数学名著译丛

现代分析基础

第一卷

〔法〕J.迪厄多内 著

科学出版社

数学名著译丛

现代分析基础

第一卷

〔法〕J. 迪厄多内 著

郭瑞芝 苏维宜 译

郑维行 校

科 学 出 版 社

1 9 8 2

内 容 简 介

本书为法国著名数学家 J. 迪厄多内关于现代分析的多卷集的第一卷. 内容包括: 集论初步;实数;距离空间;赋范空间; Hilbert 空间;连续函数空间;微分学;解析函数;初等谱论等.

本书从公理出发发展理论,论证严谨. 每节后面附有大量问题,以便帮助读者加深理解本书内容.

本书原根据 1960 年英文版翻译,后又对照 1969 年法文版进行了补译,但变动不大.

本书适于高等学校数学系高年级学生、研究生、教师和数学工作者阅读.

J. Dieudonné
Éléments d'analyse
1
Gauthier-Villars

数学名著译丛
现 代 分 析 基 础
第一卷
〔法〕 J. 迪厄多内 著
郭瑞芝 苏维宜 译
郑维行 校
责任编辑 刘嘉善
科 学 出 版 社 出 版
北京朝阳门内大街 137 号
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
1982 年 11 月第 一 版 开本: 850×1168 1/32
1982 年 11 月第一次印刷 印张: 14 3/8
印数: 0001—9,500 字数: 375,000

统一书号: 13031·2030
本社书号: 2777·13—1
定价: 2.65 元

再 版 序 言

本书是我的一部九卷本著作的第一卷.它也是 1960 年出版的《现代分析基础》的修订版,但本质上没有变动. 很多读者、同事与朋友敦促我去写续篇,结果使我相信,确实还可以写一些现代分析的基本知识,它们的内容介于我曾想写的基本性质的"最小工具箱"与引向研究前缘的专著之间. 我的教学经验也使我确信,学数学的学生在跨过了"基础"的第一步以后,在置身于数学文献的海洋或进入他自己研究课题的狭径以前,需要进一步的引导以及对于他的论题的一般性鸟瞰.

因此,最后我就试图为七十年代的数学家们写一本象 Jordan, Picard 与 Goursat 曾经为 1880 到 1920 年间的学数学的学生们写的分析教程那样的相应著作.

写成一本百科全书式的著作显然不可能,同时改写 N. Bourbaki 的著作也一定是多余的,因而我被迫无情地删割到这样一种地步,使之能与古典著作相比拟. 我宁可将宽度看得比深度重些,因为我认为,向读者指明现代分析许多分支的入门比给他提供少量课题的详尽论述要好一些.

经验似乎表明,通常学生遇到新理论,难于在初读时一下子掌握.在他觉得熟悉这种理论并能区分哪些是主要概念,哪些是次要结果以前,需要多次翻阅它,只有这样,他才能运用自如. 因而,这部著作的各章是采样式的而非完整的理论; 事实上我有意使它不成为包罗万象的. 文献中所引的著作总可使读者深入学习任何特殊的理论.

然而,我不赞成用过于特殊的形式介绍分析的主要概念,这样做容易掩盖一般性工具的效能. 例如,借口直观或易于接受而把微分几何限于二维或三维情形,或把积分限于 Lebesgue 测度情形,

在我看来，这将导致错误的观念.

另一方面，我却认为，初学时限于考察可分可距离化拓扑空间，不会丢掉所涉及的一些概念的基本内容. 我们这一代数学家对可数性假设能不用就不用这种做法确实很对，因为这是求得一种清晰理解的唯一办法. 现在下述情况已很清楚：分析中最中心的部分(指的是与有限维流形有关的那些概念)在大多数重要应用中只涉及可分可距离化空间. 此外，有一种有效的与通常便于使用的一般技巧，可使基于可数性假设的证法过渡到一般的证法(在多数情况下，这是可能的). 概括地说，秘诀在于"用滤系代替序列". 应该说，结果往往只是使原来证法更为精炼. 因而，冒着被责骂的危险，我记取我的格言"唯有可数存在于无限". 我相信初学者集中注意象微分流形与积分概念中涉及的真正难点将会学得更好些，用不着同时担心实际上罕见的有关第二级拓扑问题[1].

在本教程中，分析的整个结构是从基础开始建立起来的. 最初承认的仅是逻辑规则与自然数的通常性质，并且除了这两者以外，课文中所有证明都依赖于公理和以前已证过的定理[2]. 然而，这部著作(包括第一卷)对尚未学完大学头两年数学专业课程的学生来说是不适宜的.

本书在分析的基本部分一个明显的特点是要求少量代数知识. 实际上只要求一点初等线性代数知识(为了读者方便，把它放在第一卷末的附录中). 然而，代数所起的作用在以后几卷中是不断增加的，并且最后当这种作用异常显著，尤其是高等交换代数与同调代数出现时，我们就把它留给读者了. 至于代数方面的参考书，我们选取了 R. Godement 的《抽象代数》(Houghton-Mifflin, New York, 1968, 原文为法文版，Hermann, Paris, 1963) 与 S. A. Lang 的《代数学》(Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1965)，并且可能会在某些方向上用附录方式增加它们.

1) 根据同样精神，在可分可距离化空间中我已不用(有时以较长篇幅为代价)超限归纳法.

2) 在包含定义与结果的某些问题以及例题中，逻辑次序全然没有象课文中已出现的或将要出现的那样严格.

至于第一卷，当准备本著作时，我从接触 N. Bourbaki 与其协作者们的大批未出版手稿中深受教益．某些课题介绍中的任何独到之处完全属于他们．

J. 迪厄多内

1969 年 4 月于尼斯

序　言

本卷是为一年级研究生或者三、四年级大学生中的高材生开设的一门课程的产物．这门课程(1956—1957年在西北大学讲授)的目的有两个：

(a) 为所有与分析有关的现代数学各分支提供必要的初步背景(事实上，可能除逻辑与纯粹代数以外，各分支都有需要)；

(b) 训练学生去应用现代最基本的数学工具——公理化方法(学生在大学期间，即使对它有所接触的话，也是非常少的)．

读者将会非常明显地看到：我们宁肯处处强调每个论题的概念方面，而不强调它的计算方面，后者是经典分析中最关心的；不仅在课文中如此，而且在大部分问题中也是这样．我们列入了大量问题用以补充课文并指出进一步有趣的发展．同时这些问题将给学生一个机会，来检验他对所学内容的理解程度．

虽然本卷包括一般在较为初等的教程中讨论的许多内容(包括通常所谓"高等微积分")，但是我们考虑问题的观点与通常这些教程完全不同．关于函数论与微积分的一些基本概念的叙述，是在这样充分一般的理论体系下进行的，它们在揭示这些概念的范围、效力与本性方面都远较在古典分析的通常限制下所做的为佳．没有必要去强调由这种一般性处理所产生的众所周知的"思想的节省"；但可指出有一种对应的"记号的节省"，它省略了大量附标，这几乎完全与"向量代数"简化古典解析几何一样．另外，这种一般性处理还使我们，至少在正式的证明中，必须严格持公理化方法，而不求助于任何"几何直观"：这一点我们又通过在书中故意不引进任何图解来加以强调．我个人认为：今天的研究生必须尽快地在这种思维的抽象与公理化方法上得到彻底训练，如果他想了解数学研究的目前趋向的话．本书的目的在于帮助学生建立起"抽

象的直观"，这在现代数学家的头脑中是相当基本的.

很清楚，学生在接触本教程之前必须精通古典分析. 然而从严格逻辑的观点来看，这里的论述并不以任何预先的知识为基础，只是除了：

1. 数理逻辑的最基本法则，数学归纳法与(正、负)整数的基本性质.

2. (域上的)初等线性代数，为此读者可以参考 Halmos [11]，Jacobson [13] 或 Bourbaki [4]；然而这些书包含的内容比我们实际需要的多得多(例如我们不利用对偶理论，读者如果熟悉向量子空间，超平面，直和，线性映射，线性式，维数与余维数等概念，就足够了).

在证明每一论断时，除了刚才提到的两点以外，我们只依靠公理与课文中已经证明的定理. 这种逻辑步骤的严格顺序在例题与问题中稍微有点放松，那里我们常常应用课文中尚未(甚至永远也不)论证的定义或结果.

就研究生在第一学年应当学习的那些分析内容而论，确实有些地方意见分歧很大. 因为我们要让本书的内容实际上能在一学年内教完，所以某些题目不得不舍去. 有些题目之所以没有列入，或因它们过于专门化了，或因它们可能要求较通常一年级研究生有更多的数学修养，或因这种内容无疑地已被包括在高等微积分教程中了. 如果要我们为数学家们提出研究生学习的一般课目，那么我们将推荐说：每个研究生都应熟悉本书的内容，不管他将来的专门方向如何.

我要向帮助我编写本讲义的数学家们，特别是 H. Cartan 与 N. Bourbaki 表示感谢，他们允许我接触未发表的讲义稿与手稿，这对本书的定稿有很大影响. 我也向西北大学数学系的同事们致以深切的谢意，他们使我能够按照既定的方针讲授这门课程，并以建设性的批评，大大地鼓励了我.

J. 迪厄多内

1960 年 4 月

目　　录

第一章 集论初步

本章我们不打算讲述以公理为基础的集论；要获得完全公理式的描述，我们建议有兴趣的读者参看 Kelley [15] 与 Bourbaki [3]. 本章所列举的不带任何证明或定义的条文，可以认为是与未定义的术语有关的公理.

本章从关于集合、子集与积集的一些基本定义与公式开始(1.1 到 1.3)；而其大部分篇幅用来讲述映射的基本概念，映射是一个或几个数值"变量"的经典(数值)函数概念的现代推广. 关于这个概念有两点应加以说明:

a) 映射最重要的(与特有的)属性是对变量的任何值对应一个元素；换句话说，不存在象多值函数那样的东西，尽管有很多著作与此相反. 把映射定义成其值为给定集的子集，而且这些子集可以有两个以上元素，当然完全合理. 但这样的定义实际上是无用的(至少在初等分析中)，因为不可能在这种函数的值上切实地定义出代数运算. 在第九章我们再来谈这个问题.

b) 学生应当尽快熟悉这一概念，即函数 f 是一个单一的对象，它本身可以"变化"并且一般地又被看成为大"函数空间"中的一个"点"；事实上，可以说分析学的经典概念与现代概念之间的主要差别之一就是，当我们写 $f(x)$ 时，在经典数学中. f 被看成"固定的"，x 被看成"自变量"，而现在 f 与 x 都被看成是"自变量"(并且有时正是 x 为固定的，而 f 成为"变化的"对象).

最后一节(1.9)给出可数集的最初等的性质，这是由 Cantor 及其继承者发展起来的"基数"的广阔理论的起点，对它有兴趣的读者可以参看 Bourbaki[3](第三章)或者(更详尽的) Bachmann[2]. 然而，原来除了实数集不构成可数集这一否定结果以外(见(2.2.17))，在集论对分析的应用中，人们简直不需要比这些初等

性质更多的东西.

1. 元 素 与 集

我们将讨论一些对象，其中有的称为集. 这些对象具有某种性质或者具有相互关系. 对象用符号(主要是字母)表示，至于性质或关系，则用所连接的对象的符号的组合、以及标志所考虑的性质或关系的一些其他符号的组合表示. 关系 $x = y$ 的意思是由符号 x 与 y 表示的对象是相同的;其否定关系写成 $x \neq y$.

若 X 是一个集，则关系 $x \in X$ 表示 x 是集 X 的元素，或 x 属于 X; 其否定关系写成 $x \notin X$.

若 X 与 Y 是两个集，则关系 $X \subset Y$ 表示 X 的每一个元素都是 Y 的元素(换句话说，它等价于关系 $(\forall x)(x \in X \Longrightarrow x \in Y)$);我们有 $X \subset X$，并且关系 ($X \subset Y$ 与 $Y \subset Z$) 蕴含 $X \subset Z$. 若 $X \subset Y$ 且 $Y \subset X$，则 $X = Y$. 换句话说，两个集相等，当且仅当它们具有相同的元素. 若 $X \subset Y$，则我们说 X **含于** Y **中**，或者说 Y **包含** X，或者说 X 是 Y 的**子集**; 也可写成 $Y \supset X$. $X \subset Y$ 的否定关系写成 $X \not\subset Y$.

给定集 X 与性质 P，存在 X 的这样一个唯一的子集，它的元素是所有使 $P(x)$ 为真的元素 $x \in X$; 这个子集记为 $\{x \in X | P(x)\}$. 关系 $\{x \in X | P(x)\} \subset \{x \in X | Q(x)\}$ 等价于 $(\forall x \in X)(P(x) \Longrightarrow Q(x))$; 关系 $\{x \in X | P(x)\} = \{x \in X | Q(x)\}$ 等价于 $(\forall x \in X)(P(x) \Longleftrightarrow Q(x))$. 例如，我们有 $X = \{x \in X | x = x\}$ 与 $X = \{x \in X | x \in X\}$. 集 $\phi_X = \{x \in X | x \neq x\}$ 称为 X 的**空子集**;它不含任何元素.若 P 是任意一个性质，则关系 $x \in \phi_X \Longrightarrow P(x)$ 对每个 x 为真，因为 $x \in \phi_X$ 的否定关系对每个 x 为真 (记住 $Q \Longrightarrow P$ 意思是“或者 Q 假，或者 Q 真则 P 真”). 因此，若 X 与 Y 是两个集，则由 $x \in \phi_X$ 推出 $x \in \phi_Y$，这就是说，$\phi_X \subset \phi_Y$; 类似地，我们有 $\phi_Y \subset \phi_X$，于是 $\phi_X = \phi_Y$，即所有空集是相等的. 因而，我们把空集记为 ϕ.

若 a 是一个对象，则以 a 作为唯一元素的集记为 $\{a\}$.

若 X 是一个集，则存在这样一个(唯一的)集，其元素是所有 X 的子集；这个集记为 $\mathfrak{P}(X)$. 我们有 $\phi \in \mathfrak{P}(X)$, $X \in \mathfrak{P}(X)$; 关系 $x \in X$ 与 $\{x\} \in \mathfrak{P}(X)$ 是等价的；关系 $Y \subset X$ 与 $Y \in \mathfrak{P}(X)$ 是等价的.

问　　题

试证，具有 $n(n \geqslant 0)$ 个元素的有限集，它的所有子集的集是具有 2^n 个元素的有限集。

2. 布 尔 代 数

设 X, Y 是两个集且 $Y \subset X$, 则集合 $\{x \in X | x \notin Y\}$ 是 X 的子集，称为 X 与 Y 的**差**或 Y 关于 X 的**余**，记为 $X - Y$ 或 $C_X Y$ (或 CY, 当不会混淆时).

给定两个集 X, Y，存在这样一个集，其元素同时属于 X 与 Y，即 $\{x \in X | x \in Y\}$; 它称为 X 与 Y 的**交**，记为 $X \cap Y$. 又存在这样一个集，其元素至少属于两个集 X, Y 中之一；它称为 X 与 Y 的**并**，记为 $X \cup Y$.

下列命题立即由定义推出:

(1.2.1)　$X - X = \phi$,　　$X - \phi = X$.

(1.2.2)　$X \cup X = X$,　　$X \cap X = X$.

(1.2.3)　$X \cup Y = Y \cup X$, $X \cap Y = Y \cap X$.

(1.2.4)　关系 $X \subset Y$, $X \cup Y = Y$, $X \cap Y = X$ 是等价的.

(1.2.5)　$X \subset X \cup Y$,　　$X \cap Y \subset X$.

(1.2.6)　关系“$X \subset Z$ 与 $Y \subset Z$”等价于 $X \cup Y \subset Z$;
关系“$Z \subset X$ 与 $Z \subset Y$”等价于 $Z \subset X \cap Y$.

(1.2.7)　$X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$, 写成 $X \cup Y \cup Z$.
$X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$, 写成 $X \cap Y \cap Z$.

(1.2.8)　$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$,

$$X\cap(Y\cup Z)=(X\cap Y)\cup(X\cap Z)\text{（分配律）}.$$

(1.2.9) 对于集 E 的两个子集 X, Y（这里所写的 C 代表 C_E）

$$C(CX)=X;$$

$$C(X\cup Y)=CX\cap CY, C(X\cap Y)=(CX)\cup(CY).$$

关系 $X\subset Y$ 与 $CX\supset CY$ 是等价的；关系 $X\cap Y=\phi$, $X\subset CY$, $Y\subset CX$ 是等价的；关系 $X\cup Y=E$, $CX\subset Y$ $CY\subset X$ 是等价的. 并集 $\{x\}\cup\{y\}$ 写成 $\{x, y\}$；类似地，$\{x\}\cup\{y\}\cup\{z\}$ 写成 $\{x, y, z\}$；等等

如果 $X\cap Y\neq\phi$，则我们说 X 和 Y **相交**.

3. 两个集的积

任意两个对象 a, b 对应于一个新对象，就是它们的**序对** (a, b)；关系 $(a, b)=(a', b')$ 等价于"$a=a'$"与"$b=b'$"；特别地，$(a, b)=(b, a)$ 当且仅当 $a=b$. 序对 $c=(a, b)$ 的第一(相应地,第二)元素称为 c 的**第一**(相应地,**第二**)**射影**，并记为 $a=\mathrm{pr}_1c$（相应地，$b=\mathrm{pr}_2c$）.

给定任意两个集 X, Y（不同或相同），存在一个(唯一的)集，其元素是所有使得 $x\in X$, $y\in Y$ 的序对 (x, y)；这个集记为 $X\times Y$，并称为 X 与 Y 的**笛卡儿积**(或简称**积**).

我们把 $x\in X$ 与 $y\in Y$ 之间的关系 $R(x, y)$ 同 $z\in X\times Y$ 的性质 $R(\mathrm{pr}_1z, \mathrm{pr}_2z)$ 联系起来；则使这个性质为真的那些元素所组成的 $X\times Y$ 的子集就是使 $R(x, y)$ 为真的所有序对 (x, y) 的集；它称为关系 R 的**图象**. $X\times Y$ 的任意子集 G 都是某个关系的图象，这个关系就是 $(x, y)\in G$. 若 $X'\subset X$, $Y'\subset Y$，则关系"$x\in X'$, $y\in Y'$"的图象就是 $X'\times Y'$.

对每个 $x\in X$, $G(x)$ 为满足 $(x, y)\in G$ 的所有元素 $y\in Y$ 的集，且对每个 $y\in Y$, $G^{-1}(y)$ 为满足 $(x, y)\in G$ 的所有元素 $x\in X$ 的集；$G(x)$ 与 $G^{-1}(x)$ 称为 G 在 x 与 y 的**交叉截痕**.

下列命题立即由定义推出：