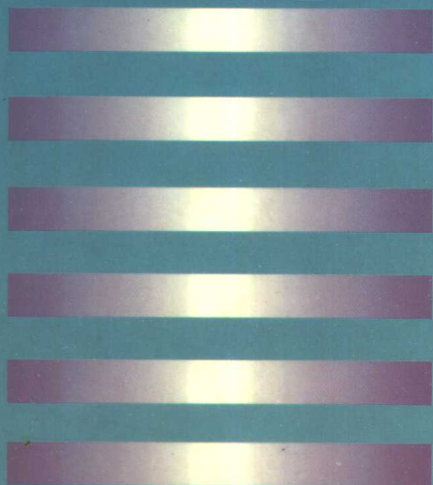


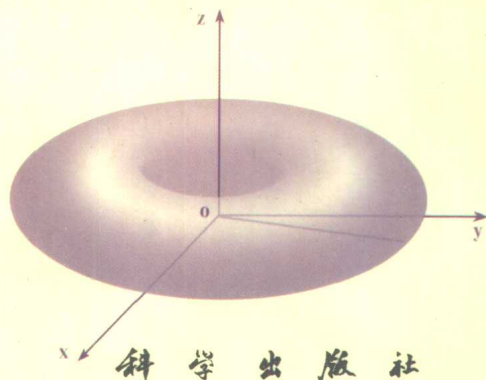
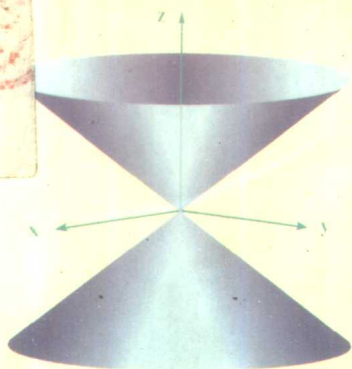
高等院校选用教材系列

高等数学系列教材

多元微积分与代数



罗 汉 曹定华 主编



内 容 简 介

本书是高等数学系列教材的第二册。其内容包括线性代数、空间解析几何、多元函数的微积分、场论、傅里叶级数、积分变换、偏微分方程等。各节后面配有适量的习题，书末附有习题答案。

本书对高等数学传统的内容结构进行了适当的调整，一些表述方法有别于以往的同类教材。例如：加强了代数、几何和微积分三者之间的联系，以向量、矩阵为工具处理多元微积分，统一了黎曼积分的概念等。书中渗透了一些现代数学的观点和思想，并提供了内容延伸发展的接口。全书结构严谨，内容精练，条理清楚，重点突出，例题较多。

本书可作为各类高等院校的高等数学课程的教材，也可作为工程技术等有关人员的自学用书或参考用书。

图书在版编目 (CIP) 数据

多元微积分与代数/罗汉,曹定华主编.-北京:科学出版社,1999.3
高等数学系列教材
ISBN 7-03-007201-4

I. 多… II. ①罗… ②曹… III. ①多元-微积分-教材 ②线性代数-教材 IV. 0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (98) 第 38674 号

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

北 京 双 青 印 刷 厂 印 刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1999 年 3 月 第 一 版 开本: 850×1168 1/32

1999 年 3 月 第一次印刷 印张: 14 3/4

印数: 1—7 000 字数: 385 000

定价: 22.50 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

《高等数学系列教材》

主 编 刘楚中

主 审 周叔子

《多元微积分与代数》

主 编	罗 汉	曹定华		
编 者	曹定华	喻胜华	邓爱珍	
	周润兰	刘楚中	罗 汉	
	梁 勉	戴斌祥	杨余飞	

(以编写章节的先后为序)

前 言

我国国民经济和科学技术在 21 世纪的更大发展已成必然之势,培养各类高等专门人才的我国大学教育的改革也势在必行.作为大学教育中重要一环的大学数学教育应如何革故鼎新,以适应新的形势,这是广大数学教育工作者所面临的重大课题.近年来,我校十分注重这方面的工作,组织了一大批教学经验丰富又具创新精神教师,进行教学和教材的改革研究.

高等数学是高等院校众多专业学生必修的重要基础理论课,它的设置应该以培养数学素质为主要目的.因此我们编写的这套高等数学系列教材,在传授知识的同时,注意到通过各环节逐步培养学生抽象概括问题的能力、逻辑推理能力、空间想象能力和自学能力,还特别注重培养学生具有比较熟练的运算能力和综合运用所学知识去分析问题和解决问题的能力.

《高等数学系列教材》由《一元分析基础》、《多元微积分与代数》、《应用概率统计》和《数学实验》四册组成,它们在结构体系和内容选取方面,与以往众多的同类教材不同,它是按照培养跨世纪人才数学素质的要求编写的,渗透了不少现代数学观点和内容,以开阔学生的眼界,启迪他们的思维.正因为如此,这套教材中难免会有不妥之处,希望使用本教材的教师和学生等提出宝贵意见.

这套系列教材由刘楚中教授任主编,周叔子教授任主审.其中第二册《多元微积分与代数》由罗汉、曹定华任主编,参加编写的人员是曹定华、喻胜华、邓爱珍、周润兰、刘楚中、罗汉、梁勉、戴斌祥、杨余飞.本教材中带 * 号的内容,可根据授课学时和教学对象进行取舍.

这套教材被列入湖南大学“九五”重点规划教材，在编写过程中得到了湖南大学教务处的的大力支持，在此表示衷心感谢.

湖南大学应用数学系

1998年8月

目 录

第一章 向量空间与空间解析几何	1
§ 1. 向量及其运算	1
习题 1-1	5
§ 2. 向量组的线性相关性	5
一、向量组的线性相关与线性无关	5
二、向量组的最大无关组	10
习题 1-2	11
§ 3. 向量空间、向量的内积	12
一、向量空间及向量空间的基和维数	12
二、向量的内积	14
三、向量的正交规范基	15
习题 1-3	18
§ 4. 三维空间的直角坐标系及向量	18
一、空间直角坐标系	19
二、空间两点间的距离	21
三、数量积、向量积	22
习题 1-4	29
§ 5. 平面及其方程	30
一、平面的点法式方程	30
二、平面的一般方程	31
三、两平面的夹角	33
习题 1-5	35
§ 6. 空间直线及其方程	35
一、空间直线的一般方程	35
二、空间直线的对称式方程与参数方程	36
三、两直线的夹角	39
四、直线与平面的夹角	39

习题 1-6	42
§ 7. 曲面和空间曲线	42
一、曲面及其方程	42
二、空间曲线及其方程	46
三、二次曲面	49
习题 1-7	53
第二章 矩阵与线性方程组	54
§ 1. 行列式	54
一、 n 阶行列式	54
二、行列式的性质	56
三、克莱姆法则	61
习题 2-1	62
§ 2. 矩阵及运算	63
一、矩阵的定义	63
二、矩阵的代数运算	65
三、矩阵的秩	67
四、矩阵的逆	68
习题 2-2	70
§ 3. 矩阵的初等变换	71
一、矩阵的初等行变换	71
二、用初等行变换求矩阵的秩	72
三、初等矩阵	73
四、用初等行变换求逆矩阵	75
五、矩阵的初等列变换	76
六、矩阵与向量组	77
习题 2-3	82
§ 4. 矩阵的分块	83
一、分块矩阵的定义	83
二、分块矩阵的加法	83
三、分块矩阵的乘法	84
四、准对角矩阵	86
习题 2-4	88
§ 5. 线性方程组	89

一、高斯消元法	89
二、线性方程组的相容性定理	94
三、线性方程组解的结构	95
习题 2-5	97
第三章 多元函数微分学	99
§ 1. 多元函数的概念	99
一、区域	99
二、二元函数的概念	101
三、二元函数的几何表示	102
习题 3-1	103
§ 2. 多元函数的极限与连续性	103
一、二元函数的极限	103
二、二元函数的连续性	105
习题 3-2	106
§ 3. 多元函数的导数	107
一、多元函数的变化率	107
二、偏导数的定义	108
三、偏导数的几何意义	110
四、方向导数	111
习题 3-3	112
§ 4. 多元函数的微分	113
一、全微分	113
二、全微分的运算法则	116
三、方向导数的计算	116
习题 3-4	118
§ 5. 多元复合函数的导数	118
一、链导法则	118
二、全微分的形式不变性	121
习题 3-5	122
§ 6. 隐函数的导数	123
一、一个方程的情形	123
二、方程组的情形	125
习题 3-6	127

§ 7. 高阶偏导数及泰勒公式	128
一、高阶偏导数	128
二、高阶微分	132
三、多元泰勒公式	132
习题 3-7	135
第四章 多元函数微分学的应用.....	136
§ 1. 曲线的切线和法平面方程	136
习题 4-1	139
§ 2. 曲面的切平面和法线方程	139
一、曲面的切平面与法线	139
二、二元函数全微分的几何意义	143
习题 4-2	143
§ 3. 平面曲线族的包络	141
习题 4-3	148
§ 4. 二次型	148
一、二次型的概念	148
二、二次型和对称矩阵的有定性	151
习题 4-4	152
§ 5. 多元函数的极值	153
一、极值	153
二、最大值和最小值	155
三、条件极值	158
习题 4-5	162
第五章 多元函数积分学.....	163
§ 1. $R^n(n \leq 3)$ 中的黎曼积分	163
一、 $R^n(n \leq 3)$ 中的一类数学模型	163
二、黎曼积分的概念	167
三、黎曼积分的性质	169
习题 5-1	173
§ 2. 二重积分的计算	174
一、直角坐标系下的二重积分	174
二、二重积分的换元法	180
三、利用极坐标计算二重积分	184

习题 5-2	186
§ 3. 三重积分的计算	188
一、直角坐标系下的三重积分	188
二、三重积分的换元法	192
三、柱面坐标系下的三重积分	194
四、球面坐标系下的三重积分	196
习题 5-3	199
§ 4. 广义重积分	200
一、无界区域上的二重积分	200
二、含瑕点的二重积分	203
习题 5-4	204
§ 5. 对弧长的曲线积分和对面积的曲面积分的计算	204
一、对弧长的曲线积分的计算	204
二、对面积的曲面积分的计算	207
习题 5-5	212
§ 6. 多元函数积分学在几何和物理中的应用	213
一、面积	214
二、体积	221
三、弧长	225
四、质量	227
五、重心	229
习题 5-6	232
第六章 向量函数及场论	234
§ 1. 向量函数的极限和连续性	234
一、向量函数	234
二、向量函数的极限	235
三、向量函数的连续性	236
四、终端曲线和曲面	236
习题 6-1	238
§ 2. 向量函数的导数和积分	238
一、向量函数的导数和偏导数	238
二、向量函数的微分	241
三、一元向量函数的定积分	244

习题 6-2	245
§ 3. 向量函数的曲线积分	246
一、对坐标的曲线积分	246
二、对坐标的曲线积分的计算	249
三、对坐标的曲线积分与对弧长的曲线积分之间的联系	253
习题 6-3	254
§ 4. 格林公式	255
一、格林公式	255
二、平面曲线积分与路径无关的条件	259
三、原函数与全微分方程	264
习题 6-4	267
§ 5. 向量函数的曲面积分	269
一、有向曲面	269
二、对坐标的曲面积分	270
三、对坐标曲面积分的计算	271
四、两类曲面积分之间的联系	275
习题 6-5	276
§ 6. 高斯公式与斯托克斯公式	277
一、高斯公式	277
二、斯托克斯公式	281
习题 6-6	285
§ 7. 数量场及其物理量	286
一、数量场	286
二、数量场的梯度	287
习题 6-7	289
§ 8. 向量场及其物理量	289
一、向量场	289
二、通量与散度	291
三、环量与旋度	294
四、几种重要的向量场	296
习题 6-8	298
第七章 多元函数的微积分(续)	300
§ 1. n 元函数的概念	300

一、 n 维空间 R^n	300
二、 n 元函数的定义	301
三、 n 元函数的极限和连续性	302
习题 7-1	304
§ 2. n 元函数的导数和微分	304
一、 n 元函数的偏导数	304
二、 n 元函数的全微分	305
三、复合函数的微分法	307
习题 7-2	309
§ 3. n 重积分	309
一、 n 重积分的概念	309
二、 n 重积分的计算	310
习题 7-3	312
§ 4. n 元函数微积分的应用	312
一、 n 元函数的极值	312
二、 n 元函数的最大值、最小值	313
三、拉格朗日乘数法	314
四、 n 重积分求“体积”	317
习题 7-4	318
第八章 线性变换与二次型	320
§ 1. 线性变换	320
一、线性变换的定义	320
二、线性变换关于给定基的矩阵	320
三、线性变换的运算	322
四、线性变换在新基下的矩阵	324
习题 8-1	326
§ 2. 特征值与特征向量	327
一、矩阵的特征值与特征向量	327
二、线性变换的特征值与特征向量	329
习题 8-2	330
§ 3. n 元二次型的标准化	331
一、二次型及其标准形	331
二、用正交变换化二次型为标准形	332

三、二次型和实对称矩阵的有定性	339
习题 8-3	341
第九章 含参变量的积分	342
§ 1. 含参变量的积分	342
习题 9-1	348
§ 2. 含参变量的广义积分	349
习题 9-2	354
§ 3. Γ 函数和 B 函数	355
一、 Γ 函数	355
二、 B 函数	358
习题 9-3	360
§ 4. 傅里叶级数	361
一、周期为 2π 的函数的傅里叶级数展开	361
二、函数的周期性延拓	367
三、周期为 T 的函数的傅里叶级数展开	370
习题 9-4	372
§ 5. 傅里叶变换	373
一、傅里叶积分	373
二、傅里叶变换	376
三、单位脉冲函数	378
四、傅里叶变换的性质	380
习题 9-5	382
§ 6. 拉普拉斯变换	383
一、拉普拉斯变换的定义	384
二、拉普拉斯变换的性质	388
三、拉普拉斯逆变换的求法	391
四、常微分方程的拉普拉斯变换解法	393
习题 9-6	395
第十章 偏微分方程	397
§ 1. 基本概念和方程的导出	397
一、几个典型方程的导出	397
二、偏微分方程的基本概念及其分类	400
三、方程的定解条件	402

习题 10-1	403
§ 2. 分离变量法	404
一、弦振动方程的混合问题	404
二、一维热传导方程的混合问题	408
三、非齐次边界条件	409
四、非齐次方程(齐次边界条件)	410
习题 10-2	411
§ 3. 积分变换法	412
一、傅里叶变换在解定解问题中的应用	412
二、拉普拉斯变换在解定解问题中的应用	415
习题 10-3	416
§ 4. 达朗贝尔公式	417
一、特征方程和特征线	417
二、无界弦的自由振动、达朗贝尔公式	418
三、半无界弦的自由振动、对称延拓法	419
四、无界弦的强迫振动、齐次化原理	420
习题 10-4	421
§ 5. 格林函数	422
一、格林公式与基本解	422
二、格林函数	425
习题 10-5	427
附录 1 Fourier 变换简表	428
附录 2 Laplace 变换简表	431
习题答案	434

第一章 向量空间与空间解析几何

向量和向量空间是最基本的数学概念之一. 它的理论和方法已经渗透到自然科学、工程技术的各个领域. 在解析几何里, 它的应用更加直接. 运用向量的方法, 特别便于研究有关空间直线和平面的各种问题.

§ 1. 向量及其运算

向量是既有大小, 又有方向的量. 考虑平面向量情形, 我们知道, xy 平面上的向量在几何上表示为 xy 面上一有向线段. 若将每个向量的起点都平移至原点 O (这种通过平移而不变的向量称为自由向量, 简称向量. 我们只研究自由向量), 则每个向量的终点都唯一确定了平面上的一个点 $P(x, y)$; 反过来, 平面上任一点 $P(x, y)$ 唯一确定了以 O 为起点, $P(x, y)$ 为终点的一个向量. 可见, 平面上自由向量与平面上的点是一一对应的. 因此, 我们可用向量终点的坐标 (x, y) 来表示平面上的自由向量. 换言之, 任何一个二元有序数组 (x, y) 表示了平面上一自由向量, 反之也对. 从这一点出发, 我们可类似引进 n 维向量的概念.

定义 1 n 个数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 所组成的有序数组

$$\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

称为 n 维向量. 数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 称为 α 的分量(坐标), a_j 称为 α 的第 j 个分量(坐标), 分量是实数的向量称为实向量, 分量为复数的向量称为复向量, 本章只讨论实向量. 向量通常用 $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ 表示.

n 维向量是解析几何中 2 维向量的推广, 不过 2 维向量 (a_1, a_2) 在几何上都可表示为以原点 O 为起点, 点 $P(a_1, a_2)$ 为终点

的有向线段 $\overrightarrow{OP}$,而 n 维向量($n>3$)就没有这种直观的几何意义,只是沿用几何的术语罢了.

设 n 维向量 $\alpha=(a_1, a_2, \dots, a_n), \beta=(b_1, b_2, \dots, b_n)$,当且仅当它们各个对应的分量都相等,即 $a_i=b_i, i=1, 2, \dots, n$ 时,称向量 α 与 β 相等,记作 $\alpha=\beta$.特别地,两个2维向量相等,在几何上,就表示这两个有向线段可以经平行移动而完全重合.

分量都是0的向量叫做零向量,记作 0 ,即 $0=(0, 0, \dots, 0)$.

维数不同的零向量是不相等的.

向量 $(-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$ 称为向量 $\alpha=(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 的负向量,记作 $-\alpha$.特别地,当 $n=2$ 时, $-\alpha$ 表示与 α 方向相反,长度相同的有向线段.

定义2 设 $\alpha=(a_1, a_2, \dots, a_n), \beta=(b_1, b_2, \dots, b_n)$ 都是 n 维向量,称向量 $(a_1+b_1, a_2+b_2, \dots, a_n+b_n)$ 为 α 与 β 的和,记作 $\alpha+\beta$,即

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n).$$

特别地,当 $n=2$ 时, $\alpha+\beta$ 表示以原点 O 为一顶点, α, β 为两邻边的平行四边形的对角线 $\overrightarrow{OC}$.这正是我们熟知的平行四边形法则.由此易得三角形法则(图1-1).

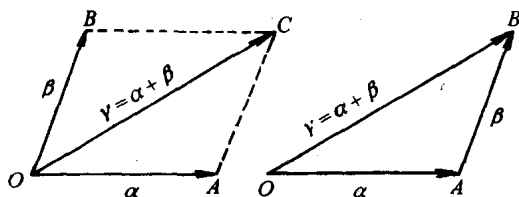


图 1-1

利用负向量,我们可定义向量的减法:

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots, a_n - b_n).$$

要注意的是向量的加、减法只能在维数相同的向量之间进行.

定义3 设 $\alpha=(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 为 n 维向量, λ 为实数,那么,向量 $(\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n)$ 称为向量 α 与数 λ 的乘积,简称数乘,记作 $\lambda\alpha$

或 $\alpha\lambda$. 即

$$\lambda\alpha = \alpha\lambda = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n).$$

特别地, 当 $n=2$ 时, (i) 若 $\lambda > 0$, 则 $\lambda\alpha$ 表示与 α 方向相同, 而长度为 α 的 λ 倍的有向线段. (ii) 若 $\lambda < 0$, 则 $\lambda\alpha$ 表示与 α 方向相反, 而长度为 α 的 $|\lambda|$ 倍的有向线段(图 1-2).

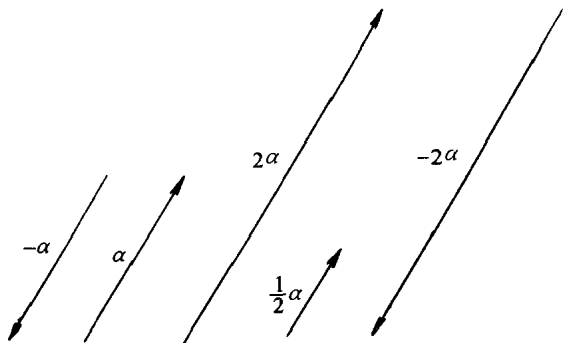


图 1-2

向量的加法及数乘满足下述运算规律.

设 α, β, γ 都是 n 维向量, λ, μ 为实数, 则

- 1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$,
- 2) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$,
- 3) $\alpha + 0 = \alpha$,
- 4) $\alpha + (-\alpha) = 0$,
- 5) $1 \cdot \alpha = \alpha$,
- 6) $\lambda(\mu\alpha) = (\lambda\mu)\alpha$,
- 7) $\lambda(\alpha + \beta) = \lambda\alpha + \lambda\beta$,
- 8) $(\lambda + \mu)\alpha = \lambda\alpha + \mu\alpha$.

这些结论都可通过直接验证而得到. 这里, 1), 2) 是我们熟悉的加法交换律和结合律, 6), 7), 8) 则是数乘的结合律和分配律, 而 3), 4) 保证加法有逆运算, 即

$$\text{若 } \alpha + \beta = \gamma, \text{ 则 } \gamma + (-\beta) = \alpha.$$