用教材系列

高等数学系列教材

多元微积分与代数

罗 汉 曹定华 主编





科学出版社

内 容 简 介

本书是高等数学系列教材的第二册．其内容包括线性代数、空间解析几何、多元函数的微积分、场论、傅里叶级数、积分变换、偏微分方程等．各节后面配有适量的习题，书末附有习题答案．

本书对高等数学传统的内容结构进行了适当的调整，一些表述方法有别于以往的同类教材．例如：加强了代数、几何和微积分三者之间的联系，以向量、矩阵为工具处理多元微积分，统一了黎曼积分的概念等．书中渗透了一些现代数学的观点和思想，并提供了内容延伸发展的接口．全书结构严谨，内容精练，条理清楚，重点突出，例题较多．

本书可作为各类高等院校的高等数学课程的教材，也可作为工程技术等有关人员的自学用书或参考用书．

图书在版编目（CIP）数据

多元微积分与代数/罗汉，曹定华主编．-北京：科学出版社，1999.3
高等数学系列教材
ISBN 7-03-007201-4

Ⅰ．多…　Ⅱ．①罗…　②曹…　Ⅲ．①多元-微积分-教材　②线性代数-教材　Ⅳ．O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（98）第 38674 号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717

北京双青印刷厂 印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

＊

1999年3月第 一 版　　开本：850×1168　1/32
1999年3月第一次印刷　　印张：14 7/8
印数：1－7 000　　字数：385 000

定价：22.50 元

《高等数学系列教材》

主　编　刘楚中

主　审　周叔子

《多元微积分与代数》

主　编　罗　汉　曹定华

编　者　曹定华　喻胜华　邓爱珍

周润兰　刘楚中　罗　汉

梁　勉　戴斌祥　杨余飞

（以编写章节的先后为序）

前　言

我国国民经济和科学技术在21世纪的更大发展已成必然之势，培养各类高等专门人才的我国大学教育的改革也势在必行．作为大学教育中重要一环的大学数学教育应如何革故鼎新，以适应新的形势，这是广大数学教育工作者所面临的重大课题．近年来，我校十分注重这方面的工作，组织了一大批教学经验丰富又具创新精神的教师，进行教学和教材的改革研究．

高等数学是高等院校众多专业学生必修的重要基础理论课，它的设置应该以培养数学素质为主要目的．因此我们编写的这套高等数学系列教材，在传授知识的同时，注意到通过各环节逐步培养学生抽象概括问题的能力、逻辑推理能力、空间想象能力和自学能力，还特别注重培养学生具有比较熟练的运算能力和综合运用所学知识去分析问题和解决问题的能力．

《高等数学系列教材》由《一元分析基础》、《多元微积分与代数》、《应用概率统计》和《数学实验》四册组成，它们在结构体系和内容选取方面，与以往众多的同类教材不同，它是按照培养跨世纪人才数学素质的要求编写的，渗透了不少现代数学观点和内容，以开阔学生的眼界，启迪他们的思维．正因为如此，这套教材中难免会有不妥之处，希望使用本教材的教师和学生等提出宝贵意见．

这套系列教材由刘楚中教授任主编，周叔子教授任主审．其中第二册《多元微积分与代数》由罗汉、曹定华任主编，参加编写的人员是曹定华、喻胜华、邓爱珍、周润兰、刘楚中、罗汉、梁勉、戴斌祥、杨余飞．本教材中带 * 号的内容，可根据授课学时和教学对象进行取舍．

这套教材被列入湖南大学“九五”重点规划教材，在编写过程中得到了湖南大学教务处的大力支持，在此表示衷心感谢.

湖南大学应用数学系

1998年8月

目　　录

第一章　向量空间与空间解析几何

向量和向量空间是最基本的数学概念之一．它的理论和方法已经渗透到自然科学、工程技术的各个领域．在解析几何里，它的应用更加直接．运用向量的方法，特别便于研究有关空间直线和平面的各种问题．

§1. 向量及其运算

向量是既有大小，又有方向的量．考虑平面向量情形，我们知道，xy 平面上的向量在几何上表示为 xy 面上一有向线段．若将每个向量的起点都平移至原点 O(这种通过平移而不变的向量称为自由向量，简称向量．我们只研究自由向量)，则每个向量的终点都唯一确定了平面上的一个点 $P(x,y)$；反过来，平面上任一点 $P(x,y)$唯一确定了以 O 为起点，$P(x,y)$为终点的一个向量．可见，平面上自由向量与平面上的点是一一对应的．因此，我们可用向量终点的坐标(x,y)来表示平面上的自由向量．换言之，任何一个二元有序数组(x,y)表示了平面上一自由向量，反之也对．从这一点出发，我们可类似引进 n 维向量的概念．

定义 1　n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 所组成的有序数组

$$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

称为 n 维向量．数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 称为 α 的分量(坐标)，a_j 称为 α 的第 j 个分量(坐标)，分量是实数的向量称为实向量，分量为复数的向量称为复向量，本章只讨论实向量．向量通常用 $\alpha,\beta,\gamma,\cdots$ 表示．

n 维向量是解析几何中 2 维向量的推广，不过 2 维向量(a_1,a_2)在几何上都可表示为以原点 O 为起点，点 $P(a_1,a_2)$为终点

的有向线段$\overrightarrow{OP}$，而 n 维向量($n>3$)就没有这种直观的几何意义，只是沿用几何的术语罢了．

设 n 维向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，当且仅当它们各个对应的分量都相等，即 $a_i=b_i$，$i=1,2,\cdots,n$ 时，称向量 α 与 β 相等，记作 $\alpha=\beta$. 特别地，两个 2 维向量相等，在几何上，就表示这两个有向线段可以经平行移动而完全重合．

分量都是 0 的向量叫做零向量，记作 0，即，$0=(0,0,\cdots,0)$.

维数不同的零向量是不相等的．

向量$(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)$称为向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$的负向量，记作$-\alpha$. 特别地，当 $n=2$ 时，$-\alpha$ 表示与 α 方向相反，长度相同的有向线段．

定义 2 设 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$都是 n 维向量，称向量$(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$为 α 与 β 的和，记作 $\alpha+\beta$，即

$$\alpha+\beta=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n).$$

特别地，当 $n=2$ 时，$\alpha+\beta$ 表示以原点 O 为一顶点，α,β 为两邻边的平行四边形的对角线$\overrightarrow{OC}$. 这正是我们熟知的平行四边形法则．由此易得三角形法则(图 1-1).

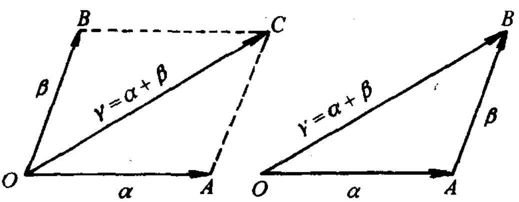


图 1-1

利用负向量，我们可定义向量的减法：

$$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)=(a_1-b_1,a_2-b_2,\cdots,a_n-b_n).$$

要注意的是向量的加、减法只能在维数相同的向量之间进行．

定义 3 设 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$为 n 维向量，λ 为实数，那么，向量$(\lambda a_1,\lambda a_2,\cdots,\lambda a_n)$称为向量 α 与数 λ 的乘积，简称数乘，记作 $\lambda\alpha$

或 $\alpha\lambda$. 即

$$\lambda\alpha = \alpha\lambda = (\lambda a_1, \lambda a_2, \cdots, \lambda a_n).$$

特别地，当 $n=2$ 时，(i)若 $\lambda>0$，则 $\lambda\alpha$ 表示与 α 方向相同，而长度为 α 的 λ 倍的有向线段．(ii)若 $\lambda<0$，则 $\lambda\alpha$ 表示与 α 方向相反，而长度为 α 的 $|\lambda|$ 倍的有向线段(图 1-2).

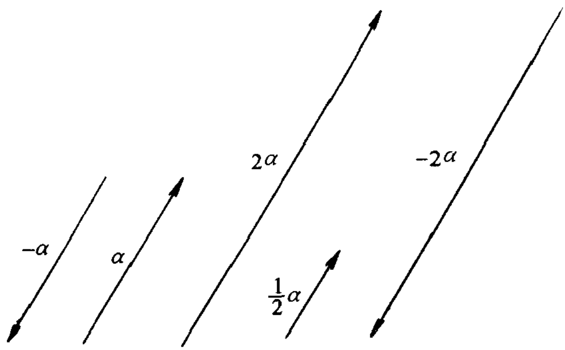


图 1-2

向量的加法及数乘满足下述运算规律．

设 α,β,γ 都是 n 维向量，λ,μ 为实数，则

1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$,

2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$,

3) $\alpha+0=\alpha$,

4) $\alpha+(-\alpha)=0$,

5) $1\cdot\alpha=\alpha$,

6) $\lambda(\mu\alpha)=(\lambda\mu)\alpha$,

7) $\lambda(\alpha+\beta)=\lambda\alpha+\lambda\beta$,

8) $(\lambda+\mu)\alpha=\lambda\alpha+\mu\alpha$.

这些结论都可通过直接验证而得到．这里，1)，2)是我们熟悉的加法交换律和结合律，6)，7)，8)则是数乘的结合律和分配律，而 3)，4)保证加法有逆运算，即

$$若\ \alpha+\beta=\gamma,\ 则\ \gamma+(-\beta)=\alpha.$$